O METODĂ DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAȚIEI

$u_{xy} = F(x, y, u, p, q)$

DE

E. SCHECHTER

(Cluj)

1. Diverse probleme de interes practic și teoretic duc la integrarea unei ecuații cu derivate parțiale de forma :

$$u_{xy} = F(x, y, u, p, q), \tag{1}$$

cu diferite condiții suplimentare. Dacă în cazul ecuației liniare există un număr relativ mare de metode de integrare numerică, destul de bine studiate, pentru cazul neliniar studiul integrării numerice a început recent. Amintim în acest sens lucrările [3, 4]. În [4] I. M. Iarîșeva dă o metodă pentru rezolvarea numerică a problemei lui Goursat, relativ la ecuația (1), cînd F nu depinde de p și q, analoagă cunoscutei metode a lui Adams. La fel ca în cazul ecuațiilor diferențiale ordinare, este nevoie și aici de valori de pornire, adică de valori gata calculate pe anumite noduri de integrare. În lucrare nu este indicată însă nici o modalitate de calcul al acestor valori.

Amintim pe de altă parte că R. Courant a arătat că un sistem de ecuații cvasiliniare de ordinul întîi de tip hiperbolic este echivalent cu un sistem de ordinul doi de forma (1), [1]. Cu integrarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul întîi s-au ocupat mai mulți autori. În 1957 Panov [2] a dat metode care ar putea avea o convergență de un ordin superior, fără ca să demonstreze însă acest lucru.

În cele ce urmează vom da o metodă de integrare numerică pentru ecuația (1), avînd ordinul de convergență $O(h^3)$, și în care se cere cunoașterea numai a datelor inițiale. Aceste proprietăți îndreptățesc atît folosirea ei pentru calcularea valorilor de pornire ale altor metode, cum ar fi cea dată de Iarîșeva, cît și aplicarea ei independentă. În plus, ea are avantajul că pasul de integrare nu trebuie menținut constant, ci poate fi adaptat la caracterul problemei studiate.

În prezentul articol ne vom ocupa numai de problema lui Cauchy cu datele inițiale pe dreapta $y = -x$.

2. Să considerăm deci ecuaţia (1) cu condiţiile iniţiale :

$$u(x,-x)=u_0(x),\quad p(x,-x)=p_0(x),\quad q(x-x)=q_0(x). \qquad (2)$$

date pe segmentul AC (fig. 1) şi să presupunem că această problemă are o soluţie unică pe domeniul ABC.

Reţeaua de noduri o construim astfel : împărţim segmentul AB în n părţi egale prin punctele P_{i0} ; iar prin aceste puncte cît şi prin mijloacele segmentelor $P_{i0}P_{i+1,0}$ să ducem paralele la BC. Aceste paralele determină pe ipotenuza AC, $2n+1$ puncte P_{0k}, pe care le numerotăm de la A înspre C. Nodurile de integrare vor fi tocmai punctele de intersecţie ale familiei de verticale prin P_{i0} cu orizontalele prin $P_{0\,2i}(i=0,1,..,n)$, împreună cu punctele de intersecţie ale celorlalte verticale cu orizontalele prin $P_{0\,2i+1}$ $(i=0,1,\ldots,n-1.)$. Observăm că aceste noduri sînt situate pe paralele la AC prin punctele de diviziune ale catetei AB. Notînd deci coordonatele unui nod oarecare P_{ik} cu (x_{ik}, y_{ik}), putem scrie relaţia :

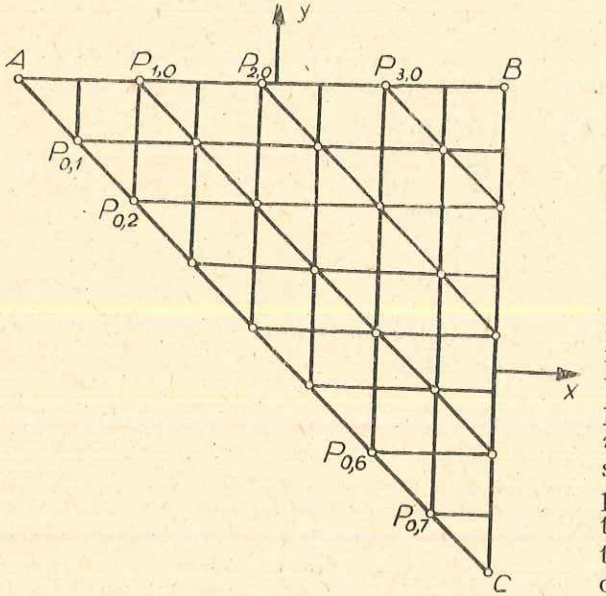

Fig. 1

$$x_{ik}+y_{ik}=ih \qquad (h=x_{i+1,0}-x_{i0}).$$

Dacă în ecuaţia cu derivate parţiale facem schimbarea :

$$\bar u(x,y)=u(x,y)-g^0(x,y), \qquad (3)$$

unde :

$$g^0(x,y)=u_0(x)+(x+y)\,q_0(x)$$

condiţiile (2) devin omogene, iar ecuaţia cu derivate parţiale îşi păstrează forma :

$$\bar u_{xy}=u_{xy}-\overset{0}{g}_{xy}=F(x,y,\bar u+g^0,\bar p+\overset{0}{g}_x,\bar q+\overset{0}{g}_y)-\overset{0}{g}_{xy},$$

sau

$$\bar u_{xy}=F_0(x,y,\bar u,\bar p,\bar q).$$

În general, putem calcula valorile soluţiei ecuaţiei (1) pe triunghiul situat la dreapta lui $x+y=ih$, luînd ca şi valori iniţiale valorile lui u, p şi q de pe această dreaptă :

$$u(x,ih-x)=u_i(x)\,;\quad p(x,ih-x)=p_i(x)\,;\quad q(x,ih-x)=q_i(x). \qquad (4)$$

Făcînd acum transformarea :

$$\bar u(x,y)=u(x,y)-g^i(x,y)$$

în care :

$$g^i(x,y)=u_i(x)+(x+y-ih)\,q_i(x)$$

vom ajunge din nou la condiţii iniţiale omogene şi la o ecuaţie de forma :

$$u_{xy}=F_i(x,\bar y,\bar u,\bar p,\bar q). \qquad (5)$$

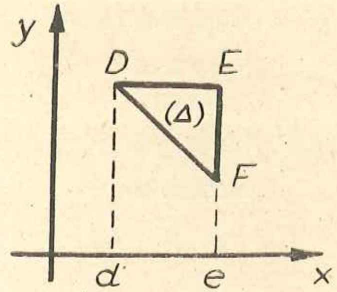

Fig. 2

Să considerăm triunghiul Δ (fig. 2) cu ipotenuza pe dreapta $y=ih-x$. Integrînd ambii membri ai ecuaţiei (5) pe Δ şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale nule, găsim :

$$u(F)=u(e,ih-d)=\iint_{\Delta}F_i(x,y,\bar u,\bar p,\bar q)\,dxdy+g^i(e,ih-d)=$$

$$=g^i(e,ih-d)+\iint_{\Delta}\Phi(x,y)dxdy+\iint_{\Delta}q_i'(x)dxdy, \qquad (6)$$

şi integrînd o singură dată :

$$p(e,ih-d)=p_i(e)+\int_{ih-e}^{ih-d}\Phi(e,y)dy \qquad (7)$$

$$q(e,ih-d)=q_i(d)+\int_{d}^{l}\Phi(x,ih-d)dx, \qquad (8)$$

în care am notat :

$$\Phi(x,y)=F(x,y,u(x,y),p(x,y),q(x,y)).$$

Această funcţie o vom considera de suficient de ori derivabilă, în cele ce urmează.

3. Vom da acum o metodă de integrare numerică de tip ,,pas cu pas", adică în care valorile lui u, p, q de pe un nod al liniei $i+1$ se calculează numai cu ajutorul valorilor găsite deja de pe linia precedentă. Avem :

$$u(P_{i+1,k-1})=S_{ik}+\frac{h^2}{2}\,[\Phi(x_{ik+1},y_{ik+1})+2\Phi(x_{ik},y_{ik})+$$

$$+2F(x_{ik},y_{ik-1},L_{ik},M_{ik},N_{ik})+F(x_{ik+1},y_{ik-1},L^1_{ik},M^1_{ik},N^1_{ik})]+R \qquad (9)$$

$$p(P_{i+1,\,k-1}) = p_i(x_{ik+1}) + \frac{h}{6}\,[\Phi(x_{ik+1}, y_{ik+1}) + 4\,F(x_{ik+1}, y_{ik}, L_{ik}^2, M_{ik}^2, N_{ik}^2) +$$

$$+ F(x_{ik+1}, y_{ik-1}, L_{ik}^1, M_{ik}^1, N_{ik}^1)] + R_1 \tag{10}$$

$$q(P_{i+1,\,k-1}) = q_i(x_{ik-1}) + \frac{h}{6}\,[\Phi(x_{ik-1}, y_{ik-1}) + 4F(x_{ik}, y_{ik-1}, L_{ik}, M_{ik}, N_{ik}) +$$

$$+ F(x_{ik+1}, y_{ik-1}, L_{ik}^1, M_{ik}^1, N_{ik}^1)] + R_2, \tag{11}$$

unde R, R_1, R_2 sînt mărimi de ordinul lui $O(h^4)$.

În formulele de mai sus am notat:

$$S_{ik} = g^i(x_{ik+1}, y_{ik-1}) + \frac{h}{6}\,[5q_i(x_{ik+1}) - 4q_i(x_{ik}) - q_i(x_{ik-1})]$$

$$L_{ik} = g^i(x_{ik}, y_{ik-1}) + \frac{h}{4}\,[q_i(x_{ik}) - q_i(x_{ik-1})] + \frac{h^2}{8}\,\Phi(x_{ik}, y_{ik})$$

$$M_{ik} = p_i(x_{ik}) + \frac{h}{4}\,[\Phi(x_{ik}, y_{ik}) + F(x_{ik}, y_{ik-1}, L_{ik}, M'_{ik}, N'_{ik})]$$

$$N_{ik} = q_i(x_{ik-1}) + \frac{h}{4}\,[\Phi(x_{ik-1}, y_{ik-1}) + F(x_{ik}, y_{ik-1}, L_{ik}, M'_{ik}, N'_{ik})].$$

$$L_{ik}^1 = g^i(x_{ik+1}, y_{ik-1}) + \frac{h}{2}\,[q_i(x_{ik+1}) - q_i(x_{ik-1})] + \frac{h^2}{2}\,\Phi(x_{ik+1}, y_{ik+1})$$

$$M_{ik}^1 = p_i(x_{ik+1}) + \frac{h}{2}\,[\Phi(x_{ik+1}, y_{ik+1}) + F(x_{ik+1}, y_{ik-1}, L_{ik}^1, M_{ik}^{11}, N_{ik}^{11})]$$

$$N_{ik}^1 = q_i(x_{ik-1}) + \frac{h}{2}\,[\Phi(x_{ik-1}, y_{ik-1}) + F(x_{ik+1}, y_{ik-1}, L_{ik}^1, M_{ik}^{11}, N_{ik}^{11})].$$

$$L_{ik}^2 = g^i(x_{ik+1}, y_{ik}) + \frac{h}{4}\,[q_i(x_{ik+1}) - q_i(x_{ik})] + \frac{h^2}{8}\,\Phi(x_{ik}, y_{ik})$$

$$M_{ik}^2 = p_i(x_{ik+1}) + \frac{h}{4}\,[\Phi(x_{ik+1}, y_{ik+1}) + F(x_{ik+1}, y_{ik}, L_{ik}^2, M_{ik}^{21}, N_{ik}^{21})]$$

$$N_{ik}^2 = q_i(x_{ik}) + \frac{h}{4}\,[\Phi(x_{ik}, y_{ik}) + F(x_{ik+1}, y_{ik}, L_{ik}^2, M_{ik}^{21}, N_{ik}^{21})]$$

$$M'_{ik} = p_i(x_{ik}) + \frac{h}{2}\,\Phi(x_{ik}\, y_{ik}); \qquad N'_{ik} = q_i(x_{ik-1}) + \frac{h}{2}\,\Phi\,(x_{ik-1}, y_{ik-1})$$

$$M_{ik}^{11} = p_i(x_{ik+1}) + h\,\Phi\,(x_{ik+1}, y_{ik+1}); \quad N_{ik}^{11} = q_i(x_{ik-1}) + h\Phi\,(x_{ik-1}, y_{ik-1})$$

$$M_{ik}^{21} = p_i(x_{ik+1}) + \frac{h}{2}\,\Phi\,(x_{ik+1}, y_{ik+1}); \quad N_{ik}^{21} = q_i(x_{ik}) + \frac{h}{2}\,\Phi(x_{ik}, y_{ik}).$$

Să demonstrăm acum valabilitatea formulelor (9), (10), (11). Din (6) rezultă că:

$$u(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = g^i(x_{ik+1}, y_{ik-1}) + \int_{x_{ik-1}}^{x_{ik+1}} dx \int_{ih-x}^{y_{ik-1}} \Phi\,(x, y)dy +$$

$$+ \int_{x_{ik+1}}^{y_{ik-1}} [q_i(x_{ik+1}) - q_i(ih - y)]dy. \tag{12}$$

Folosind formula lui Simpson, putem scrie pentru prima integrală din (12):

$$\int_{x_{ik-1}}^{y_{ik+1}} \varphi(x)\, dx = \frac{h}{6}\,[\varphi(x_{ik-1}) + 4\varphi\,(x_{ik}) + \varphi(x_{ik+1})] + Ch^5,$$

unde:

$$\varphi(x_{ik-1}) = 0; \quad \varphi(x_{ik}) = \int_{y_{ik}}^{y_{ik-1}} \Phi(x_{ik}, y)\, dy \ \text{ și } \ \varphi(x_{ik+1}) = \int_{y_{ik+1}}^{y_{ik-1}} \Phi\,(x_{ik+1}, y)\, dy.$$

Ultimele două valori se calculează cu ajutorul formulei trapezului:

$$\varphi(x_{ik}) = \frac{h}{4}\,[\Phi\,(x_{ik}, y_{ik}) + \Phi\,(x_{ik}, y_{ik-1})] + Ch^3$$

$$\varphi(x_{ik+1}) = \frac{h}{2}\,[\Phi\,(x_{ik+1}, y_{ik+1}) + \Phi\,(x_{ik+1}, y_{ik-1})] + Ch^3.$$

A doua integrală din (12) se poate calcula tot cu ajutorul formulei lui Simpson, și este egală cu:

$$hq_i(x_{ik+1}) - \frac{h}{6}\,[q_i(x_{ik+1}) + 4q_i(x_{ik}) + q(x_{ik-1})] + Ch^5$$

deci,

$$u(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = g^i(x_{ik+1}, y_{ik-1}) + \frac{h}{6}\,[5q_i(x_{ik+1}) - 4q_i(x_{ik}) - q_i(x_{ik-1})] +$$

$$+ \frac{h^2}{12}[\Phi(x_{ik+1}, y_{ik-1}) + 2\Phi(x_{ik}, y_{ik}) + 2\Phi(x_{ik}, y_{ik-1}) + \Phi(x_{ik+1}, y_{ik+1})] + Ch^4. \tag{13}$$

Trecem la calculul lui p și q aplicînd integralelor din (7), (8) formula lui Simpson; obținem:

$$p(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = p_i(x_{ik+1}) + \frac{h}{6}\,[\Phi\,(x_{ik+1}, y_{ik+1}) + 4\Phi\,(x_{ik+1}, y_{ik}) +$$

$$+ \Phi\,(x_{ik+1}, y_{ik-1})] + Ch^5, \tag{14}$$

$$q(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = q_i(x_{ik-1}) + \frac{h}{6}\,[\Phi\,(x_{ik+1}, y_{ik-1}) + 4\Phi\,(x_{ik}, y_{ik-1}) +$$

$$+ \Phi\,(x_{ik-1}, y_{ik-1})] + Ch^5. \tag{15}$$

În formulele (13), (14), (15) nu cunoaștem valorile lui Φ pe punctele (x_{ik+1}, y_{ik-1}), (x_{ik}, y_{ik-1}) și (x_{ik+1}, y_{ik}). Pentru a avea rezultatul final dorit este suficient să calculăm aceste valori cu o precizie de ordinul $O(h^3)$.

Să începem cu punctul (x_{ik+1}, y_{ik-1}). Valoarea lui u pe acest punct, o vom calcula tot cu ajutorul lui (12), folosind însă în loc de formula lui Simpson, formula trapezului :

$$\iint\limits_{\triangle} \Phi(x, y)\, dx\, dy = \frac{h}{2} \varphi(x_{ik+1}) + Ch^3; \ (\varphi(x_{ik-1}) = 0).$$

Pentru valoarea lui φ din membrul al doilea avem, conform formulei dreptunghiului :

$$\varphi(x_{ik+1}) = h\Phi(x_{ik+1}, y_{ik+1}) + Ch^2.$$

La fel pentru cealaltă integrală dublă :

$$\iint\limits_{\triangle} q_i'(x)\, dx\, dy = \frac{h}{2} q_i(x_{ik+1}) - q_i(x_{ik-1})] + Ch^3.$$

În definitiv, deci :

$$u(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = L_{ik}^1 + r; \qquad |r| \leqslant Ch^2.$$

Pentru calculul lui p și q pe același punct plecăm de la (7) și (8), făcînd uz tot de formula trapezului. Obținem :

$$p(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = p_i(x_{ik+1}) + \frac{h}{2} [\Phi(x_{ik+1}, y_{ik+1}) + \Phi(x_{ik+1}, y_{ik-1})] + Ch^3$$

$$q(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = q_i(x_{ik-1}) + \frac{h}{2} [\Phi(x_{i+1}, y_{ik-1}) + \Phi(x_{ik-1}, y_{ik-1})] + Ch^3.$$

Iarăși intervine valoarea lui Φ pe punctul (x_{ik+1}, y_{ik-1}), de astă dată însă ea trebuie calculată cu o eroare de ordinul lui h^2. Valoarea lui u o avem deja. Pentru a găsi p și q, vom proceda la fel ca și înainte, numai că în loc de formula trapezului vom folosi pe cea a dreptunghiului ; ajungem astfel la rezultatul următor :

$$p(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = M_{ik}^{11} + Ch^2; \ q(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = N_{ik}^{11} + Ch^2.$$

Ținînd seama de condiția lui Lipschitz și de aceste egalități, obținem din egalitățile precedente ;

$$p(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = M_{ik}^1 + Ch^3; \ q(x_{ik+1}, y_{ik-1}) = N_{ik}^1 + Ch^3.$$

Să trecem la punctul (x_{ik+1}, y_{ik}). Tot în baza lui (6), (7), (8) :

$$u(x_{ik+1}, y_{ik}) = g^i(x_{ik+1}, y_{ik}) + \int_{y_{ik+1}}^{y_{ik}} \varphi(y)\, dy + \int_{y_{ik+1}}^{y_{ik}} [q_i(x_{ik+1}) - q_i(ih - y)]\, dy \quad (15')$$

$$p(x_{ik+1}, y_{ik}) = p_i(x_{ik+1}) + \int_{y_{ik+1}}^{y_{ik}} \Phi(x_{ik+1}, y)\, dy \qquad (16)$$

$$q(x_{ik+1}, y_{ik}) = q_i(x_{ik}) + \int_{x_{ik}}^{x_{ik+1}} \Phi(x, y_{ik})\, dx. \qquad (17)$$

Pentru prima integrală din (15') avem :

$$\int_{y_{ik+1}}^{y_{ik}} \varphi(y)\, dy = \frac{h}{4} [\varphi(y_{ik}) + \varphi(y_{ik+1})] = \frac{h}{4} \varphi(y_{ik}) + Ch^3$$

$$\frac{h}{4} \varphi(y_{ik}) = \frac{h}{4} \int_{x_{ik}}^{x_{ik+1}} \Phi(x, y_{ik})\, dx = \frac{h^2}{8} \Phi(x_{ik}, y_{ik}) + Ch^3;$$

și la fel pentru cealaltă integrală :

$$Ch^3 + \frac{h}{2} q_i(x_{ik+1}) - \frac{h}{4} [q_i(x_{ik}) + q_i(x_{ik+1})] = \frac{h}{4} [q_i(x_{ik+1}) - q_i(x_{ik})] + Ch^3$$

deci :

$$u(x_{ik+1}, y_{ik}) = L_{ik}^2 + r, \qquad |r| < Ch^3.$$

Dacă aplicăm formula trapezului relațiilor (16) și (17), primim :

$$p(x_{ik+1}, y_{ik}) = p_i(x_{ik+1}) + \frac{h}{4} [\Phi(x_{ik+1}, y_{ik+1}) + \Phi(x_{ik+1}, y_{ik})] + Ch^3$$

$$q(x_{ik+1}, y_{ik}) = q_i(x_{ik}) + \frac{h}{4} [\Phi(x_{ik}, y_{ik}) + \Phi(x_{ik+1}, y_{ik})] + Ch^3.$$

Pentru a avea valoarea lui Φ din cel de al doilea termen din paranteză, trebuie calculat u, p și q cu o precizie de ordinul $O(h^2)$ pe același punct. Valoarea lui u ne este dată deja de L_{ik}^2 și prin urmare nu trebuie să calculăm decît valorile lui p și q. Acestea se găsesc din (16) și (17) calculînd integralele ce figurează acolo cu ajutorul formulei dreptunghiului ; găsim în acest caz :

$$p(x_{ik+1}, y_{ik}) = M_{ik}^{21} + Ch^2; \qquad q(x_{ik+1}, y_{ik}) = N_{ik}^{21} + Ch^2.$$

De aici cu ajutorul condiției lui Lipschitz, obținem tocmai :

$$p(x_{ik+1}, y_{ik}) = M_{ik}^2 + Ch^3; \qquad q(x_{ik+1}, y_{ik}) = N_{ik}^2 + Ch^3.$$

În fine, să considerăm al treilea punct (x_{ik}, y_{ik-1}). Pe acesta :

$$u(x_{ik}, y_{ik-1}) = g^i(x_{ik}, y_{ik-1}) + \int_{y_{ik}}^{y_{ik-1}} [q_i(x_{ik}) - q_i(ih - y)]\, dy + \int_{x_{ik-1}}^{x_{ik}} \varphi(x) dx$$

$$\left(\varphi(x) = \int_{ik-x}^{y_{ik-1}} \Phi(x,\ y) dx\right).$$

Dacă aplicăm formula trapezului, avem pentru prima integrală :

$$\frac{h}{4}[q_i(x_{ik}) - q_i(x_{ik-1})] + Ch^3$$

iar pentru cealaltă :

$$\frac{h^2}{8}\Phi(x_{ik}\ y_{ik}) + r, \qquad |r| \leqslant Ch^3.$$

Deci :

$$u(x_{ik}, y_{ik-1}) = L_{ik} + r, \qquad |r| \leqslant Ch^3.$$

La fel obținem :

$$p(x_{ik}, y_{ik-1}) = p_i(x_{ik}) + \int_{y_{ik}}^{y_{ik-1}} \Phi(x_{ik}, y) dy =$$

$$= p_i(x_{ik}) + \frac{h}{4}[\Phi(x_{ik}, y_{ik}) + \Phi(x_{ik}, y_{ik-1})] + Ch^3$$

$$q(x_{ik}, y_{ik-1}) = q_i(x_{ik-1}) + \int_{x_{ik-1}}^{x_{ik}} \Phi(x, y_{ik-1}) dx =$$

$$= q_i(x_{ik-1}) + \frac{h}{4}[\Phi(x_{ik-1}, y_{ik-1}) + \Phi(x_{ik}, y_{ik-1})] + Ch^3.$$

Procedînd la fel ca și pentru celelalte două puncte, primim :

$$p(x_{ik}, y_{ik-1}) = M'_{ik} + Ch^2; \qquad q(x_{ik}, y_{ik-1}) = N'_{ik} + Ch^2$$

și apoi în baza condiției lui Lipschitz :

$$p(x_{ik}, y_{ik-1}) = M_{ik} + r; \qquad q(x_{ik}, y_{ik-1}) = N_{ik} + r \qquad (|r| \leqslant Ch^3).$$

Din rezultatele de mai sus și din condiția lui Lipschitz rezultă egalitățile de demonstrat.

4. Formulele (9), (10), (11), date în paragraful precedent presupun cunoscute valorile exacte ale funcțiilor u, p, q de pe linia i. În practică acest lucru are loc cel mult pentru segmentul inițial AC ; valorile de pe

linia $i + 1$ se calculează de fapt cu valorile aproximative u_{ik}, p_{ik}, q_{ik}, de pe linia i. Aceste valori aproximative le vom calcula cu ajutorul următoarelor formule (corespunzătoare lui (9), (10), (11)) :

$$u_{i+1,\, k-1} = s_{ik} + \frac{h^2}{12}[\Phi_{ik+1} + 2\Phi_{ik} + 2F(x_{ik}, y_{ik-1}, l_{ik}, m_{ik}, n_{ik}) +$$
$$+ F(x_{ik+1}, y_{ik-1}, l^1_{ik}, m^1_{ik}, n^1_{ik})] \tag{18}$$

$$p_{i+1,\, k-1} = p_{ik+1} + \frac{h}{6}[\Phi_{ik+1} + 4F(x_{ik+1}, y_{ik}, l^2_{ik}, m^2_{ik}, n^2_{ik}) +$$
$$+ F(x_{ik+1}, y_{ik-1}, l^1_{ik}, m^1_{ik}, n^1_{ik})] \tag{19}$$

$$q_{i+1,\, i-1} = q_{ik-1} + \frac{h}{6}[\Phi_{ik-1} + 4F(x_{ik}, y_{ik-1}, l_{ik}, m_{ik}, n_{ik}) +$$
$$+ F(x_{ik+1}, y_{ik-1}, l^1_{ik}, m^1_{ik}, n^1_{ik})]. \tag{20}$$

În aceste formule :

$$s_{ik} = G^i(x_{ik+1}, y_{ik-1}) + \frac{h}{6}[5q_{ik+1} - 4q_{ik} - q_{ik-1}].$$

$$l_{ik} = G^i(x_{ik}, y_{ik-1}) + \frac{h}{4}[q_{ik} - q_{ik-1}] + \frac{h^2}{8}\Phi_{ik}$$

$$m_{ik} = p_{ik} + \frac{h}{4}[\Phi_{ik} + F(x_{ik}, y_{ik-1}, l_{ik}, m'_{ik}, n'_{ik})]$$

$$n_{ik} = q_{ik-1} + \frac{h}{4}[\Phi_{ik-1} + F(x_{ik}, y_{ik-1}, l_{ik}, m'_{ik}, n'_{ik})]$$

$$l^1_{ik} = G^i(x_{ik+1}, y_{ik-1}) + \frac{h}{2}[q_{ik+1} - q_{ik-1}] + \frac{h^2}{2}\Phi_{ik+1}$$

$$m^1_{ik} = p_{ik+1} + \frac{h}{2}[\Phi_{ik+1} + F(x_{ik+1}, y_{ik-1}, l^1_{ik}, m^{11}_{ik}, n^{11}_{ik})]$$

$$n^1_{ik} = q_{ik-1} + \frac{h}{2}[\Phi_{ik-1} + F(x_{ik+1}, y_{ik-1}, l^1_{ik}, m^{11}_{ik}, n^{11}_{ik})].$$

$$l^2_{ik} = G^i(x_{ik+1}, y_{ik}) + \frac{h}{2}[q_{ik+1} - q_{ik}] + \frac{h^2}{8}\Phi_{ik}$$

$$m^2_{ik} = p_{ik+1} + \frac{h}{4}[\Phi_{ik+1} + F(x_{ik+1}, y_{ik}, l^2_{ik}, m^{21}_{ik}, n^{21}_{ik})]$$

$$n^2_{ik} = q_{ik} + \frac{h}{4}[\Phi_{ik} + F(x_{ik+1}, y_{ik}, l^2_{ik}, m^{21}_{ik}, n^{21}_{ik})].$$

$$m'_{ik} = p_{ik} + \frac{h}{2}\Phi_{ik}; \qquad n'_{ik} = q_{ik-1} + \frac{h}{2}\Phi_{ik-1}$$

$$m^{11}_{ik} = p_{ik+1} + h\Phi_{ik+1}; \qquad n^{11}_{ik} = q_{ik-1} + h\Phi_{ik-1}$$

$$n^{21}_{ik} = p_{ik+1} + \frac{h}{2}\Phi_{ik+1}; \qquad n^{21}_{ik} = q_{ik} + \frac{h}{2}\Phi_{ik}$$

iar

$$\Phi_{ik} = F(x_{ik}, y_{ik}, u_{ik}, p_{ik}, q_{ik}) \text{ și } G^i(x_{ij}, y_{il}) = u_{ij} + (y_{il} - y_{ij})q_{ij}.$$

În cele ce urmează vom arăta că atunci cînd $h \to 0$, valorile aproximative u_{ik}, p_{ik}, q_{ik}, calculate prin intermediul lui (18), (19), (20), tind către valorile exacte $u(x_{ik}, y_{ik})$, $p(x_{ik}, y_{ik})$, $q(x_{ik}, y_{ik})$, convergența avînd ordinul $O(h^3)$. Acest lucru va rezulta din considerațiile pe care le vom face asupra ecuațiilor cu diferențe la care satisfac erorile comise. Să punem :

$$\varepsilon_{ik} = |u_i(x_{ik}) - u_{ik}|, \qquad \delta_{ik} = |p_i(x_{ik}) - p_{ik}|, \qquad \eta_{ik} = |q_i(x_{ik}) - q_{ik}|$$

$$\varepsilon_i = \max_k \varepsilon_{ik} \qquad \delta_i = \max_k \delta_{ik} \qquad \eta_i = \max_k \eta_{ik}$$

Scăzînd membru cu membru egalitățile (9), (10), (11), din egalitățile corespunzătoare (18), (19), (20), obținem delimitînd diferențele în valoare absolută cu ajutorul condiției lui lui Lipschitz :

$$\varepsilon_{i+1, k-1} \leqslant \varepsilon_{ik+1} + \frac{h}{6}\eta_{ik-1} + \frac{2h}{3}\eta_{ik} + \frac{11h}{6}\eta_{ik+1} + \frac{Kh^2}{12}[\varepsilon_{ik+1} + \delta_{ik+1} + \eta_{ik+1} +$$
$$+ 2\varepsilon_{ik} + 2\delta_{ik} + 2\eta_{ik} + 2|L_{ik} - l_{ik}| + 2|M_{ik} - m_{ik}| + 2|N_{ik} - n_{ik}| +$$
$$+ |L^1_{ik} - l^1_{ik}| + |M^1_{ik} - m^1_{ik}| + |N^1_{ik} - n^1_{ik}|] + Ch^4,$$

$$\delta_{i+1, k-1} \leqslant \delta_{ik+1} + \frac{Kh}{6}[\varepsilon_{ik+1} + \delta_{ik+1} + \eta_{ik+1} + 4|L^2_{ik} - l^2_{ik}| + 4|M^2_{ik} - m^2_{ik}| +$$
$$+ 4|N^2_{ik} - n^2_{ik}| + |L^1_{ik} - l^1_{ik}| + |M^1_{ik} - m^1_{ik}| + |N^1_{ik} - n^1_{ik}|] + Ch^4$$

$$\eta_{i+1, k-1} \leqslant \eta_{ik-1} + \frac{Kh}{6}[\varepsilon_{ik-1} + \delta_{ik-1} + \eta_{ik-1} + 4|L_{ik} - l_{ik}| + 4|M_{ik} - m_{ik}| +$$
$$+ 4|N_{ik} - n_{ik}| + |L^1_{ik} - l^1_{ik}| + |M^1_{ik} - m^1_{ik}| + |N^1_{ik} - n^1_{ik}|] + Ch^4.$$

unde K este constanta lui Lipschitz relativ la ansamblul variabilelor u, p, q. Continuînd delimitările valorilor absolute rămase în aceste inegalități în același mod, ajungem la relațiile :

$$\varepsilon_{i+1, k-1} \leqslant \frac{K^2}{24}[2 + 3Kh]h^3\varepsilon_{ik-1} + \frac{K}{96}[32 + K(12 + 2h + K(4 + h)h)h]h^2\varepsilon_{ik} +$$
$$+ \frac{1}{24}[24 + K(4 + K(3 + h)h)h)h^2]\varepsilon_{ik+1} + \frac{K^2}{48}[3 + 5Kh]h^3\delta_{ik-1} +$$
$$+ \frac{K}{92}[32 + K(24 + 2h + K(4 + h)h)h]h^2\delta_{ik} +$$
$$+ \frac{K}{24}[4 + K(3 + h + K(2 + h)h)h]h^2\varepsilon_{ik+1} +$$
$$+ \frac{1}{96}[16 + K(16 + 6h + K(10 + 5(1 + 2K)h)h)h]h\eta_{ik-1} +$$
$$+ \frac{1}{96}[64 + K(38 + K(4 + (8 + K + Kh)h)h]h\eta_{ik} +$$
$$+ \frac{1}{24}[44 + K(2 + 3h + K(1 + (2 + 2K + Kh)h)h)h]h\eta_{ik+1} + Ch^4. \qquad (21)$$

$$\delta_{i+1, k-1} \leqslant \frac{K^2}{12}[1 + 2Kh]h^2\varepsilon_{ik-1} + \frac{K^2}{24}[4 + 2h + K(4 + K(4 + h)h)h)h]h^2\varepsilon_{ik} +$$
$$+ \frac{K}{12}[12 + K(9 + K(5 + h)h)h]h\varepsilon_{ik+1} + \frac{K^2}{12}[1 + 2Kh]h^2\delta_{ik-1} +$$
$$+ \frac{K^2}{24}[4 + K(6 + h)h]h^2\delta_{ik} + \frac{1}{12}[12 + K(12 + K(9 + h + K(4 + h)h)h)h]\delta_{ik+1} +$$
$$+ \frac{K}{12}[2 + h + K(1 + (1 + 2K)h)h]h\eta_{ik-1} +$$
$$+ \frac{K}{24}[16 + 4h + K(12 + (4 + 4K + Kh)h)h]h\eta_{ik} +$$
$$+ \frac{K}{12}[2 + (10 + K(3 + (5 + 4K + Kh)h)h)]h\eta_{ik+1} + Ch^4. \qquad (22)$$

$$\eta_{i+1, k-1} \leqslant \frac{K}{12}[2 + K(3 + 4Kh)h)h\varepsilon_{ik-1} + \frac{K}{24}[16 + K(12 + 2h + K(4 + h)h)h]h\varepsilon_{ik} +$$
$$+ \frac{K}{12}[2 + K(3 + K(3 + h)h)h]h\varepsilon_{ik+1} + \frac{K}{12}[2 + K(3 + 4Kh)h]h\delta_{ik-1} +$$
$$+ \frac{K}{24}[16 + K(24 + 2h + K(4 + h)h)h]h\delta_{ik} +$$
$$+ \frac{K}{12}[2 + K(3 + h + K(2 + h)h)h]h\delta_{ik+1} +$$
$$+ \frac{1}{12}[12 + K(12 + h + (2 + K(7 + 2(1 + 2K)h))h)h]\eta_{ik-1} +$$
$$+ \frac{K}{24}[12 + K(4 + 8 + K + Kh)h]h^2\eta_{ik} +$$
$$+ \frac{K}{12}[3 + K(1 + (2 + 2K + Kh)h)h)]h^2\eta_{ik+1} + Ch^4. \qquad (23)$$

Aceste inegalități constituie o evaluare recurentă a erorilor, ținînd seama de condițiile inițiale :

$$\varepsilon_{0k} = \delta_{0k} = \eta_{0k} = 0. \qquad (24)$$

Se poate da și o evaluare directă a erorilor rezolvînd sistemul de mai sus cu condițiile (24). Pentru scopul nostru este suficent să considerăm o astfel de evaluare pentru ε_i, δ_i, η_i care conform (21), (23), (23), satisfac inegalități de forma :

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant (1 + h^2\alpha_1)\varepsilon_i + h^2\alpha_2\delta_i + h\alpha_3\eta_i + Ch^4$$
$$\delta_{i+1} \leqslant h\beta_1\varepsilon_i + (1 + h\beta_2)\delta_i + h\beta_3\eta_i + Ch^4 \qquad (25)$$
$$\eta_{i+1} \leqslant h\gamma_1\varepsilon_i + h\gamma_2\delta_i + (1 + h\gamma_3)\eta_i + Ch^4.$$

Dacă în aceste egalităţi în locul semnului $\leqslant$ punem semnul = găsim nişte margini superioare E_i, D_i, H_i pentru ε_i, δ_i, η_i care satisfac sistemul de ecuaţii :

$$X_{i+1} = AX_i + Bh^4$$

unde :

$$X_i = \begin{pmatrix} E_i \\ D_i \\ H_i \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 + h^2\alpha_1 & h^2\alpha_2 & h\alpha_3 \\ h\beta_1 & 1 + h\beta_2 & h\beta_3 \\ h\gamma_1 & h\gamma_2 & 1 + h\gamma_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \end{pmatrix}$$

Evaluarea directă se obţine atunci folosind inegalitatea [5] :

$$\| MN \| \leqslant \| M \| \, \| N \|,$$

unde M este o matrice pătratică iar N o matrice coloană de acelaşi ordin, normele definidu-se astfel :

$$M = \max_i \sum_{k=1}^{n} | a_{ik} | ; \qquad N = \max_i | a_i |.$$

Prin urmare :

$$\| X_{i+1} \| \leqslant \| A \| \, \| X_i \| + Ch^4 = \frac{\|A\|^{i+1} - 1}{\|A\| - 1} Ch^4$$

deoarece X^0 este matricea coloană nulă. De aici rezultă direct că :

$$\varepsilon_i = O(h^3) ; \quad \delta_i = O(h^3) ; \quad \eta_i = O(h^3)$$

ceea ce era de demonstrat.

5. Putem considera şi problema integrării numerice a unui sistem de ecuaţii de forma :

$$u_{xy}^{(\nu)} = F(x, y, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(N)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(N)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(N)})$$

cu condiţiile iniţiale :

$$u^{(\nu)}(x, -x) = u_0^{(\nu)}(x)$$

$$p^{(\nu)}(x, -x) = p_0^{(\nu)}(x) \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

$$q^{(\nu)}(x, -x) = p_0^{(\nu)}(x).$$

Formulele (16), (17), (18), rămîn valabile, numai că pentru fiecare indice avem un triplet corespunzător de formule. Calculul se face tot pas cu pas avînd însă grije ca pe fiecare nod de integrare să aflăm toate valorile $u^{(\nu)}$, $p^{(\nu)}$, $q^{(\nu)}$ trecînd apoi la nodul următor. Avem aici :

$$\Phi^{(\nu)}(x, y) = F(x, y, u^{(1)}(x, y), \ldots, u^{(N)}(x, y), p^{(1)}(x, y), \ldots, q^{(N)}(x, y))$$

şi

$$\Phi_{ik}^{(\nu)} = F(x_{ik}, y_{ik}, u_{ik}^{(1)}, \ldots, u_{ik}^{(N)}, p_{ik}^{(1)}, \ldots, q_{ik}^{(N)}),$$

u_{ik}, p_{ik}, q_{ik} fiind valorile aproximative de pe P_{ik}.

Deducerea formulelor de recurenţă pentru erori, precum şi găsirea ordinului de convergenţă (acelaşi ca şi în cazul $N=1$) nu prezintă dificultăţi esenţiale.

În încheiere să facem cîteva observaţii cu privire la calculul efectiv şi să presupunem că avem deja calculate valorile de pe linia i. Schema după care se calculează valorile de pe linia următoare $i+1$, este dată în tabela de mai jos. În aceasta tabelă sînt trecute (în afară de ultima coloană) valorile care figurează în (18), (19), (20), necesare calculului lui $u_{i+1, k-1}$, $p_{i+1, k-1}$, $q_{i+1, k-1}$. Valorile Φ_{ik-1} şi Φ_{ik} s-au calculat anterior ; pentru $k=0$ se va calcula atît Φ_{i0} cît şi Φ_{il}. Pentru fiecare valoare k coloanele se calculează succesiv de la stînga la dreapta cu ajutorul formulelor date în § 4. După ce ajungem la indicele $2(n-i)+1$ reîncepem calculul pentru aflarea valorilor de pe linia $i+2$.

…	…	… …	…	…	…	…	…	…
…	u_{ik}	$G^i(x_{ik+1}, y_{ik-1})$	m'_{ik}	l_{ik}	m_{ik}	K_{ik}	$u_{i+1, k-1}$	…
…	p_{ik}	$G^i(x_{ik}, y_{ik-1})$	n'_{ik}	l^1_{ik}	n_{ik}	K^1_{ik}	$p_{i+1, k-1}$	…
…	q_{ik}	s_{ik}	m^{11}_{ik}	l^2_{ik}	m^1_{ik}	K^2_{ik}	$q_{i+1, k-1}$	…
		$q_{ik+1} - q_{ik-1}$	n^{11}_{ik}		n^1_{ik}			
		$q_{ik+1} - q_{ik}$	m^{21}_{ik}		m^2_{ik}			
		$i+1$	n^{21}_{ik}		n^2_{ik}			
…	u_{ik+1}	$G^i(x_{ik+2}, y_{ik}$	m'_{ik+1}	l_{ik+1}	m_{ik+1}	K_{ik+1}	$u_{i+1, k}$	…
…	…	… …	…	…	…	…	…	…

Am pus pentru prescurtare :

$$K_{ik} = F(x_{ik}, y_{ik-1}, l_{ik}, m_{ik}, n_{ik}) ; \qquad K^1_{ik} = F(x_{ik+1}, y_{ik-1}, l^1_{ik}, m^1_{ik}, n^1_{ik})$$

$$K^2_{ik} = F(x_{ik+1}, y_{ik}, l^2_{ik}, m^2_{ik}, n^2_{ik}).$$

Universitatea ,,Babeş-Bolyai,, Cluj,
Catedra de ecuaţii diferenţiale

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ

$$u_{xy} = F(x, y, u, p, q)$$

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть рассматривается уравнение (1) с условиями Коши (2) и ставится вопрос нахождения довольно быстро сходящегося метода численного интегрирования этого уравнения, не требуемого решения системы уравнений или выполнение начальных итераций.

С этой целью образуем сеть из рис. 1 (параллели с гипотенузой не являются обязательно равноотстоящими) с узлами P_{ik} где первый значок показывает нам на какой параллеле от AC, а второй индекс — на какой от AB лежит соответствующая точка. В этом случае формулы (18), (19) и (20) дают нам способ интегрирования типа „шаг за шагом" в котором искомые значения исчисляются последовательно на параллелях с AC. Погрешность приближения порядка h^3.

Данные формулы получаются написывая интегральные уравнения (6), (7), (8) и приближая входящие в них интегралы последовательным применением некоторых простых квадратурных формул. Например в случае сотношения (6), которое переписываем в форму (12), применяем формулу Симпсона. Значения в двух узлах этой формулы неизвестны, но для их нахождения достаточно применение формулы трапеции, имея в виду требуемую точность; потом неизвестное значение, которое еще фигурирует здесь, можно вычислить квадратурной формулой прямоугольника.

Оценки погрешностей получаются из соотношений (25). В последнем параграфе показывается способ применения этого метода в случае систем вида (1) и дана одна схема исчисления.

UNE MÉTHODE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION

$$u_{xy} = F(x, y, u, p, q)$$

RÉSUMÉ

On considère l'équation (1) avec les conditions de Cauchy (2) et on pose le problème de trouver une méthode assez rapidement convergente d'intégration numérique de cette équation, qui ne réclame pas la résolution d'un système d'équations ou l'effectuation d'itérations initiales.

A ces fins, on forme le réseau de la fig. 1 (les parallèles à l'hypoténuse ne sont pas nécessairement équidistantes) aux noeuds P_{ik}, où le premier indice montre sur laquelle des parallèles à AC et le second indice sur laquelle des parallèles à AB est situé le point respectif. Les formules (18), (19) et

(20) fournissent alors un procédé d'intégration du type „de proche en proche", où les valeurs cherchées se calculent successivement sur les parallèles à AC. Les erreurs d'approximation sont de l'ordre de h^3.

On obtient les formules données en écrivant les équations intégrales (6), (7), (8) et en approximant les intégrales qui y interviennent par l'application successive de formules de quadrature simples. Par exemple, au cas de la relation (6), que nous transcrivons sous la forme (12), nous appliquons la formule de Simpson. On ne connaît pas les valeurs sur deux noeuds de cette formule ; pour les trouver il est néanmoins suffisant, attendu la précision recherchée, d'appliquer la formule du trapèze ; puis on peut calculer la valeur inconnue qui apparaît ici avec la formule de quadrature du rectangle.

On obtient les évaluations des erreurs à l'aide des relations (25). Dans le dernier paragraphe on indique comment peut être utilisée la méthode au cas des systèmes de la forme (1), et on donne le schéma de calcul.

BIBLIOGRAFIE

1. Courant R. - Hilbert D., *Methoden der matematischen Physik, II.* Berlin, 1937.
2. Панов Д. Ю., *Численные решения квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных.* Москва, 1957.
3. Горбунов А. О., — Будак Б. М., *О разностном методе решения нелинейной задачи Гурса.* Вест. М.Г.У., 4, 3—8 (1957).
4. Ярышева И. М., *Конечноразностные методы решения задачи Гурса.* Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, **LIII**, 342—358 (1959).
5. Березин И. С., Жидков Н. П., *Методы вычислений,* Москва, 1959, p. 50.

Primit la 1 X. 1960.