ASUPRA POLINOAMELOR DE ABATERE MINIMĂ, AI CĂROR COEFICIENȚI VERIFICĂ O RELAȚIE LINEARĂ DATĂ*)

DE

I. MARUȘCIAC
(Cluj)

Comunicare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8–13 decembrie 1960, Cluj.

1. Fie K o mulțime compactă de puncte din planul complex z și

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} \tag{1}$$

un polinom de grad cel mult n, ai cărui coeficienții a_k verifică relația

$$L(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \neq 0, \tag{2}$$

unde α_k sînt niște numere complexe date. Astfel de polinoame, pentru prescurtare, le vom numi polinoame de tipul (1).

Se știe, dintr-o teoremă generală a lui S. G. Schnirelmann [8] aplicată la cazul acesta de E. I. Remez [7], că există un astfel de sistem de puncte $\{c_\nu\}$ format din N puncte ale mulțimii K, unde $n+1 \leqslant N \leqslant 2n+1$, încît polinomul de tipul (1) care se abate cel mai puțin de la zero pe mulțimea compactă K va fi de asemenea polinom de abatere minimă pe sistemul $\{c_\nu\}$. Deci problema determinării polinomului minimizant pe o mulțime infinită K se reduce la problema determinării polinomului minimizant pe o submulțime finită a sa. De aceea, în cele ce urmează ne vom ocupa numai de cazul unei mulțimi finite de puncte din plan.

2. Fie deci $E=\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ o mulțime finită formată din N $(N \geqslant n+1)$ puncte din planul complex z.

Vom studia aici determinarea polinomului de tipul (1) care se abate cel mai puțin de la zero pe mulțimea E, folosind aceeași metodă ca în alte două lucrări ([9] [10], în care am studiat polinoamele de cea mai bună aproximație a unei funcții continue.

*) Această lucrare se publică și în revista „Mathematica", vol. 3 (26), fasc. 1 (1961).

Considerăm media de ordinul $2p$ (p întreg pozitiv)

$$J_p = \left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} |P(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}, \tag{3}$$

unde $P(z)$ este un polinom de tipul (1) care verifică condiţia (2).

Vom căuta minimul mediei J_p cînd coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ variază independent verificînd relaţia (2).

În acest scop, să arătăm că *există un singur polinom de tipul* (1), $P_p(z)$, *care realizează minimul lui* J_p, *atunci cînd* p *este fix.*

În adevăr, J_p^{2p} în care s-a înlocuit a_r în funcţie de ceilalţi coeficienţi (din relaţia (2)), este un polinom în a_k' şi a_k''($a_k = a_k' + ia_k''$), $k = 0, 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n$, luînd numai valori pozitive. Minimul deci există şi este atins pentru un sistem de numere a_k', a_k'', care verifică sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial J_p^{2p}}{\partial a_k'} = 0, \quad \frac{\partial J_p^{2p}}{\partial a_k''} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n.$$

Pentru a dovedi unicitatea soluţiei, adică unicitatea polinomului minimizant, vom arăta că nu există un alt sistem de soluţii, diferit de primul.

Să presupunem contrariul, şi fie $a_k' + b_k'$, $a_k'' + b_k''$, $k = 0, 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n$, un al doilea sistem de soluţii. Să punem $u_k' = a_k' + tb_k'$, $u_k'' = a_k'' + tb_k''$, $u_k = u_k' + iu_k''$, $k = 0, 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n$, şi să formăm

$$J(u) = NJ_p^{2p}(u_0', u_0'', \ldots, u_{r-1}', u_{r-1}'', u_{r+1}', \ldots, u_n', u_n'')$$

care se obţine din $NJ_p^{2p}(a_0', a_0'', \ldots, a_{r-1}', a_{r-1}'', \ldots, a_n', a_n'')$ înlocuind fiecare a_k cu u_k.

Avem

$$\frac{dJ(u)}{dt} = \frac{\partial J}{\partial u_0'} b_0' + \frac{\partial J}{\partial u_0''} b_0'' + \ldots + \frac{\partial J}{\partial u_{r-1}'} b_{r-1}' + \frac{\partial J}{\partial u_{r-1}''} b_{r-1}'' + \frac{\partial J}{\partial u_{r+1}'} b_{r+1}' +$$

$$+ \frac{\partial J}{\partial u_{r+1}''} b_{r+1}'' + \ldots + \frac{\partial J}{\partial a_n''} b_n'' = p \sum_{\nu=1}^{N} |P(c_\nu)|^{2p-2} \cdot \frac{d}{dt} |P(c_\nu)|^2.$$

Din cele presupuse rezultă că expresia aceasta se anulează pentru $t = 0$ şi $t = 1$. Însă $J(u)$ fiind un polinom în t, îi putem aplica teorema lui Rolle şi deci

$$\frac{d^2}{dt^2} J(u) = 0, \quad \text{pentru } t = \tau, \ 0 < \tau < 1.$$

Avem pentru $t = \tau$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} J(u) = p(p-1) \sum_{\nu=1}^{N} |P(c_\nu)|^{2p-4} \left(\frac{d}{d\tau} |P(c_\nu)|^2\right)^2 + p \sum_{\nu=1}^{N} |P(c_\nu)|^{2p-2} \frac{d^2}{d\tau^2} |P(c_\nu)|^2 = 0.$$

Arătînd că $\frac{d^2}{d\tau^2} |P(c_\nu)|^2 > 0$, vom ajunge la o contradicţie, deoarece atunci în expresia de mai sus toţi termenii vor fi pozitivi şi deci, aceasta nu se va putea anula.

Pentru aceasta notăm

$$A = R(P) = u_0' R\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) - u_0'' \cdot I\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + \ldots +$$

$$+ u_{r-1}' R\left(z^{n-r+1} - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} z^{n-r}\right) - u_{r-1}'' I\left(z^{n-r+1} - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} z^{n-r}\right) +$$

$$+ u_{r+1}' R\left(z^{n-r-1} - \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} z^{n-r}\right) - u_{r+1}'' I\left(z^{n-r-1} - \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + \ldots, +$$

$$+ u_n' R\left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_r} z^{n-r}\right) - u_n'' I\left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + R\left(\frac{z^{n-r}}{\alpha^r}\right),$$

$$B = I(P) = u_0' L\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + u_0'' R\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + \ldots\ldots +$$

$$+ u_n' I\left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + u_n'' R\left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + I\left(\frac{z^{n-r}}{\alpha_r}\right),$$

unde $R(\alpha)$ şi $I(\alpha)$ înseamnă partea reală, respectiv partea imaginară a numărului α.

Avem

$$|P(z)|^2 = A^2 + B^2.$$

Deci

$$\frac{d\,|P(z)|^2}{dt} = 2A\left[b_0' R\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) - b_0'' I\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. + b_0' R\left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) - b_0'' I\left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right)\right] +$$

$$+ 2B\left[b_0' I\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + b_0'' R\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) +\right.$$

$$\left. + \ldots + b_n' I\left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_n} z^{n-r}\right) + b_n'' R\left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_r} z^{n-r}\right)\right],$$

$$\frac{d^2|P(z)|^2}{dt^2} = 2\left[b_0' R\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) - b_0'' I\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + \ldots\right]^2 +$$

$$+ 2\left[b_0' I\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + b_0'' R\left(z^n - \frac{\alpha_0}{\alpha_r} z^{n-r}\right) + \ldots\right]^2 > 0.$$

Rezultă deci $b_0' = b_0'' = \ldots = b_n' = b_n'' = 0$ şi unicitatea polinomului minimizant este demonstrată.

Vom demonstra acum următoarea

TEOREMA 1. *Fie E o mulţime finită, compusă din N $(N \geqslant n+1)$ puncte : $c_1, c_2, \ldots, c_N$. Atunci, notînd cu $P_p(z)$ polinomul de tipul* (1) *care realizează minimul lui J_p pentru p fix, avem*

$$\lim_{p\to\infty} P_p(z) = M_n(z),\ j = \lim_{p\to\infty} j_p = \rho_n = \max_{z\in E} |M_n(z)|,$$

unde $M_n(z)$ este polinomul de tipul (1) *care se abate cel mai puţin de la zero pe mulţimea E, iar j_p — valoarea minimă a lui J_p.*

Într-adevăr, deoarece se verifică uşor că $j_{p+1} \geqslant j_p$, limita lui j_p pentru $p \to \infty$ există.

Să arătăm acum că polinoamele $P_p(z)$ formează o familie *uniform mărginită* în raport cu p într-un cerc (C) care conţine în interior mulţimea E.

Ori, deoarece $P_p(z)$ este un polinom de tipul (1) care realizează minimul lui J_p, avem

$$j_p = \left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} |P_p(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} < \left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} |M_n(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \max |M_n(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} \leq \left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \rho_n^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} = \rho_n.$$

Insă $|P_p(z)|$ îşi atinge maximul său într-un punct $z \in E = \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$. Să-l notăm cu c_{k_0} (unde k_0 este una din valorile $1, 2, \ldots, N$), adică

$$\max |P_p(z)| = |P_p(c_{k_0})|.$$

Atunci

$$|P_p(c_\nu)| \leq |P_p(c_{k_0})|,\ \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

Pe de altă parte, din (3) rezultă

$$\frac{1}{N}|P_p(c_\nu)|^{2p} \leq \frac{1}{N}\sum |P_p(c_\nu)|^{2p} < \rho_n^{2p},$$

sau

$$|P_p(c_{k_0})| < \rho_n \cdot N^{\frac{1}{2p}} < \rho_n N.$$

Folosind formula de interpolare a lui Lagrange pentru o grupare oarecare de $n+1$ puncte din E, ne convingem că $\{P_p(z)\}$ sînt uniform mărginite (în raport cu p într-un cerc (C), care conţine în interior mulţimea E. Mulţimea $\{P_p(z)\}$ formează deci o familie normală în sens Montel şi, prin urmare, se poate extrage din $\{P_p(z)\}$ un subşir $\{P_{p_m}(z)\}$ convergent către un polinom $P(z)$ tot de tipul (1)

$$P(z) = \lim_{m\to\infty} P_{p_m}(z),$$

convergenţa fiind uniformă în cercul (C).

Deci

$$\left|\rho_n^* - \max_{z\in E} |P_{p_m}(z)|\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ m > m_0, \quad \text{unde } \rho_n^* = \max_{z\in E} |P(z)|.$$

De asemenea se ştie că

$$\lim_{p\to\infty} J[P(z)] = \max_{z\in E} |P(z)|$$

pentru orice familie de polinoame uniform mărginite în (C).

În cazul nostru

$$\lim_{m\to\infty} J_{p_m}[P_{p_m}(z)] = \lim_{m\to\infty} j_{p_m} = \max_{z\in E} |P_{p_m}(z)|.$$

Deci

$$\left|\max_{z\in E} |P_{p_m}(z)| - j_{p_m}\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ m > m_1.$$

Prin urmare

$$|\rho_n^* - j_{p_m}| \leqslant \left|\rho_n^* - \max_{z\in E} |P_{p_m}(z)|\right| + \left|\max_{z\in E} |P_{p_m}(z)| - j_{p_m}\right| < \varepsilon$$

pentru $m > \max(m_0, m_1)$. De aici rezultă $\rho_n^* = j$. Însă avem $\rho_n = \max\limits_{z\in E} |M_n(z)|$ şi evident $\rho_n \leqslant \rho_n^* = j$. Mai avem de asemenea $j_p \leqslant J_p[M_n(z)] \leqslant \rho_n$, deci $j \leqslant \rho_n$. Prin urmare $\rho_n = \rho_n^* = \max |P(z)|$. Polinomul $M_n(z)$ fiind unic, rezultă $M_n(z) \equiv P(z)$.

Prin aceasta am arătat că $\{P_{p_m}(z)\}$ converge unifom către $M_n(z)$. Însă pe baza unei observaţii [10] rezultă că întreg şirul $\{P_p(z)\}$ converge uniform către $M_n(z)$ în cercul (C). Prin aceasta teorema este complet demonstrată.

3. Folosind acelaşi procedeu ca şi în lucrările amintite la începutul notei, vom da o formă specială pentru polinomul de tipul (1) $M_n(z)$ care se abate cel mai puţin de la zero pe mulţimea E.

Pentru aceasta, urmează să rezolvăm o problemă de minim cu legături, adică să găsim minimul funcţiei

$$\Phi(a_0', a_0'', \ldots, a_n', a_n'') = J_p^{2p} + \lambda_1[L(P_n) - 1] + \lambda_2[\overline{L}(P_n) - 1],$$

în raport cu $a_0', a_0'', \ldots, a_n''$, unde $\overline{L}(P_n)$ înseamnă conjugata condiţiei (2). Minimul lui Φ se obţine anulînd derivatele parţiale în raport cu a_k', a_k'' sau, ceea ce este acelaşi lucru, în raport cu a_k şi $\overline{a}_k$.

Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial a_k} &= \frac{p}{N}\sum_{\nu=1}^{N} |P(c_\nu)|^{2p-2} \cdot \overline{P(c_\nu)} \cdot c_\nu^{n-k} + \lambda_1 \alpha_k = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial \overline{a}_k} &= \frac{p}{N}\sum_{\nu=1}^{N} |P(c_\nu)|^{2p-2} \cdot P(c_\nu) \cdot \overline{c}_\nu^{\,n-k} + \lambda_2 \overline{\alpha}_k = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n.$$

După cum se vede, a doua relație se obține luînd conjugata celei dintîi, deoarece se constată ușor că $\lambda_1 = \lambda_2$. Într-adevăr ținînd cont de relația (2) din sistemul (4), deducem

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{p}{N} \sum_{\nu=1}^{N} |P(c_\nu)|^{2n} = -p \cdot j_p^{2p}.$$

Prin urmare, sistemul (4) devine

$$\sum_{\nu=1}^{N} |P(c_\nu)|^{2p-2} \cdot \bar{c}_\nu^{n-k} = \bar{\alpha}_k N \cdot j_p^{2p}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Notînd

$$L_{kh} = \sum_{\nu=1}^{N} |P(c_\nu)|^{2p-2} \cdot \bar{c}_\nu^{n-k} \cdot c_\nu^{n-h}, \qquad k, h = 0, 1, \ldots, n,$$

sistemul (5) se va scrie sub forma

$$a_0 L_{k0} + a_1 L_{k1} + \ldots + a_n L_{kn} = \bar{\alpha}_k N \cdot j_p^{2p}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Adăugînd acestui sistem egalitățile

$$a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + \ldots + a_n \alpha_n = 1$$

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \;\; = P(z)$$

și eliminînd necunoscutele $a_0, a_1, \ldots, a_n$, obținem

$$P(z) = \begin{vmatrix} L_{00} & L_{01} & \ldots & L_{0n} & \bar{\alpha}_0 \\ L_{10} & L_{11} & \ldots & L_{1n} & \bar{\alpha}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n0} & L_{n1} & \ldots & L_{nn} & \bar{\alpha}_n \\ z^n & z^{n-1} & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} L_{00} & L_{01} & \ldots & L_{0n} & \bar{\alpha}_0 \\ L_{10} & L_{11} & \ldots & L_{1n} & \bar{\alpha}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n0} & L_{n1} & \ldots & L_{nn} & \bar{\alpha}_n \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Vom transforma acești doi determinanți, folosind un procedeu al lui Heine, întrebuințat în lucrarea [3] de către prof. G. C ă l u g ă r e a n u, scriind $L_{k0}, \ldots, L_{nk}$ sub forma

$$L_{k0} = \sum_{\nu_k=1}^{N} |P(c_{\nu_k})|^{2p-2} \bar{c}_{\nu_k}^{n-k} \cdot c_{\nu_k}^{n}, \; L_{k1} = \sum_{\nu_k=1}^{N} |P(c_{\nu_k})|^{2p-2} \cdot \bar{c}_{\nu_k}^{n-k} c_{\nu_k}^{n-1},$$

$$\ldots, L_{kn} = \sum_{\nu_k=1}^{N} |P(c_{\nu_k})|^{2p-2} \cdot \bar{c}_{\nu_k}^{n-k} \cdot 1.$$

Dezvoltînd determinantul de la numitorul lui (7) după elementele ultimei coloane și efectuînd „scoaterile în factor" ale sumelor Σ în fiecare minor, punînd pentru simplificarea scrierii

$$\Delta(\nu_0, \ldots, \nu_{i-1}, \nu_{i+1}, \ldots, \nu_n) = \begin{vmatrix} c_{\nu_0}^n & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ c_{\nu_1}^n & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu_{i-1}}^n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu_{i+1}}^n & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu_n}^n & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \alpha_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_n \end{vmatrix}$$

găsim

$$(-1)^{n+1} \bar{\alpha}_0 \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n=1}^{N} |P(c_{\nu_1}) \ldots P(c_{\nu_n})|^{2p-2} \bar{c}_{\nu_1}^{n-1} \bar{c}_{\nu_2}^{n-2} \ldots \bar{c}_{\nu_{n-1}} \cdot 1 \cdot \Delta(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) +$$

$$+ (-1)^{n+2} \bar{\alpha}_1 \sum_{\nu_0 \nu_2, \ldots, \nu_n=1} |P(c_{\nu_0}) P(c_{\nu_2}) P(c_{\nu_n})|^{2p-2} \bar{c}_{\nu_0}^{n} \bar{c}_{\nu_2}^{n-2} \ldots \bar{c}_{\nu_{n-1}} \cdot 1 \cdot \Delta(\nu_0, \nu_2, \ldots, \nu_n) +$$

$$\ldots + (-1)^{2n+1} \bar{\alpha}_n \sum_{\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}=1}^{N} |P(c_{\nu_0}) \ldots P(c_{n-1})|^{2p-2} \cdot \bar{c}_{\nu_0}^{n} \bar{c}_{\nu_1}^{n-1} \ldots \bar{c}_{\nu_{n-1}} \Delta(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i,k=0}^{n} (-1)^{i+k} \bar{\alpha}_i \alpha_k \sum_{\nu_0, \ldots, \nu_{i-1}, \nu_{i+1}, \ldots, \nu_n=1}^{N} |P(c_{\nu_0}) \ldots P(c_{\nu_{i-1}}) P(c_{\nu_{i+1}}) \ldots P(c_{\nu_k})|^{2p-2} \times$$

$$\times \bar{c}_{\nu_0}^{n} \ldots \bar{c}_{\nu_{i-1}}^{n-i+1} \cdot \bar{c}_{\nu_{i+1}}^{n-i-1} \ldots \bar{c}_{\nu_{n-1}} \cdot 1 \cdot V^{(k)}(c_{\nu_0}, \ldots, c_{\nu_{i-1}}, c_{\nu_{i+1}}, \ldots, c_{\nu_k}),$$

unde $V^{(k)}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ este determinantul lui Van de Monde $V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ în care lipsește linia a i-a și coloana corespunzătoare puterilor $n - k$. Putem schimba aici notația indicilor în toate cele n ! moduri posibile, ceea ce revine mai sus la permutarea liniilor în determinanți. Adunînd toate aceste relații, obținem numitorul lui (7) sub forma

$$\frac{1}{n!} \sum_{i,k=0}^{n} (-1)^{i+k} \bar{\alpha}_i \alpha_k \sum_{\nu_0, \ldots, \nu_{i-1} \nu_{i+1}, \ldots, \nu_n=}^{N} |I(c_{\nu_0}) \ldots P(c_{k_{i-1}}) P(c_{k_{i+1}}) \ldots P(c_{\nu_n})|^{2p-2} \times$$

$$\times V^{(k)}(c_{\nu_0}, \ldots, c_{\nu_{i-1}}, c_{\nu_{i+1}}, \ldots, c_{\nu_n}) \cdot V^{(i)}(\bar{c}_{\nu_0}, \ldots, \bar{c}_{\nu_{i-1}}, \bar{c}_{\nu_{i+1}}, \ldots, \bar{c}_{\nu_n}).$$

Mai observăm că în ultima sumă putem schimba notația indicilor de însumare, deoarece aceasta nu influențează rezultatul. Prin urmare, putem scrie mai simplu

$$\frac{1}{n!} \sum_{i,k=1}^{n} (-1)^{i+k} \bar{\alpha}_i \alpha_k \Sigma |P(c_{\nu_1}) \ldots P(c_{\nu_n})|^{2p-2} \cdot V^{(k)}(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) \cdot V^{(i)}(\bar{c}_{\nu_1}, \ldots, \bar{c}_{\nu_n}). \tag{8}$$

Făcînd transformări absolut analoage asupra numărătorului expresiei (7), găsim

$$P(z)=\frac{\sum\limits_{i,k=0}^{n}(-1)^{i+k}\,\overline{\alpha}_i\, z^{n-k}\,\Sigma\,|P(c_{\nu_1})\dots P(c_{\nu_n})|^{2p-2}\cdot V^{(k)}(c_{\nu_1},\dots,c_{\nu_n})\,V^{(i)}(\overline{c}_{\nu_1},\dots,\overline{c}_{\nu_n})}{\sum\limits_{i,k=0}^{n}(-1)^{i+k}\,\overline{\alpha}_i\,\alpha_k\,\Sigma\,|P(c_{\nu_1})\dots P(c_{\nu_n})|^{2p-2}\,V^{(k)}(c_{\nu_1},\dots,c_{\nu_n})\,V^{(i)}(\overline{c}_{\nu_1},\dots,\overline{c}_{\nu_n})} \tag{9}$$

Semnul Σ se extinde asupra tuturor indicilor $\nu_1, \dots, \nu_n$.

Deci polinomul minimizant $P(z)$ verifică această ecuaţie funcţională. De aici, trecînd la limită pentru $p \to \infty$, găsim o expresie specială pentru polinomul de tipul (1) de abatere minimă $M_n(z)$.

Pentru aceasta notăm

$$K_\nu^{(p)}=\frac{|P(c_\nu)|^{2p-2}}{\sqrt[n]{\Sigma\,|P(c_{\nu_1})\dots P(c_{\nu_n})|^{2p-2}\cdot|V(c_{\nu_1},\dots,c_{\nu_n})|^2}}. \tag{10}$$

Avem evident

$$\Sigma\, K_{\nu_1}^{(p)}\dots K_{\nu_n}^{(p)}\cdot|V(c_{\nu_1},\dots,c_{\nu_n})|^2=1. \tag{11}$$

Cu notaţia (10), ecuaţia funcţională (9) se transcrie sub forma

$$P(z)=\frac{\sum\limits_{i,k=0}^{n}(-1)^{i+k}\,\overline{\alpha}_i\, z^{n-k}\,\Sigma\, K_{\nu_1}^{(p)}K_{\nu_2}^{(p)}\dots K_{\nu_n}^{(p)}\cdot V^{(k)}(c_{\nu_1},\dots,c_{\nu_n})\cdot V^{(i)}(\overline{c}_{\nu_1},\dots,\overline{c}_{\nu_n})}{\sum\limits_{i,k=0}^{n}(-1)^{i+k}\,\overline{\alpha}_i\,\alpha_k\,\Sigma\, K_{\nu_1}^{(p)}K_{\nu_2}^{(p)}\dots K_{\nu_n}^{(p)}\cdot V^{(k)}(c_{\nu_1},\dots,c_{\nu_n})\cdot V^{(i)}(\overline{c}_{\nu_1},\dots,\overline{c}_{\nu_n})}. \tag{12}$$

Se vede că $K_\nu^{(p)} \geqslant 0$. Încă nu putem afirma că şirul $\{K_\nu^{(p)}\}$ este convergent. Insă, notînd

$$R_{\nu_1\dots\nu_n}^{(p)}=K_{\nu_1}^{(p)}K_{\nu_2}^{(p)}\dots K_{\nu_n}^{(p)},\quad p=1,2,\dots, \tag{13}$$

din cauza relaţiei (11), rezultă că există un şir parţial $\{R_{\nu_1\dots\nu_n}^{(p_k)}\}$ convergent către $R_{\nu_1\dots\nu_n}$.

Fie acum $E^*=\{c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_l}\}$ submulţimea punctelor din E în care $|M_n(z)|$ îşi atinge maximul (evident că $l \geqslant n+1$). În aceste puncte $|P(c_k)| \to \rho_n = \rho_n(E) = \max\limits_{z\in E}|M_n(z)|$, $p \to \infty$.

Fie $R_{\alpha_1\dots\alpha_n} = \max R_{\nu_1\dots\nu_n}$ relativ la toate constantele $R_{\nu_1\dots\nu_n}$ corespunzătoare celor C_l^n grupări de n puncte din E^*. Renumerotînd, la nevoie, punctele mulţimii E, putem presupune că $R_{\alpha_1\dots\alpha_n}=R_{12\dots n}$.

Observăm apoi că

$$\frac{R_{\alpha\nu_2\dots\nu_n}^{(p)}}{R_{\beta\nu_2\dots\nu_n}^{(p)}}=\frac{K_\alpha^{(p)}}{K_\beta^{(p)}}=\frac{|P(c_\alpha)|^{2p-2}}{|P(c_\beta)|^{2p-2}} \tag{14}$$

şi, deoarece şirurile $\{R_{\nu_1\dots\nu_n}^{(p_k)}\}$ sînt convergente, rezultă că şi raportul lor va fi convergent, dacă $R_{\beta\nu_2\dots\nu_n} \neq 0$. Aceasta se realizează dacă luăm, de exemplu, la numitor $R_{12\dots n}^{(p_k)}$, căci $R_{12\dots n}$, după cum se vede din (11), nu poate fi nul. În aceste condiţii, rezultă că raportul $|P(c_\alpha)|^{2p_k-2}/|P(c_\beta)|^{2p_k-2}$ este convergent, oricare ar fi $\beta = 1, 2, \dots, n$ şi $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

Ţinînd cont de aceste observaţii, putem arăta uşor că şirul $\{K_\nu^{(p_k)}\}$ este convergent pentru $k \to \infty$, oricare ar fi ν.

Pentru aceasta, observăm mai întîi că

$$0 \leqq K_\nu^{(p)} \leqq \frac{|P(c_\nu)|^{2p-2}}{|V_n|^{\frac{2}{n}}\cdot|P(c_1)\dots P(c_n)|^{\frac{2p-2}{n}}} \leqq \frac{|P(c_\nu)|^{2p-2}}{|V_n|^{\frac{2}{n}}\cdot|P(c_\beta)|^{2p-2}}, \tag{15}$$

unde

$$|V_n| = \min_{(\nu)}|V(c_{\nu_1},\dots,c_{\nu_n})|,\ |P(c_\beta)| = \min|P(c_i)|,\ i=1,2,\dots,n.$$

Vom arăta mai întîi, ţinînd cont de inegalităţile (15), că constantele $K_\nu^{(p)}$ corespunzătoare punctelor din mulţimea $E-E^*$ adică în care $|M_n(c_\nu)| < \rho_n$, converg către zero. Într-adevăr, deoarece $|M_n(c_\nu)| < \rho_n$, există un număr întreg pozitiv p_0 astfel că $|P(c_\nu)| < \rho_n$, pentru $p > p_0$. Însă atunci există un număr $\sigma > 0$, în aşa fel încît să avem de asemenea $|P(c_\nu)| < \rho_n - 2\sigma$, pentru $p > p_0$. Deoarece într-un punct $c_\beta \in E^*$, $|P(c_\beta)| \to \rho_n$, $p \to \infty$, avem de asemenea $|P(c_\beta)| > \rho_n - \sigma$, pentru $p > p_1$. Prin urmare

$$\frac{|P(c_\nu)|^{2p-2}}{|P(c_\beta)|^{2p-2}} < \left|\frac{\rho_n-2\sigma}{\rho_n-\sigma}\right|^{2p-2} = (1-h)^{2p-2},\ h=\frac{\sigma}{\rho_n-\sigma}>0,$$

oricare ar fi $c_\nu \in E - E^*$ şi $\beta = 1, 2, \dots, n$.

De aici şi din (15) rezultă $K_\nu^{(p)} \to 0$, $p \to \infty$.

Urmează să mai arătăm că şi şirurile $\{K_i^{(p_k)}\}$ corespunzătoare punctelor $c_i \in E^*$, sînt de asemenea convergente.

Ori, din (15) şi (14) rezultă că există un subşir $\{K_i^{(p_k)}\} \to K_i$, $k \to \infty$, oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, l$.

Cu aceasta am arătat că oricare ar fi ν şirul $|\{K_\nu^{(p_k)}\}|$ este convergent oricare ar fi $\nu = 1, 2, \dots, N$.

Trecînd acum la limită, pentru $k \to \infty$, în relaţia (12) obţinem

$$M(z)=\frac{\sum\limits_{i,k=0}^{n}(-1)^{i+k}\,\overline{\alpha}_i\, z^{n-k}\,\Sigma\, K_{\nu_1}\dots K_{\nu_n} V^{(k)}(c_{\nu_1},\dots,c_{\nu_n})\cdot V^{(i)}(\overline{c}_{\nu_1},\dots,\overline{c}_{\nu_n})}{\sum\limits_{i,k=0}^{n}(-1)^{i+k}\,\overline{\alpha}_i\,\alpha_k\,\Sigma\, K_{\nu_1}\dots K_{\nu_n} V^{(k)}(c_{\nu_1},\dots,c_{\nu_n})\cdot V^{(i)}(\overline{c}_{\nu_1},\dots,\overline{c}_{\nu_n})} \tag{16}$$

Relaţia (16) în care coeficienţii K_ν sînt toţi nenegativi, dă o formă specială polinomului de tipul (1) de abatere minimă, căci în membrul doi sînt puse în evidenţă afixele punctelor mulţimii E precum şi numerele date α_n. Forma (16) a polinomului de tipul (1) care se abate cel mai puţin de la zero pe E, prezintă avantajele practice, deoarece determinarea constantelor K_ν constituie o problemă algebrică. Ea prezintă şi o importanţă teoretică, căci pune în evidenţă un sistem de numere K_ν care, după cum vom vedea, se regăsesc şi în alte probleme legate de polinomul $M_n(z)$.

Vom considera mai jos două cazuri particulare mai simple :

a) Să luăm în relaţia (3) $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, ceea ce înseamnă $a_0 = 1$. In acest caz, formula (16) se transcrie, ţinînd cont de faptul că $V^{(0)}(x_1, x_2, \ldots, x) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sub forma

$$M_n(z) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k z^{n-k} \sum K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_n} V^{(k)}(c_{\nu_1}, c_{\nu_2}, \ldots, c_{\nu_n}) \cdot \overline{V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n})}}{\sum K_{\nu_1} K_{\nu_2} \ldots K_{\nu_n} |V(c_{\nu_1}, c_{\nu_2} \ldots, c_{\nu_n})|^2}, \quad (17)$$

sau

$$M_n(z) = \sum K_{\nu_1} K_{\nu_2} \ldots K_{\nu_n} |V(c_{\nu_1}, c_{\nu_2}, \ldots, c_{\nu_n})|^2 \cdot (z - c_{\nu_1})(z - c_{\nu_2}) \ldots (z - c_{\nu_n}) \quad (18)$$

$$\sum K_{\nu_1} K_{\nu_2} \ldots K_{\nu_n} | V(c_{\nu_1}, c_{\nu_2} \ldots, c_{\nu_n}) |^2 = 1. \quad (19)$$

Formula (18) este identică cu cea găsită de prof. G. C ă l u g ă r e a n u în lucrarea [3] şi reprezintă expresia polinomului C e b î ş e v $T_n(z, E)$ pe mulţimea E.

b) Dacă $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$, adică $a_n = 1$, formula (16) capătă forma

$$M_n(z) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k z^{n-k} \sum K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_n} V^{(k)}(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) \cdot V^{(n)}(\overline{c_{\nu_1}}, \ldots, \overline{c_{\nu_n}})}{\sum K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_n} | V^{(n)}(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n})|^2}$$

sau, ţinînd cont de faptul că $V^{(n)}(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) = c_{\nu_1} \ldots c_{\nu_n} V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n})$, iar

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^{n-k} V^{(k)}(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) = V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}; z) =$$

$$= (z - c_{\nu_1})(z - c_{\nu_n}) \ldots (z - c_{\nu_n}) \times V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}),$$

avem

$$M_n(z) = \frac{\sum K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_n} | V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) |^2 \bar{c}_{\nu_1} \ldots \bar{c}_{\nu_n} (z - c_{\nu_1}) \ldots (z - c_{\nu_n})}{\sum K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_n} | V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) |^2 \cdot | c_{\nu_1} \ldots c_{\nu_n} |^2}. \quad (20)$$

În cazul $N = n+1$ putem scrie explicit expresia polinomului de tipul (1) de abatere minimă, calculînd coeficienţii K_ν.

Mai întîi să observăm că formula (16) poate fi scrisă şi sub altă formă. Se ştie că

$$V^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) = V(x_1, \ldots, x_n) \cdot \sigma_k(x_1, \ldots, x_n).$$

unde $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ reprezintă funcţia simetrică elementară de ordinul k a numerelor $x_1, \ldots, x_n$. Ţinînd cont de aceasta, formula (16) se scrie sub forma

$$M_n(z) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \bar{\alpha}_k \sum \bar{\sigma}_k(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) . K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_n} | V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n})|^2 (z - c_{\nu_1}) \ldots (z - c_{\nu_n})}{\sum\limits_{i, k=0}^{n} (-1)^{i+k} \bar{\alpha}_i \alpha_k \sum \bar{\sigma}_i(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) \sigma_k(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) . K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_n} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n})|^2} \quad (21)$$

unde $\bar{\sigma}_k(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n})$ înseamnă conjugata lui $\sigma_k(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n})$.

Mai observăm că $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \bar{\alpha}_i \bar{\sigma}_i (c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) = \bar{S}_n(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n})$, reprezintă conjugata condiţiei (2) pentru polinomul de gradul n avînd rădăcinile $c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}$ şi cu coeficientul lui z^n egal cu 1.

Cu aceste notaţii $M_n(z)$ capătă o formă mult mai simplă

$$M_n(z) = \frac{\sum K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_n} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n})|^2 \cdot \bar{S}_n(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) (z - c_{\nu_1}) \ldots (z - c_{\nu_n})}{\sum K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_n} | V(c_{\nu_n}, \ldots, c_{\nu_n}) |^2 \cdot |S_n(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n})|^2} \quad (16')$$

În cazul $N = n + 1$, formula (16') capătă forma

$$M_n(z) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} K_0 .. K_{i-1} K_{i+1} .. K_n |V(c_0, .., c_{i-1}, c_{i+1}, .., c_n)|^2 \cdot \bar{S}_n^{(i)} (z - c_0) .. (z - c_{i-1})(z - c_{i+1}) .. (z - c_n)}{\sum\limits_{i=0}^{n} K_0 \ldots K_{i-1} K_{i+1} \ldots K_n |V(c_0, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n)|^2 \cdot |S_n^{(i)}|^2}, \quad (22)$$

unde s-a notat cu $S_n^{(i)} = S_n(c_0, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n)$, iar punctele c_ν au fost numerotate de la 0 la n.

Punînd

$$\lambda_i = K_0, \ldots K_{i-1} K_{i+1} \ldots K_n |V(c_0, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n)|^2,$$

$$i = 0, 1, \ldots, n,$$

avem

$$M_n(z) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \bar{S}_n^{(i)} (z - c_0) \ldots (z - c_{i-1})(z - c_{i+1}) \ldots (z - c_n)}{\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i | S_n^{(i)} |^2}. \quad (23)$$

Din (17) rezultă

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1. \tag{24}$$

Scriind acum că $|M_n(c_0)| = \dots = |M_n(c_n)| = \rho_n$, obţinem

$$\lambda_i |(c_i - c_0) \dots (c_i - c_{i-1})(c_i - c_{i+1}) \dots (c_i - c_n)| = |S_n^{(i)}| = \rho_n A = \rho,$$

$$i = 0, 1, \dots, n,$$

unde A reprezintă numitorul expresiei (23).

Notînd cu

$$\Delta_n^{(i)} = |(c_i - c_0) \dots (c_i - c_{i-1})(c_i - c_{i+1}) \dots (c_i - c_n)|,$$

$$i = 0, 1, \dots, n,$$

avem

$$\lambda_i = \frac{\rho}{\Delta_n^{(i)} |S_n^{(i)}|}. \tag{25}$$

Din (24) şi (25) obţinem

$$\rho = \frac{|S_n^{(0)} S_n^{(1)} \dots S_n^{(n)}| \cdot |V(c_0, \dots, c_n)|}{\sum_{j=0}^{n} |S_n^{(0)} \dots S_n^{(j-1)} S_n^{(j+1)} \dots S_n^{(n)}| \cdot |V(c_0, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)|}, \tag{26}$$

de unde

$$\lambda_i = \frac{|S_n^{(0)} \dots S_n^{(i-1)} S_n^{(i+1)} \dots S_n^{(n)}| \cdot |V(c_0, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)|}{\sum_{j=0}^{n} |S_n^{(0)} \dots S_n^{(j-1)} S_n^{(j+1)} \dots S_n^{(n)}| \cdot |V(c_0, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)|}. \tag{27}$$

Înlocuind valorile lui λ_i în (24), obţinem expresia polinomului de tipul (1) care se abate cel mai puţin de la zero pe $n+1$ puncte din plan

$$M_n(z) =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} |S_n^{(0)} \dots S_n^{i-1} S_n^{i+1} \dots S_n^{(n)}| . |V(c_0, \dots, c_{i-1}, c_{i-1}, \dots, c_n)| \overline{S}_n^{(i)} (z - c_0) \dots (z - c_{i-1})(z - c_{i+1} \dots (z - c_n)}{|S_n^{(0)} \dots S_n^{(n)}| \sum_{i=0}^{n} |S_n^{(i)}| \cdot |V(c_0, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)|}, \tag{28}$$

iar

$$\rho_n = \frac{|V(c_0, c_1, \dots, c_n)|}{\sum_{i=0}^{n} |S_n^{(i)}| \cdot |V(c_0, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)|}. \tag{29}$$

Făcînd în aceste formule

a) $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, $S_n^{(k)} = 1$, găsim

$$M_n(z) = T_n(z; E) =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n} |V(c_0, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)| (z - c_0) \dots (z - c_{i-1})(z - c_{i+1}) \dots (z - c_n)}{\sum_{i=0}^{n} |V(c_0, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)|} \tag{30}$$

$$\rho_n = \mu_n(E) = \frac{|V(c_0, c_1, \dots, c_n)|}{\sum_{i=0}^{n} |V(c_0, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)|}, \tag{31}$$

care reprezintă expresia polinomului lui Cebîşev de gradul n pe $n+1$ puncte şi a abaterii minime corespunzătoare, cunoscută încă de De la Vallée-Poussin [5].

b) Dacă $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$, $S_n^{(i)} = (-1)^n c_0 \dots c_{i-1} c_{i+1} \dots c_n$, $\overline{S}_n^{(i)} = (-1)^n . \overline{c}_0 \dots \overline{c}_{i-1} \overline{c}_{i+1} \dots \overline{c}_n$, găsim

$$M_n(z) = \tag{32}$$

$$= \frac{(-1)^n \sum_{i=0}^{n} |c_i| . |V(c_0, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)| . \overline{c}_0 \dots \overline{c}_{i-1} \overline{c}_{i+1} \dots \overline{c}_n (z - c_0) \dots (z - c_{i-1})(z - c_{i+1}) \dots (z - c_n)}{|c_0 \dots c_n| \sum_{i=0}^{n} |c_0 \dots c_{i-1} \cdot c_{i+1} \dots c_n| \cdot |V(c_0, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)|}$$

$$\rho_n = \frac{|V(c_0, c_1, \dots, c_n)|}{\sum_{i=0}^{n} |c_0 \dots c_{i-1} c_{i+1} \dots c_n| \cdot |V(c_0, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)|} \tag{33}$$

Ultimele două formule dau expresia polinomului de abatere minimă, respectiv abaterea minimă, corespunzătoare cazului $a_n = 1$, adică reprezintă formulele ce dau polinomului care se abate cel mai puţin de la zero, dintre toate polinoamele care au termenul liber egal cu 1. N-am întîlnit în literatură expresia acestui polinom pentru cazul mulţimii formate din $n+1$ puncte.

4. Toate rezultatele de mai sus pot fi extinse şi la cazul unei medii ponderate de forma

$$J_p(m) = \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu |P(c_\nu)|^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}}, \tag{34}$$

unde m_ν verifică relaţiile : $m_\nu \geq 0$, $\nu = 1, 2, \dots, N$, $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu = 1$, urmînd întocmai raţionamentul făcut în cazul mediei simetrice $m_1 = m_2 = \dots = m_N = \frac{1}{N}$, considerată mai sus.

Dacă notăm că $P_p(z\,;\,m)$ polinomul de tipul (1) care realizează minimul lui $J_p(m)$ cu ponderea $m = \{m_\nu\}$ şi cu $j_p(m) = \min\limits_{(P_\nu)} J_p(m)$, atunci procedînd la fel, se constată că polinomul $P_p(z\,;\,m)$ va satisface o ecuaţie analoagă cu (9), în care au să apară în plus numerele $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$,

$$P_p(z;\, m) = \tag{9'}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i,k=0}^{n} (-1)^{i+k}\,\overline{\alpha}_i\, z^{n-k} \sum m_{\nu_1} \ldots m_{\nu_n} |P(c_{\nu_1}) \ldots P(c_{\nu_n})|^{2p-2} \cdot V^{(k)}(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) \cdot V^{(i)}(\overline{c}_{\nu_1}, \ldots, \overline{c}_{\nu_n})}{\sum\limits_{i,k=0}^{n} (-1)^{i+k}\,\overline{\alpha}_i\, \alpha_k \sum m_{\nu_1} \ldots m_{\nu_n} |P(c_{\nu_1}) \ldots P(c_{\nu_n})|^{2p-2} \cdot V^{(k)}(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) \cdot V^{(i)}(\overline{c}_{\nu_1}, \ldots, \overline{c}_{\nu_n})}.$$

Din (9′) se vede că pentru $p=1$, polinomul $P_1(z\,;\,m)$ care realizează minimul mediei patratice ponderate cu ponderea $m = \{m_\nu\}$, este complet determinat

$$P_1(z;\, m) = \frac{\sum\limits_{i,k=0}^{n} (-1)^{i+k}\,\overline{\alpha}_i\, z^{n-k} \sum m_{\nu_1} \ldots m_{\nu_n} V^{(k)}(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) \cdot V^{(i)}(\overline{c}_{\nu_1}, \ldots, \overline{c}_{\nu_n})}{\sum\limits_{i,k=0}^{n} (-1)^{i+k}\,\overline{\alpha}_i \cdot \overline{\alpha}_k \sum m_{\nu_1} \ldots m_{\nu_n} V^{(k)}(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}) \cdot V^{(i)}(\overline{c}_{\nu_1}, \ldots, \overline{c}_{\nu_n})}. \tag{35}$$

Dacă comparăm relaţiile (36) şi (16), observăm că $P_1(z\,;\,K) = M_n(z)$, unde $K = \{K_\nu\}$, K_ν — fiind constantele nenegative ce apar în expresia (16) a polinomului de abatere minimă $M_n(z)$.

Din (16) se vede că constantele K_ν sînt determinate pînă la un factor constant arbitrar, şi prin urmare putem presupune $\Sigma\, K_\nu = 1$. Există deci o anumită pondere pentru care polinoamele minimizante în cele două metrici coincid.

Se pune imediat problema studierii condiţiilor în care polinoamele minimizante în cele două metrici coincid şi pentru $p > 1$.

În acest sens, să arătăm mai întîi că

$$j_1(K) = \max_{\{m_\nu\}} j_1(m).$$

În adevăr, pentru orice mulţime E şi orice sistem de numere $m = \{m_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, avem

$$j_1^2(m) = \min_{(P_n)} \sum_{\nu=0}^{N} m_\nu\, |P(c_\nu)|^2 \leqslant \sum_{\nu=0}^{N} m_\nu\, |M_n(c_\nu)|^2 \leqslant \rho_n^2(E)$$

adică

$$j_1(m) \leqslant \rho_n(E). \tag{36}$$

Dacă notăm $j_1 = \max\limits_{\{m_\nu\}} j_1(m)$, avem de asemenea $j_1 \leqslant \rho_n(E)$. Însă deoarece $P_1(z;\, K) \equiv M_n(z)$, avem

$$j_1^2(K) = \sum_{\nu=1}^{N} K_\nu\, |M_n(c_\nu)|^2 = \rho_n^2(E), \tag{37}$$

căci în punctele $c_\nu \in E - E^*$ constantele corespunzătoare $K_\nu = 0$. Deci $j_1 = j_1(K) = \rho_n(E)$.

Acum putem enunţa următoarea

TEOREMA 2. *Oricare ar fi E o mulţime finită de puncte din planul z, polinomul de tipul* (1) *$M_n(z)$, care se abate cel mai puţin de la zero pe E, este în acelaşi timp şi polinomul minizant al mediei $J_p(K)$ cu ponderea $K=\{K_\nu\}$, adică*

$$P(z;\, K) = M_n(z;\, E), \tag{38}$$

oricare ar fi $p \geqslant 1$.

Vom demonstra teorema folosind cunoscuta inegalitate a lui Hölder.

Avem

$$\rho_n(E) = \left(\sum_{\nu=0}^{N} K_\nu\, |M_n(c_\nu)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{\nu=0}^{N} K_\nu\, |P_p(c_\nu;\, K)|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu^{1-\frac{1}{p}} [K_\nu^{\frac{1}{p}}\, |P_p(c_\nu;\, K)|\cdot]\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{\nu=0}^{N} K_\nu\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu |P_p(c_\nu;\, K)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu\, |P_p(c_\nu;\, K)|^{\cdot p}\right)^{\frac{1}{2p}} = j_p(K),$$

deci

$$\rho_n(E) \leqslant j_p(K). \tag{39}$$

Însă

$$j_p(K) = \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu\, |P_p(c_\nu;\, K)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu\, |M_n(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} = \rho_n(E),$$

adică $\rho_n(E) \geqslant j_p(K)$. De aici şi din (39) rezultă $\rho_n(E) = j_p(K)$. Polinoamele $P_p(z;\, K)$ şi $M_n(z)$ fiind unice, avem $P_p(z;\, K) = M_n(z)$. Cum inegalităţile de mai sus au loc oricare ar fi $p \geqslant 1$, teorema este complet demonstrată.

Utilizînd rezultatele precedente, putem da o condiţie necesară şi suficientă pentru polinomul de tipul (1) de abatere minimă $M_n(z)$, analoagă cu cea dată de către V. S. V i d e n s k i în lucrarea [2]. În acest sens are loc următoarea

TEOREMA 3. *Pentru ca printre polinoamele de tipul* (1) *$M_n(z)$ să fie de abatere minimă pe mulţimea E, este necesar şi suficent să fie verificate relaţiile*

$$M_n(c_\nu) = \rho_n e^{-i\theta_\nu}, \quad \rho_n > 0, \quad c_\nu \in E^*, \tag{40}$$

$$\frac{1}{\rho_n} \sum_{\nu=0}^{N} K_\nu\, e^{i\theta_\nu} \cdot c_\nu^{n-k} = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{41}$$

unde α_k sînt numerele complexe date, din relaţia (2), *iar $K = \{K_\nu\}$ este determinat de condiţia $j_1(K) = \max\limits_{(m_\nu)} j_1(m)$.*

Condiţia este *necesară*. Într-adevăr dacă $M_n(z)$ este polinomul de abatere minimă de tipul (1) pe mulţimea E, atunci din teorema 2 rezultă că acesta realizează minimul mediei ponderate (34) cu ponderea $K = \{K_\nu\}$, determinată de $j_1(K) = \max\limits_{(m_\nu)} j_1(m)$, ori care ar fi $p \geqslant 1$. Prin urmare, funcţia reală $J_p[K; M_n + (\xi + i\eta)P_n]$, unde $P_n(z)$ este un polinom oarecare ai cărui coeficienţii a_k verifică relaţia

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k = 0 \tag{2'}$$

îşi atinge minimul său pentru $\xi = 0, \ \ \xi = 0 \quad (J_p(K : M) = j_p(K))$.

Deci trebuie să avem

$$\frac{\partial J_p(K ; M_n)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial J_p(K ; M_n)}{\partial \eta} = 0, \tag{42}$$

sau

$$\sum_{\nu=0}^{N} \frac{K_\nu \, |M_n(c_\nu)|^{2p} \cdot P_n(c_\nu)}{M_n(c_\nu)} = 0, \tag{43}$$

oricare ar fi polinomul $P_n(z)$ de grad cel mult n, ai cărui coeficienţi verifică relaţia (2').

Ţinînd cont de faptul că coeficienţii K_ν corespunzători punctelor din $E - E^*$ sînt nuli, iar în punctele $c_\nu \in E^*$, avem

$$M_n(c_\nu) = \rho_n(E)\, e^{-i\theta_\nu} = \rho_n\, e^{-i\theta_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N^*. \tag{44}$$

Din (43) şi din (44) rezultă

$$\sum_{\nu=0}^{N} K_\nu \, \rho_n^{2p-1} e^{i\theta_\nu} \cdot P_n(c_\nu) = 0,$$

sau

$$\frac{1}{\rho_n} \sum_{\nu=0}^{N} K_\nu \cdot e^{i\theta_\nu} \cdot P(c_\nu) = 0,$$
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k = 0. \tag{45}$$

De aici, prin scădere, obţinem condiţia (41) şi necesitatea este demonstrată.

Pentru a demonstra *suficienţa* condiţiilor (40) şi (41), observăm că relaţia (41) se scrie şi sub forma

$$\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu \overline{M_n(c_\nu)} \cdot c_\nu^{n-k} = \rho_n^2 \alpha_k. \tag{41'}$$

Fie $M_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k z^{n-k}$. Dacă înmulţim cei doi membri ai relaţiei (41') cu b_k şi însumăm după k membru cu membru, obţinem

$$\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu \, |M_n(c_\nu)|^2 = \rho_n^2. \tag{46}$$

care ne arată că polinomul $M_n(z)$ realizează minimul mediei patratice ponderate cu pondera $K = \{K_\nu\}$ şi, deoarece din condiţiile teoremei avem $j_1(K) = \max\limits_{\{m_\nu\}} j_1(m)$, din teorema 2 rezultă că polinomul $M_n(z)$ coincide cu polinomul de abatere minimă pe mulţimea E. Astfel şi suficienţa este demonstrată.

Menţionăm că ultimele două teoreme sînt analoage cu cele date de matematicianul sovietic V. S. Videnski [2] în cazul aşa-numitelor ,,mulţimi caracteristice''. Însă aici ele au fost demonstrate pentru orice mulţime finită din plan, iar constantele K_ν care figurează în enunţ arată legătură dintre aceste teoreme şi forma specială (16) a polinomului de abatere minimă $M_n(z)$.

Observaţie. Deoarece coeficienţii K_ν corespunzători punctelor din mulţimea $E - E^*$ sînt egali cu zero, din aceasta rezultă imediat teorema analoagă cu cunoscuta teoremă a lui De la Vallée-Poussin referitoare la coincidenţa polinomului de abatere minimă pe mulţimile E şi E^*, adică $M_n(z ; E) \equiv M(z ; E^*)$.

Universitatea ,,Babeş-Bolyai'' Cluj,
Catedra de teoria funcţiilor

О ПОЛИНОМАХ НАИМЕНЬШЕГО ОТКЛОНЕНИЯ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРЫХ УДОВЛЕТВОРЯЮТ ЗАДАННОМУ ЛИНЕЙНОМУ СООТНОШЕНИЮ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть E — конечное множество точек комплексной плоскости (z) и

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} \tag{1}$$

полином степени не больше n, коэффициенты которого удовлетворяют соотношению

$$L(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k = 1 \tag{2}$$

где α_k некоторые заданные комплексные числа. Такие полиномы для краткости, будем называть полиномами типа (1).

В труде исследуется возможность определения такого полинома типа (1), который наименее отклоняется от нуля на множестве E, применяя идею Полья [6] связывающую экспоненциальное приближение с равномерным приближением.

Рассматривается среднее порядка $2p$ (p — целое, положительное)

$$J_p = \left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} | P(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} \tag{3}$$

где $P(z)$ полином типа (1), и исследуется минимум этого среднего в классе полиномов типа (1).

Показывается, во первых, что существует только один полином $P_p(z)$ типа (1), которым достигается минимум среднего (3), а потом доказывается (теорема 1), что $P_p(z) \to M_n(z)$, для $p \to \infty$, где $M(z)$ полином минимального отклонения на множестве E.

Применив этот результат, дается специальный вид (формула (16)) для полинома минимального отклонения $M_n(z)$, в котором необходимо определять только N (число точек на E) неотрицательных констант K.

В второй части труда рассматривается весовое среднее $J_p(m)$ (формула 34) и исследуются случаи совпадения полиномов $P_p(z, m)$ и $M_n(z)$. Показывается, что $P_p(z, K) = M_n(z)$, для любого $p \geqslant 1$ (теорема 2), где $K = \{K_\nu\}$ (K_ν — коэффициенты, фигурирующие в формуле (16)).

В конце дается теорема, устанавливающая необходимые и достаточные условия для того, чтобы полином типа (1) имел минимальное отклонение на конечном множестве E (теорема 3).

SUR LES POLYNOMES D'ÉCART MINIMUM DONT LES COEFFICIENTS VÉRIFIENT UNE RELATION LINÉAIRE DONNÉE

RÉSUMÉ

Soit E un ensemble fini de points dans le plan complexe (z) et

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} \tag{1}$$

un polynome du degré n au plus, dont les coefficients a_k vérifient la relation

$$L(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k = 1, \tag{2}$$

où α_k sont des nombres complexe donnés. Pour abréger, nous appellerons de tels polynomes des polynomes du type (1).

On étudie la possibilité de déterminer le polynome du type (1) qui s'écarte le moins de zéro sur l'ensemble E, en utilisant une idée de G. Pólya [6] qui rattache l'approximation exponentielle à l'approximation uniforme.

On considère la moyenne d'ordre $2p$ (p entier positif)

$$J_p = \left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} | P(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}, \tag{3}$$

où $P(z)$ est un polynome du type (1), et l'on étudie le minimum de celle-ci dans la classe des polynomes du type (1).

On montre d'abord qu'il existe un seul polynome $P_p(z)$ du type (1) qui réalise le minimum de la moyenne (3) ; puis on démontre (théorème 1) que $P_p(z) \to M_n(z)$, pour $p \to \infty$, où $M_n(z)$ est le polynome d'écart minimum sur l'ensemble E.

En utilisant ce résultat, on donc une forme spéciale (formule (16)) au polynome d'écart minimum $M_n(z)$, où restent à déterminer seulement N (le nombre des points dans E) constantes nonnégatives K_ν.

Dans la deuxième partie du travail, on considère la moyenne pondérée $J_p(m)$ (formule (34)) et on étudie les cas de coincidence des polynomes $P_p(z\,;\,m)$ et $M_n(z)$. On montre que $P_p(z\,;\,K) = M_n(z)$, quel que soit $p \geqq 1$ (théorème 2), où $K = \{K_\nu\}$ (K_ν étant les coefficients qui figurent dans la formule (16)).

Enfin, on donne un théorème qui établit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynome du type (1) soit d'écart minimum sur un ensemble fini E (théorème 3).

BIBLIOGRAFIE

1. В. С. Виденский, *О равномерном приближении в комплексной области.* Успехи мат. наук, XI, *5*, 169—175(1956).
2. В. С. Виденский, *О наименее уклоняющихся от нуля многочленах, коэффициенты которых удовлетворяют данной линейной зависимости.* Доклады Акад. Наук СССР, **126**, 248—250(1959).
3. G. Călugăreanu, *Asupra polinoamelor lui Cebîşev ale mulţimilor plane mărginite şi închise.* Bul. ştiinţ. —Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice, fizice şi chimice, 7, **II**, *1*, 8—15 1950.
4. — *Despre polinoamele lui Cebîşev ale mulţimilor finite de puncte din plan.* Studia Univ. Babeş et Bolyai Cluj, Seria Mat., **1**, 24—28 (1958).
5. De la Vallée-Poussin, *Sur les polynomes d'approximation à une variable complex.* Bull. Acad. Roy. Belgique, Classe de Sciences, 199—211 (1911).
6. G. Pólya, *Sur un algoritm toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure aproximation de Tchebychef pour une fonction continue quelconque.* Compt rend., **157**, 840—843 (1913).

7. Е. Я. Ремез, *Некоторые вопросы чебышевского приближения в комплексной плоскости.* Укр. мат. журнал, I, *5*, 3—49(1953).
8. L. Schnirelmann, *Sur les approximations uniformes.* Bul. Acad. Sci. U.R.S.S. Moscou, Cl. Sci. Natur., Ser. Math., 53—60 (1938).
9. I. Maruşciac, *Asupra polinoamelor lui Cebîşev k-restrînse pe o mulţime mărginită şi închisă.* Studia Univ. Babeş et Bolyai Cluj, Seria Mat.—Fiz., *1*, 73—89 (1960).
10. — *Asupra polinoamelor de cea mai bună aproximaţie a unei funcţii pe o mulţime finită de puncte din planul complex.* Studii şi cercet. de matem. (Cluj), **XI**, 325—335 (1960).

Primit la 23. I. 1961.