# CALCULUL APROXIMATIV AL EXTREMELOR UNEI FUNCȚII*)

DE

F. RADÓ

(Cluj)

*Comunicare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8—13 decembrie 1960, Cluj*

1. Metoda de calcul aproximativ al extremelor unei funcții de o variabilă reală, dată în această notă, este aplicabilă în cazurile cînd nu există derivata sau este greoi de a o scrie efectiv.

Presupunem, pentru a fixa ideile, că funcția $f(x)$ are un minim de abscisă $x_0$ în intervalul $I_0 = [a, b]$, este descrescătoare în $[a, x_0]$ și crescătoare în $[x_0, b]$.

Fie $c, d \in I_0$, $c < d$. Dacă $f(c) < f(d)$, avem $x_0 \in [a, d]$, iar dacă $f(c) \geqslant f(d)$, avem $x_0 \in [c, b]$. Notăm cu $I_1$ intervalul $[a, d]$ în primul caz, respectiv intervalul $[c, b]$ în al doilea caz. Intervalul $I_1$ conține în interiorul său unul din punctele $c$, $d$ și alegem încă un punct $\xi_1 \in I_1$; astfel intervalul $I_1$ este împărțit în trei intervale parțiale. Prin același procedeu pe care l-am aplicat mai sus intervalului $I_1$, se găsește că $x_0$ se află într-un interval $I_2$, format prin reunirea a două intervale parțiale vecine. Continuînd în acest fel obținem un șir de intervale

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots, \tag{1}$$

care toate conțin punctul $x_0$.

Se vede ușor că punctele $\xi_n \in I_n$, $n = 1, 2, \ldots$, pot fi alese în așa fel ca $I_n \to 0$. De exemplu, dacă se ia pentru $\xi_n$ mijlocul celui mai mare dintre cele două intervale în care $I_n$ se găsește împărțit, atunci $I_n \to 0$. Extremitățile intervalului $I_n$ furnizează valori aproximative pentru $x_0$ prin lipsă și exces.

2. Ne propunem să determinăm punctele $c$, $d$ și $\xi_n$ astfel ca șirul de intervale (1) să tindă cît mai rapid posibil către zero. Sînt necesare două precizări:

*) Această lucrare se publică și în limba franceză în revista „Mathematica" 3(26), 1961.

a) Punctele $c, d$ şi $\xi_n$ nu determină şirul (1); funcţia $f(x)$ ne arată care două din cele trei intervale parţiale ale lui $I_{n-1}$ formează intervalul $I_n$. Ne situăm în ipoteza cea mai defavorabilă pentru rapiditatea convergenţei: *presupunem că la fiecare pas se lasă la o parte acela dintre cele două intervale parţiale de la margine, care este mai scurt* (în caz de egalitate, oricare dintre ele). În această ipoteză, problema noastră devine independentă de funcţia $f(x)$.

b) Vom zice că o alegere a punctelor $c, d, \xi_n$, precum şi şirul $\{l_n\}$ al lungimii intervalelor care rezultă din această alegere şi ipoteza a) sînt *optime*, dacă condiţia următoare este satisfăcută: pentru orice altă alegere a punctelor $c, d, \xi_n$ şi pentru şirul $\{\lambda_n\}$ al lungimilor intervalelor corespunzătoare există un număr natural $N_\lambda$, astfel ca $l_n \leqslant \lambda_n$, pentru $n \geqslant N_\lambda$.

TEOREMA 1. *Există un singur şir optim, care se obţine luînd pentru $c$ şi $d$ punctele care împart intervalul $I_0$ în medie şi extremă raţie* ($(d-a)^2 = (b-a)(b-d)$, $c-a = b-d$) *şi pentru $\xi_n$ simetricul în raport cu mijlocul lui $I_n$ al punctului de diviziune situat în $I_n$.*

Considerăm pentru demonstraţie intervalul $I_0 = [0, b]$ şi punctele $c_0, d_0$, care împart acest interval în medie şi extremă raţie (fig. 1)

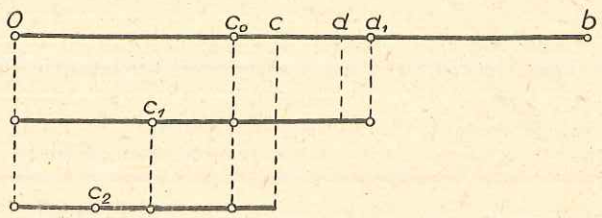


Fig. 1

$$c_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}b, \quad d_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b.$$

Luăm în intervalul $I_1^0 = [0, d_0]$ punctul $c_1 = d_0 - c_0$, care împreună cu $c_0$ divide pe $I_1^0$ în medie şi extremă raţie; păstrăm în continuare intervalul $I_2^0 = [0, c_0]$ în care se mai ia $c_2 = c_0 - c_1$, ş. a. m. d. $l_0 = b$, $l_1 = d_0$, $l_2 = c_0$, $l_3 = c_1, \dots l_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{n-1}$.

Să considerăm pe de altă parte punctele oarecare $c, d, \xi_n$, $(c < d)$ care determină intervalele $I_0, I_1, I_2, \dots$ de lungimi $\lambda_0 = b, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ Distingem două cazuri:

*a*) Dacă $c \notin (c_0, d_0)$ sau $d \notin (c_0, d_0)$ atunci evident $\lambda_1 \geqslant l_1$.

*b*) Fie acum $c, d \in (c_0, d_0)$. Ajunge să considerăm cazul

$$\frac{c+d}{2} \geqslant \frac{c_0+d_0}{2},$$



căci putem aplica la nevoie o simetrie în raport cu mijlocul intervalului $I_0$. Avem

$$cd = \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d-c}{2}\right)^2 > \left(\frac{c_0+d_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_0-c_0}{2}\right)^2 = c_0 d_0,$$

sau

$$\lambda_1 \lambda_2 > l_1 l_2$$

şi

$$\frac{\lambda_1}{l_1} = \frac{d}{d_0} > \frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}b} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Aşadar avem în toate cazurile:

$$\lambda_1 > \frac{\sqrt{5}+1}{4} l_1 \qquad (2)$$

şi

$$\lambda_1 < l_1 \to \lambda_1 \lambda_2 > l_1 l_2. \qquad (3)$$

Notăm

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n}{l_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Aplicînd raţionamentul prin care am ajuns la relaţiile (2) şi (3) intervalului $I_n$ de lungime $\lambda_n$ în loc de $I_0$, obţinem că aceste relaţii rămîn valabile dacă înlocuim pe $\lambda_1$ cu $\lambda_n$, $\lambda_2$ *cu* $\lambda_{n+1}$, $l_1$ cu $\alpha_{n-1} l_n$ şi $l_2$ *cu* $\alpha_{n-1} l_{n+1}$

$$\lambda_n > \frac{\sqrt{5}+1}{4} \alpha_{n-1} l_n$$

$$\lambda_n < \alpha_{n-1} l_n \to \lambda_n \lambda_{n+1} > \alpha_{n-1}^2 l_n l_{n+1}.$$

Deci avem $\alpha_0 = 1$,

$$\alpha_n > \frac{\sqrt{5}+1}{4} \alpha_{n-1} \qquad (4)$$

şi

$$\alpha_n < \alpha_{n-1} \to \alpha_n \alpha_{n+1} > \alpha_{n-1}^2. \qquad (5)$$

Din (5) se deduce că dacă $\alpha_n < \alpha_{n-1}$, atunci $\alpha_{n+1} > \alpha_{n-1}$. Rezultă că dintre doi termeni consecutivi ai şirului $\{\alpha_n\}$, cel puţin unul este mai mare egal cu oricare termen anterior şi

$$\alpha_{n+i} < \alpha_n \to \alpha_{n+i-1} \geqslant \alpha_n, \quad \alpha_{n+i+1} > \alpha_n, \quad i = 1, 2, \dots \qquad (6)$$

Fie

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots \tag{7}$$

indicii $n$ pentru care $\alpha_n < 1$. Ținînd seamă că $\alpha_0 = 1$, din (6) avem

$$\alpha_{n_1+1} = \theta > 1.$$

Din $\alpha_{n_2} < \theta = \alpha_{n_1+1}$ rezultă $\alpha_{n_2-1} \geqslant \theta$ și ținînd seamă de (5)

$$\alpha_{n_2+1} > \alpha^2_{n_2-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{n_2}} > \theta^2.$$

și în general

$$\alpha_{n_k+1} > \theta^k. \tag{8}$$

Din (6) și $\alpha_{n_{k+1}} < 1$ deducem $\alpha_{n_{k+1}-1} > \theta^k$, iar din (4)

$$1 > \alpha_{n_{k+1}} > \frac{\sqrt{5}+1}{4}\,\theta^k. \tag{9}$$

Deoarece $\theta^k \to \infty$, cînd $k \to \infty$, relația (9) poate fi verificată numai pentru $k$ mai mic decît un număr natural $k_0$ și astfel șirul (7) conține un număr finit de termeni. Dacă $n > N_\lambda = n_{k_0}$, avem $\alpha_n \geqslant 1$ și $\lambda_n \geqslant l_n$. Am demonstrat că șirul $\{l_n\}$ este optim.

Pentru a arăta unicitatea șirului optim, să observăm întîi că dacă șirurile $\{l_n\}$ și $\{\lambda_n\}$ nu coincid, atunci există un indice $n = \nu$ astfel ca $\alpha_\nu \neq 1$; avem $\alpha_\nu > 1$ sau $\alpha_{\nu+1} > 1$, iar din (6) rezultă că pentru o infinitate de indici $n$, $\alpha_n > 1$ sau $\lambda_n > l_n$.

Să presupunem că și șirul $\{l'_n\}$ este optim și cele două șiruri $\{l_n\}$ și $\{l'_n\}$ nu coincid. Există nu număr natural $N'_l$, astfel ca $n > N'_l$,

$$l'_n \geqslant l_n;$$

dar pentru o infinitate de indici $n$ avem $l'_n > l_n$. Contradicția la care am ajuns arată unicitatea șirului optim.

**3.** Procedeul de aproximare de la nr. **1** poate fi aplicat sub următoarea formă modificată:

Presupunem iarăși că funcția $f(x)$ admite minimul $f(x_0)$ în $I_0 = [a, b]$ și că $f(x)$ descrește în $[a, x_0]$ și crește în $[x_0, b]$. Alegem punctul $c \in (a,b)$ în mod arbitrar, iar punctul $d$ ca abscisa minimului polinomului de interpolare al funcției $f(x)$ pe nodurile $a, b, c$

$$d = \frac{1}{2}\,\frac{(b^2-c^2)f(a) + (c^2-a^2)f(b) + (a^2-b^2)f(c)}{(b-c)f(a) + (c-a)f(b) + (a-b)f(c)}. \tag{10}$$

Determinăm ca la nr **1** intervalul $I_1$. Considerăm polinomul de interpolare al funcției $f(x)$ cu nodurile în capetele lui $I_1$ și în acela dintre punctele $c$ și $d$ care se află în interiorul lui $I_1$; notăm abscisa minimului acestui polinom de interpolare cu $\xi_1$, ș. a. m. d.



Acest procedeu modificat prezintă o analogie cu metoda părților proporționale pentru aflarea rădăcinilor unei ecuații $F(x) = 0$. Dacă $F(x)$ este o funcție convexă sau concavă în intervalul considerat, atunci se știe că rădăcina ecuației este mai mică, respectiv mai mare decît valoarea ei aproximativă aflată prin metoda părților proporționale. Există o proprietate analoagă și în cazul procedeului nostru modificat.

Funcția $f(x)$ este convexă de ordinul 2 în intervalul $[a, b]$, dacă diferența divizată

$$[x_1, x_2, x_3, x_4; f] > 0 \tag{11}$$

pentru nodurile distincte $x_i \in [a, b]$; $i=1, 2, 3, 4$. Fie $L(x_1, x_2, x_3; f|x)$ polinomul de interpolare al funcției $f(x)$ pe nodurile $x_1, x_2, x_3$. Condiția (11) este echivalentă cu următoarea proprietate geometrică: pentru $a \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant b$

$$L(x_1, x_2, x_3; f|x) < f(x), \qquad \text{dacă } x_3 < x \leqslant b. \tag{12}$$

Din (12) rezultă că diferența $L(x_1, x_1, x_3; f|x) - f(x)$ ia în intervalele $(a, x_1)$, $(x_1, x_2)$, $(x_2, x_3)$ și $(x_3, b)$ respectiv semnele $+, -, +, -$ [1]. Dacă $f(x)$ este o funcție derivabilă în $[a, b]$, proprietatea de mai sus subsistă și în cazul cînd două din nodurile $x_1, x_2, x_3$ se confundă, înțelegînd în acest caz prin $L$ polinomul de interpolare al lui Lagrange-Hermite.

TEOREMA 2. *Fie $f(x)$ o funcție convexă de ordinul 2 și odată derivabilă în $[a, b]$ și $a < c < b$, $f(c) < f(a)$, $f(c) < f(b)$. În aceste ipoteze funcția $f(x)$ admite în $[a,b]$ un singur minim de abscisă $x_0$ și $x_0 \geqslant d$, unde numărul $d$ este dat de formula (10). Egalitatea $x_0 = d$ este posibilă numai dacă $d = c$.*

Existența unui minim este evidentă. Să presupunem că avem două minime în $[a, b]$ de abscise $x_0$ și $x_1$, $x_0 < x_1$. $P(x) = L(x_0, x_0, x_1; f|x)$ trebuie să fie în intervalul $(x_0, x_1)$ deasupra curbei $f(x)$, ceea ce este în contradicție cu faptul că $P(x)$ crește în acest interval. Rezultă că avem un singur minim $x_0$ în $[a, b]$.

Pentru a demonstra că $x_0 \geqslant d$, ne folosim de următoarea proprietate elementară a parabolelor $P_1$ și $P_2$, avînd axele paralele cu $Oy$, cu ramurile infinite îndreptate spre $y > 0$ și care se intersectează în două puncte $A(a', a'')$ și $B(b', b'')$: acea parabolă are minimul mai apropiat de punctul de intersecție cu ordonata mai mare, care între $A$ și $B$ se situează sub cealaltă. În fig. 2, $P_1$ se află sub $P_2$ în $(a, b)$ și $a'' > b''$, deci $m_1 < m_2$, unde $m_1$, $m_2$ sînt abscisele minimelor celor două parabole.

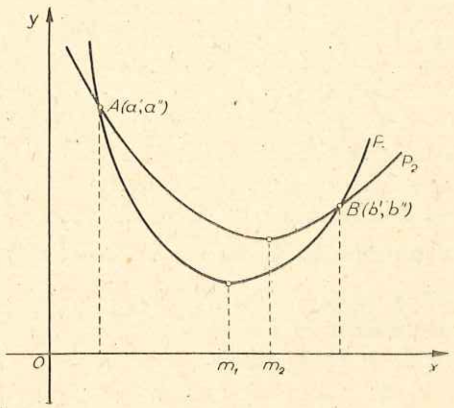


Fig. 2

Să presupunem că punctele $a, b, c, d$ sînt așezate în următoarea ordine : $a < d < c < b$ (fig. 3). Dacă $x_0 \geqq c$, teorema 2 are loc, deci putem presupune că $x_0 < c$. Notăm

$$P_1(x) = L(a, c, b; f \mid x)$$

$$P_2(x) = L(a, x_0, x_0; f \mid x).$$

În intervalul $(x_0, b)$ avem $P_2(x) < f(x)$, deci $P_2(c) < f(c)$. Dar $f(c) = P_1(c)$, așa dar $P_2(c) - P_1(c) < 0$. Pe de altă parte în $(a, c)$, $P_1(x) < f(x)$,

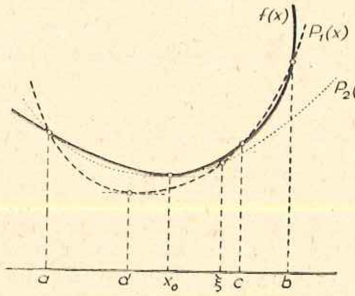

Fig. 3

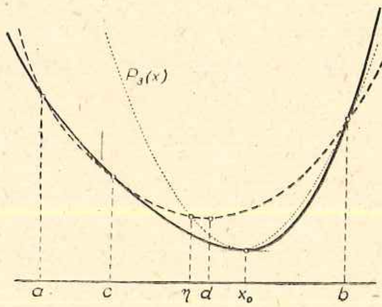

Fig. 4

deci $P_1(x_0) < f(x_0)$ sau $P_2(x_0) - P_1(x_0) > 0$. Rezultă că există un punct $\xi \in (a, c)$ astfel ca $P_1(\xi) = P_2(\xi) < P_1(a) = P_2(a)$. Din proprietatea relativă la cele două parabole rezultă că $d < x_0$.

Să presupunem acum ordinea $a < c < d < b$ (fig. 4). $P_1(x) = L(a, c, b; f|x) > f(x)$ în $(c, b)$, deci $P_1(d) > f(d)$. Dar $P_1(d) = \min\limits_{a \leqq x \leqq b} P_1(x)$, deci $f(d) < P_1(c) = f(c)$, $f(d) < f(b)$, de unde rezultă că $c < x_0 < d$. Notăm

$$P_3(x) = L(x_0, x_0, b; f|x).$$

Avem $P_1(c) = f(c) < P_3(c)$ și $P_1(x_0) > f(x_0) = P_3(x_0)$. Deci există $\eta$ astfel ca $c < \eta < x_0 < b$ și $P_1(\eta) = P_3(\eta) < P_1(b) = P_3(b)$. Rezultă $d < x_0$.

În sfîrșit, dacă $c = d$, ținînd seama că în $(a, c)$ avem $f(x) > L(a, c, b; f|x) > f(c)$, rezultă că în acest caz $x_0$ nu poate fi situat între $a$ și $d$ și cu aceasta teorema 2 este complet demonstrată.

*Observații.* 1°. Avem o teoremă analoagă pentru funcții concave în $[a, b]$, definite prin $[x_1, x_2, x_3, x_4; f] < 0$. Făcînd pentru o funcție concavă $f$ schimbarea de variabilă independentă $x' = \frac{a+b}{2} - x$, funcția $f$ devine convexă și putem aplica teorema 2. Așadar *teorema 2 rămîne valabilă dacă schimbăm în ipoteză „funcția convexă" cu „concavă" și în concluzie relația* $x_0 \geqslant d$ *în* $x_0 \leqslant d$.

2°. Teorema 2 este utilă în calculul numeric deoarece cu ajutorul ei putem stabili de multe ori, în care din cele trei intervale parțiale ale



lui $[a, b]$ se găsește $x_0$ și nu mai este nevoie să continuăm calculul cu reunirea a două intervale parțiale. Această situație se prezintă în următoarele cazuri : 1) ordinea este : $a < c < d < b$ ; atunci $d < x_0 < b$ ; 2) ordinea punctelor este $a < d < c < b$ și $f(d) < f(c)$ ; atunci $d < x_0 < c$.

## ПРИБЛИЖЕННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Дан метод приближенного исчисления экстремумов функции одной вещественной переменной, для случаев когда производная не существует или трудно написать ее эффективно.

Для определенности предполагается, что функция имеет минимум с абсциссой $x_0$ в интервале $I_0 = [a, b]$, является убывающей в $[a, x_0]$ и возрастающей в $[x_0, b]$. Пусть $c, d, \in I_0$, $c < d$. Если $f(c) > f(d)$, имеем $x_0 \in [a, d]$. а если $f(c) \geqslant f(d)$, имеем $x_0 \in [c, b]$ ; обозначаем через $I_0$ интервал $[a, d$ в первом случае, соответственно интервал $[c, b]$, во втором случае. Интервал $I_1$ содержит одну из точек $c, d$ и выбираем еще точку $\xi_1 \in I_1$ ; таким образом $I_1$ разделен на три частичных интервала. Подобным образом находим, что $x_0$ находится в интервале $I_2$, образованном двумя соседными частичными интервалами. Продолжая так, получаем ряд интервалов

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots, \tag{1}$$

которые все содержат точку $x_0$.

Можно легко видеть что точки $\xi_n \in I_n$ могут быть выбраны таким образом, что $I_n \to 0$. Ставится вопрос выбора точек $c, d, \xi_n$ таким образом, что ряд (1) стремился бы как можно быстрее к нулю в следующем смысле: ряд $l_0, l_1, \ldots l_n, \cdots$ длин интервалов называется оптимальным, когда для всякого другого ряда $\lambda_0 = l_0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \cdots$ полученного другим выбором точек $c, d, \xi_n$, можно найти $N_\lambda$ так, чтобы $l_n \leqslant \lambda_n$ для $n < N$. В настоящей работе эта задача решена в предположении, что у каждого шага перехода от интервала к другому, из двух краевых частичных интервалов отлагается в сторону более короткий. Решение задачи дано теоремой:

Теорема 1. *Существует только один оптимальный ряд, который получается если выбираем для c и d точки, разделяющие интервал $I_0$ в среднем и краевом отношении* $((d-a)^2 = (b - a)(b - d),\ c - a = b - d)$ *и для* $\xi_n$ *симметричную по середине интервала* $I_n$ *предшествующей точки деления, лежащей в* $I_{n-1}$.

Описанный способ приближения может быть изменен следующим образом: выбираем $c \in (a, b)$ произвольно, а для $d$ берем абсциссу минимума интерполяционного полинома функции $f(x)$ в узлах $a, b, c$, данных формулой (10) и поступается аналогично в случае последовательных интервалов $I_n$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f(x)$ выпуклая функция 2-ого порядка и дифференцируемая в $[a, b]$ и $a < c < b$, $f(c) < f(a)$, $f(c) < f(b)$. В этих предположениях имеем для абсциссы единственного минимума $x_0$ функции $f(x)$, $x_0 \geqslant d$, где $d$ дан формулой* (10). *Равенство $x_0 = d$ возможно только если $d = c$.*

Существует аналогичный результат для вогнутых функций. Теорема 2 полезна, так как она показывает нам во многих случаях, который из трех частичных интервалов содержает $x_0$ и таким образом нет надобности продолжения исчислений с объединением двух частичных интервалов.

## LE CALCUL APPROXIMATIF DES EXTRÊMES D'UNE FONCTION

### RÉSUMÉ

On donne une méthode de calcul approximatif des extrêmes d'une fonction d'une variable réelle pour les cas où la dérivée n'existe pas ou bien lorsqu'il est difficile de l'écrire effectivement.

On suppose, afin de fixer les idées, que la fonction $f(x)$ a un minimum d'absciss $x_0$ dans l'intervalle $I_0 = [a, b]$, qu'elle est décroissante dans $[a, x_0]$ et croissante dans $[x_0, b]$. Soit $c, d \in I_0$, $c < d$. Si $f(c) < f(d)$, on a $x_0 \in [a, d]$, et si $f(c) \geqslant f(d)$, on a $x_0 \in [c, b]$. Notons par $I_1$ l'intervalle $[a, d]$ dans le premier cas, respectivement l'intervall $[c, b]$ dans le second cas. L'intervalle $I_1$ contient dans son intérieur l'un des points $c$, $d$, et l'on choisit encore un point $\xi_1 \in I_1$; de cette manière $I_1$ est divisé en trois intervalle spartiels. On trouve que $x_0$ est situé dans un intervalle $I_2$, formé de la réunion de deux intervalles partiels voisins. En continuant ce procédé , on obtient une suite d'intervalles

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots, \tag{1}$$

qui contiennent tous le point $x_0$.

On remarque aisément que les points $\xi \in I_n$ peuvent être choisis de telle manière que $I_n \to 0$. Le problème se pose de choisir les points $c$, $d$, $\xi_n$ tels que la suite (1) tende le plus rapidement possible vers zéro dans le sens suivant : la suite $l_0, l_1, \ldots, l_n, \ldots$ de la longueur des intervalles est dit *optimum* si pour toute autre suite $\lambda = l_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ que l'on obtient par un autre choix des points $c$, $d$, $\xi_n$, on peut trouver $N_\lambda$ tel que $l_n \leqslant \lambda_n$ pour $n > N$. Dans le travail ce problème a été résolu dans l'hypothèse qu'à chaque pas de passage d'un intervalle à l'intervalle suivant on écarte le plus court des deux intervalles partiels marginaux. La solution du problème est donnée par le :

THÉORÈME 1. *Il existe une seule suite optimale, que l'on obtient en prenant pour $c$ et $d$ les points qui divisent l'intervalle $I_0$ en moyenne et extrême raison ( $(d-a)^2 = (b-a)(b-d)$, $c-a = b-d$) et pour $\xi_n$ le symétrique par rapport au milieu de $I_n$ du point de division antérieur situé dans $I_n$.*



Le procédé d'approximation décrit peut être modifié de la façon suivante: on choisit $c \in (a, b)$ de manière arbitrare, et pour $d$ on prend l'abscisse du minimum du polynome d'interpolation de la function $f(x)$ sur les noeuds $a$, $b$, $c$, donnée par la formule (10) et on procède de manière analogue avec les intervalles successifs $I_n$.

THÉORÈME 2. *Soit $f(x)$ une fonction convexe de 2-ème ordre et une fois dérivable dans $[a, b]$ et $a < c < b$, $f(c) < f(a)$, $f(c) < f(b)$. Dans ces hypothèses on a pour l'abscisse du seul minimum $x_0$ de la fonction $f(x)$, $x_0 \geqq d$, où $d$ est fourni par la formule* (10). *L'égalité $x_0 = d$ est possible seulement si $d = c$.*

Il existe un résultat analogue pour les fonctions concaves. Le théorème 2 est utile car il indique dans maints cas dans lequel des trois intervalles partiels est situé $x_0$, et, par conséquent, il n'est pas nécessaire de continuer le calcul en réunissant deux intervalles partiels.

### BIBLIOGRAFIE

1. T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles.* Mathematica, VIII, 1—85 (1934).

Primit la 23. I. 1961