

ASUPRA UNEI METODE NUMERICE DE APROXIMARE
A CONDIȚIILOR PE CONTUR ÎN CAZUL PROBLEMELOR
LA LIMITĂ ALE FIZICII MATEMATICE

DE

P. P. TEODORESCU

(București)

Comunicare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8–13 decembrie 1960, Cluj

1. Introducere. O problemă la limită a fizicii matematice constă, în general, în integrarea unei ecuații (sau a unui sistem de ecuații) diferențiale sau cu derivate parțiale cu anumite condiții la limită date. În cazul unei asemenea probleme trebuie demonstrează existența și unicitatea soluției obținute; la fel este necesar să se arate cum se poate construi o asemenea soluție și, eventual, să se construiască efectiv. De cele mai multe ori, datorită dificultăților mari de ordin matematic, metodele de calcul folosite sunt metode aproximative. În acest caz este de asemenea necesar să se arate gradul de aproximare al rezultatelor obținute.

Condițiile la limită pot fi, în general, de două feluri: *condiții initiale* (privind variabila temporală) și *condiții pe contur* (privind variabilele spațiale); de altfel variabila temporală poate interveni și în cazul condițiilor pe contur, tot așa cum variabilele spațiale pot interveni și în cazul condițiilor initiale.

În cele ce urmează ne vom referi, în special, la cazul condițiilor pe contur și, pentru a putea face mai multe precizări, ne vom situa în cadrul problemelor de *teoria elasticității*.

În cadrul acestor ultime probleme, *studiu local* al unui element infinit mic dintr-un corp elastic (presupus omogen, izotrop și liniar elastic) ne dă starea de tensiune și starea de deformare într-un punct oarecare al unui corp oarecare. Pentru a ne referi la un corp anumit și la o solicitare anumită (exterioară sau masică) trebuie să ținem seama de condițiile pe contur. Ele ne precizează soluția problemei. Studiul local trebuie deci completat cu un *studiu global*. În general putem cunoaște tensiunile sau deplasările corespunzătoare punctelor de pe contur. Va trebui să punem condiția ca tensiunile pe contur (*prima problemă fundamentală*) sau deplasările pe contur (*a doua problemă fundamentală*) sau tensiunile în unele

puncte și deplasările în alte puncte de pe contur (problema *mixtă*), obținute prin calcul, să fie egale cu cele date.

Dacă izbutim să satisfacem condițiile date în toate punctele conturului, găsind o funcție care să reprezinte starea de tensiune sau starea de deformare în fiecare punct al corpului, problema este pe deplin rezolvată.

În general, metodele aproximative de rezolvare a problemelor la limită ale fizicii matematice (în particular ale teoriei elasticității) sunt de două feluri:

— Metode care ne dă cu o aproximare dorită o funcție căutată în interiorul unui domeniu dat, de exemplu sub forma unei dezvoltări în serie; expresia analitică a acestei funcții ne dă posibilitatea să o calculăm în fiecare punct din interiorul domeniului.

— Metode care ne permit să calculăm valoarea numerică aproximativă a funcției căutate într-un număr finit de puncte, satisfăcând condițiile pe contur tot într-un număr finit de puncte (de exemplu metoda diferenților finite, metoda relaxării etc.).

Metoda de calcul pe care o vom dezvolta în cele ce urmează are părți comune cu fiecare din metodele menționate mai sus. Metoda constă în a căuta o funcție analitică, de o formă cît mai simplă, care să verifice ecuația diferențială a problemei, condițiile pe contur fiind puse într-un număr finit de puncte. Aceasta ne permite să găsim valoarea numerică a funcției căutate în fiecare punct din interiorul domeniului dat. Diferența dintre condițiile date pe contur și condițiile corespunzătoare funcției determinante ne dă posibilitatea să apreciem eroarea făcută (*aproximația de calcul*).

În limbajul teoriei elasticității, aceasta înseamnă să găsim o funcție de tensiune care ne dă starea de tensiune și starea de deformație pentru orice punct din interiorul corpului considerat.

Aproximația cu care se face calculul poate fi, în general, oricăr de bună vrem; bineînțeles, pentru a obține o aproximare mai bună trebuie să efectuăm un calcul mai laborios. Un exemplu de calcul ne va arăta precizia rezultatelor. Această metodă poate fi folosită cu succes în unele cazuri în care alte metode de calcul nu sunt eficace.

Metoda de calcul a punerii condițiilor în puncte pe contur a fost uneori folosită în diferite ramuri ale fizicii matematice, de exemplu în mecanica fluidelor, fără însă a se studia totdeauna posibilitatea de utilizare a ei și precizia rezultatelor obținute. În teoria elasticității ea a fost aplicată incidental și fără o precizare a rezultatelor obținute de către R. L' Hermite [4] la calculul pereților unor grinzi casetate și, cu o mare aproximare, de către L. S. Leibenzon [5, 6] la studiul unei membrane elastice de formă pătrată. Noi am aplicat [7] această metodă de calcul la problema plană a teoriei elasticității.

2. Problema plană a teoriei elasticității. În cele ce urmează, în cadrul teoriei elasticității, ne vom referi numai la problema plană și anume la cazul unei stări de tensiune plană. Rezultatele rămân valabile și pentru o stare de deformație plană, dacă înlocuim modulul de elasticitate E și coeficientul lui Poisson μ prin constantele elastice generalizate

$$E_0 = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \mu_0 = \frac{\mu}{1-\mu}. \quad (1)$$

Tensiunile se pot exprima sub forma [1, 2]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

iar componentele deplasării vor fi

$$\begin{aligned} E[u - (-\omega_0 y + u_0)] &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \mu \frac{\partial F}{\partial x} + f_1(y), \\ E[v - (\omega_0 x + v_0)] &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \mu \frac{\partial F}{\partial y} + f_2(x), \end{aligned} \quad (3)$$

unde u_0 , v_0 și ω_0 sunt deplasările, respectiv rotirea de corp rigid în plan.

Funcția de tensiune F trebuie să verifice ecuația biarmonică

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (4)$$

Funcțiile de o singură variabilă $f_1(y)$ și $f_2(x)$ sunt date de ecuația diferențială cu variabile separate

$$\int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{df_2(x)}{dx} = 0. \quad (5)$$

Condițiile pe contur, pe un element de linie de normală exterioară n , se scriu sub formă (în cazul primei probleme fundamentale a teoriei elasticității, problemă pe care o vom considera în cele ce urmează)

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y), \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y), \end{aligned} \quad (6)$$

unde p_{nx} , p_{ny} sunt componentele încărcării pe acest element de linie.

A pune aceste condiții este echivalent, în lipsa forțelor masice, cu a cunoaște pe contur valoarea funcției și a derivatei sale normale. Aceste valori se obțin cu ușurință, observând că funcția și derivata normală pe contur sunt momentul încovoiator, respectiv forța axială într-o bară imaginată de-a lungul conturului, sub acțiunea sarcinilor exterioare.

Pe de altă parte trebuie ca sarcinile exterioare să se echilibreze pe contur (dacă ținem seama de forțele masice, ele trebuie să se echilibreze împreună cu acestea [8]), pentru ca funcția de tensiune și derivatele sale parțiale să fie univoc determinate.

3. Polinoame biarmonice. Pentru metoda de calcul propusă este convenabil să folosim funcții de o formă cît mai simplă. În cazul problemei plane a teoriei elasticității vom folosi polinoame biarmonice.

E. A. I. m. a. n. s. i [3] a arătat că o funcție biarmonică se poate pune totdeauna sub forma

$$F(x, y) = \varphi(x, y) + (x^2 + y^2) \psi(x, y), \quad (7)$$

unde φ și ψ sunt funcții armonice.

Alegem un polinom de forma

$$P_n(x, y) = a(x+iy)^n + b(x-iy) + (x^2+y^2)[c(x+iy)^{n-2} + d(x-iy)^{n-2}], \quad (8)$$

unde i este unitatea imaginară iar a, b, c, d sunt constante arbitrară. În felul acesta găsim că un polinom biarmonic de gradul n depinde de patru constante arbitrară. După proprietățile de paritate în raport cu cele două variabile, acest polinom se poate descompune în două polinoame biarmonice, fiecare depinzând de două constante arbitrară.

Pentru polinomul biarmonic omogen de gradul n par, găsim:

- un polinom par în raport cu x și y

$$P_n^{22}(x, y) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^i \frac{n-2i}{n} C_n^{2i} (\alpha_n x^{n-2i} y^{2i} + \beta_n x^{2i} y^{n-2i}), \quad (9)$$

- un polinom impar în raport cu x și y

$$P_n^{11}(x, y) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-2} (-1)^i \frac{n-2i-2}{n(n-2)} C_n^{2i+1} (\gamma_n x^{n-2i-1} y^{2i+1} + \delta_n x^{2i+1} y^{n-2i-1}). \quad (10)$$

Pentru polinomul biarmonic omogen de gradul n impar, găsim:

- un polinom impar în raport cu x și par în raport cu y

$$P_n^{12}(x, y) = \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^i \frac{n-2i-1}{n-1} (\alpha_n C_n^{n-2i} x^{n-2i} y^{2i} + \beta_n \frac{C_n^{n-2i-1}}{n} x^{2i+1} y^{n-2i-1}), \quad (11)$$

- un polinom par în raport cu x și impar în raport cu y

$$P_n^{21}(x, y) = \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^i \frac{n-2i-1}{n-1} \left(\gamma_n \frac{C_n^{n-2i-1}}{n} x^{n-2i-1} y^{2i+1} + \delta_n C_n^{n-2i} x^{2i} y^{n-2i} \right), \quad (12)$$

unde C_p^q este simbolul combinărilor a p obiecte luate câte q ¹⁾.

¹⁾ În [7] se dau expresiile polinoamelor biarmonice și ale derivatelor lor parțiale pînă la gradul 12 inclusiv.

4. Aproximarea condițiilor pe contur. Pentru precizarea ideilor ne vom situa tot în cadrul teoriei elasticității.

Vom considera starea de tensiune reprezentată de polinomul biarmonic

$$F(x, y) = \sum_{i=2}^n P_i(x, y), \quad (13)$$

care cuprinde $(4n-5)$ constante arbitrară, datorită formei speciale a polinomului P_2^{11} (care cuprinde numai trei constante arbitrară).

Pentru un punct de pe contur putem pune condițiile (6) în tensiuni sau putem pune condiții în deplasări, folosind relațiile (3). Pentru un punct de pe contur găsim deci două relații între constantele de determinat. Scriind că funcția $F(x, y)$ îndeplinește condițiile pe contur în $(2n-3)$ puncte, găsim un sistem de $(4n-6)$ ecuații algebrice liniare cu $(4n-5)$ necunoscute, care va determina constantele $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și δ_i . Una din aceste constante se poate lua arbitrară (de exemplu $\delta_n = 0$).

În felul acesta funcția biarmonică (13) pe care o determinăm va corespunde unei sări de tensiune dată de o distribuție \mathcal{D}_1 de tensiuni sau de deplasări pe contur, foarte apropiată de distribuția \mathcal{D}_2 a problemei pe care o studiem.

Fie $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ diferența dintre cele două distribuții de condiții pe contur (de exemplu condiții în tensiuni). O asemenea distribuție de

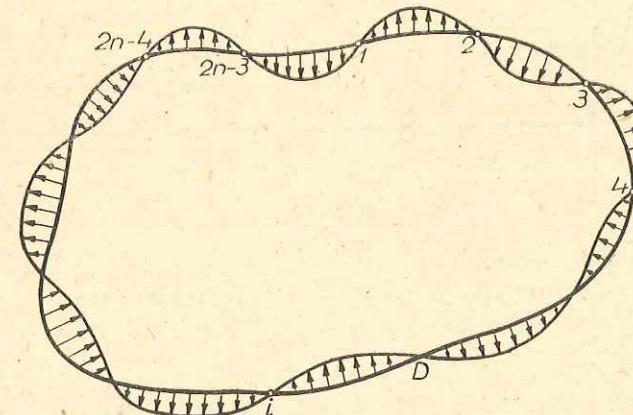


Fig. 1

tensiuni este cea din fig. 1, direcțiile tensiunilor fiind oarecare în fiecare punct (componentă normală și componentă tangențială).

Dacă numărul punctelor pe contur în care am pus condiții exacte este suficient de mare, tensiunile parazitare \mathcal{D} vor da în interiorul domeniului considerat o stare de tensiune neglijabilă în raport cu starea de tensiune dată de distribuția de tensiuni \mathcal{D}_2 . Această aproximare este cu atât mai valabilă, cu cît sarcinile pe contur se echilibrează pe porțiuni și putem aplica principiul lui B. de St. Venant.

Numărul punctelor în care trebuie puse condiții pe contur precum și aproximarea pe care ne-o dă metoda de calcul, se pot determina practic de la caz la caz, după cum se va vedea pe un exemplu.

În cazul unui contur cu proprietăți de simetrie și al unor încărcări simetrice sau antisimetrice, se obțin simplificări importante de calcul; în acest caz se folosesc formele pare sau impare în raport cu x sau cu y ale polinoamelor biarmonice iar condițiile se pun numai pe o parte a conturului.

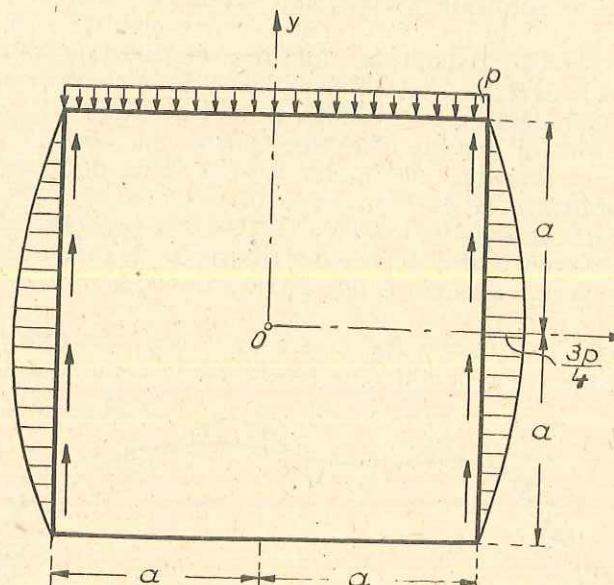


Fig. 2

5. Exemplu de calcul. Vom determina starea de tensiune și starea de deformare pentru un domeniu pătrat, caz care nu poate fi tratat prin metodele obișnuite de calcul. Acest domeniu poate corespunde unei grinzi perete cu o singură deschidere.

Presupunem că grinda perete este acționată la partea superioară de o sarcină uniformă distribuită, de intensitate p , și lateral de reacțiuni ce acționează sub forma unor sarcini tangențiale, distribuite parabolic (fig. 2).

Pentru a simplifica calculul, vom descompune acest caz de încărcare în alte două cazuri de încărcare, după proprietățile de simetrie în raport cu axa Ox .

Vom avea astfel de rezolvat cazul de încărcare din figura 3a, care este o compresiune simplă, și cazul de încărcare cu proprietăți de antisimetrie din figura 3b. Pentru primul caz corespunde funcția de tensiune

$$F'(x, y) = -\frac{p}{4} x^2, \quad (14)$$

care ne dă tensiunile

$$\sigma_x' = 0, \quad \sigma_y' = -\frac{p}{2}, \quad \tau_{xy}' = 0. \quad (15)$$

Pentru al doilea caz de încărcare alegem un polinom biarmonic $F''(x, y) = P(x, y)$ par în raport cu x și impar în raport cu y .

Sarcinile care acționează pe contur își fac echilibru; condiția de unicitate a funcției Airy este deci satisfăcută.

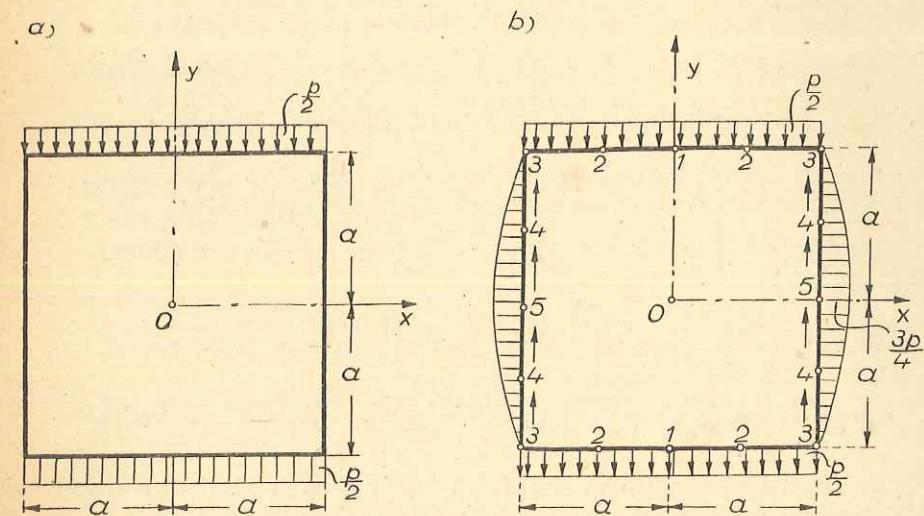


Fig. 3

Alegem o funcție de tensiune de forma

$$\begin{aligned} F''(x, y) = & P_3^{21} + P_5^{21} + P_7^{21} + P_9^{21} + P_{11}^{21} = \gamma_3 x^2 y + \delta_3 y^3 + \\ & + \gamma_5 (x^4 y - x^2 y^3) + \delta_5 (y^5 - 5x^2 y^3) + \gamma_7 (x^6 y - \frac{10}{3} x^4 y^3 + x^2 y^5) + \\ & + \delta_7 (y^7 - 14x^2 y^5 + \frac{35}{3} x^4 y^3) + \gamma_9 (x^8 y - 7x^6 y^3 + 7x^4 y^5 - x^2 y^7) + \\ & + \delta_9 (y^9 - 27x^2 y^7 + 63x^4 y^5 - 21x^6 y^3) + \gamma_{11} (x^{10} y - 12x^8 y^3 + \\ & + \frac{126}{5} x^6 y^5 - 12x^4 y^7 + x^2 y^9). \end{aligned} \quad (16)$$

Tensiunile corespunzătoare vor fi

$$\begin{aligned} \sigma_x'' = & 6\delta_3 y - 6\gamma_5 x^2 y + \delta_5 (20y^3 - 30x^2 y) + \gamma_7 (-20x^4 y + 20x^2 y^3) + \\ & + \delta_7 (42y^5 - 280x^2 y^3 + 70x^4 y) + \gamma_9 (-42x^6 y + 140x^4 y^3 - 42x^2 y^5) + \\ & + \delta_9 (72y^7 - 1134x^2 y^5 + 1260x^4 y^3 - 126x^6 y) + \\ & + \gamma_{11} (-72x^8 y + 504x^6 y^3 - 504x^4 y^5 + 72x^2 y^7), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y' &= 2\gamma_3 y + \gamma_5(12x^2y - 2y^3) - 10\delta_5 y^3 + \gamma_7(30x^4y - 40x^2y^3 + 2y^5) + \\ &+ \delta_7(-28y^5 + 140x^2y^3) + \gamma_9(56x^6y - 210x^4y^3 + 84x^2y^5 - 2y^7) + \\ &+ \delta_9(-54y^7 + 756x^2y^5 - 630x^4y^3) + \\ &+ \gamma_{11}(90x^8y - 672x^6y^3 + 756x^4y^5 - 144x^2y^7 + 2y^9), \quad (17) \\ \tau_{xy}'' &= -2\gamma_3 x + \gamma_5(-4x^3 + 6xy^2) + 30\delta_5 xy^2 + \gamma_7(-6x^5 + \\ &+ 40x^3y^2 - 10xy^4) + \delta_7(140xy^4 - 140x^3y^2) + \gamma_9(-8x^7 + \\ &+ 126x^5y^2 - 140x^3y^4 + 14xy^6) + \delta_9(378xy^6 - 1260x^3y^4 + 378x^5y^2) + \\ &+ \gamma_{11}(-10x^9 + 288x^7y^2 - 756x^5y^4 + 336x^3y^6 - 18xy^8).\end{aligned}$$

Vom pune condiții în 16 puncte pe contur (fig. 3b). Datorită proprietăților de simetrie, rămân numai cinci puncte distințe:

Condițiile $\tau_{xy}''(0, a) = 0$ și $\sigma_x''(a, 0) = 0$ sunt identic satisfăcute. Vom pune pe rînd condițiile

$$\begin{aligned}\sigma_y''(0, a) &= \sigma_y''\left(\frac{a}{2}, a\right) = \sigma_y''(a, a) = -0,5 \text{ } \phi, \quad \tau_{xy}''\left(\frac{a}{2}, a\right) = \tau_{xy}''(a, a) = 0, \quad (18) \\ \sigma_x''\left(a, \frac{a}{2}\right) &= \sigma_x''(a, a) = 0, \quad \tau_{xy}''(a, 0) = 0,75 \text{ } \phi, \quad \tau_{xy}''\left(a, \frac{a}{2}\right) = 0,5625 \text{ } \phi.\end{aligned}$$

Găsim astfel următorul sistem de nouă ecuații algebrice liniare care ne determină cei nouă parametri arbitrați:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_3 - 5\alpha_4 + \alpha_5 - 14\alpha_6 - \alpha_7 - 27\alpha_8 + \alpha_9 &= -0,25 \text{ } \phi, \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 - 10\alpha_4 - 6,125\alpha_5 + 7\alpha_6 + 6,75\alpha_7 + 95,625\alpha_8 + 3,1016\alpha_9 &= -0,5 \text{ } \phi, \\ \alpha_1 + 5\alpha_3 - 5\alpha_4 - 4\alpha_5 + 56\alpha_6 - 36\alpha_7 + 36\alpha_8 + 16\alpha_9 &= -0,25 \text{ } \phi, \quad (19) \\ \alpha_1 - 2,5\alpha_3 - 15\alpha_4 + 0,1875\alpha_5 - 52,5\alpha_7 + 6,625\alpha_7 - 43,3125\alpha_8 - 11,6055\alpha_9 &= 0, \\ \alpha_1 - \alpha_3 - 15\alpha_4 - 12\alpha_5 + 4\alpha_7 + 252\alpha_8 + 80\alpha_9 &= 0, \\ 3\alpha_2 - 3\alpha_3 - 12,5\alpha_4 - 7,5\alpha_5 + 1,3125\alpha_6 - 4,8125\alpha_7 + 59,625\alpha_8 + 11,8125\alpha_9 &= 0, \\ 3\alpha_2 - 3\alpha_3 - 5\alpha_4 - 84\alpha_6 + 28\alpha_7 + 36\alpha_9 &= 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 + 3\alpha_5 + 4\alpha_7 + 5\alpha_9 &= -0,375 \text{ } \phi, \\ 2\alpha_1 + 2,5\alpha_3 - 7,5\alpha_4 - 3,375\alpha_5 + 26,25\alpha_6 - 14,9688\alpha_7 - 21,6563\alpha_8 - \\ &- 19,9297\alpha_9 = -0,5625 \text{ } \phi,\end{aligned}$$

unde am notat

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \gamma_3 a, \quad \alpha_2 = \delta_3 a, \quad \alpha_3 = \gamma_5 a^3, \quad \alpha_4 = \delta_5 a^3, \quad \alpha_5 = \gamma_7 a^5, \\ \alpha_6 &= \delta_7 a^5, \quad \alpha_7 = \gamma_9 a^7, \quad \alpha_8 = \delta_9 a^7, \quad \alpha_9 = \gamma_{11} a^9.\end{aligned} \quad (19')$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații, găsim

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= -0,347400 \frac{\phi}{a}, & \delta_3 &= -0,083952 \frac{\phi}{a}, \\ \gamma_5 &= 0,009407 \frac{\phi}{a^3}, & \delta_5 &= -0,014571 \frac{\phi}{a^3}, \\ \gamma_7 &= -0,009264 \frac{\phi}{a^5}, & \delta_7 &= -0,003585 \frac{\phi}{a^5}, \\ \gamma_9 &= -0,003837 \frac{\phi}{a^7}, & \delta_9 &= 0,000376 \frac{\phi}{a^7}, \\ \gamma_{11} &= -0,000654 \frac{\phi}{a^9}.\end{aligned} \quad (20)$$

Funcția F'' de tensiune este astfel determinată. Notăm coordonatele reduse

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}. \quad (21)$$

Înlocuind valorile (20) în (17) și ținînd seama de starea de tensiune dată de (14), găsim componentele tensorului tensiune sub forma

$$\begin{aligned}\sigma_x &= [(-0,504 + 0,380\xi^2 - 0,064\xi^4 + 0,113\xi^6 + 0,047\xi^8)\eta + \\ &+ (-0,291 + 0,819\xi^2 - 0,064\xi^4 - 0,329\xi^6)\eta^3 + \\ &+ (-0,151 - 0,265\xi^2 + 0,329\xi^4)\eta^5 + (0,027 - 0,047\xi^2)\eta^7]\phi, \\ \sigma_y &= [-0,500 + (-0,695 + 0,113\xi^2 - 0,278\xi^4 - 0,215\xi^6 - 0,059\xi^8)\eta + \\ &+ (0,127 - 0,132\xi^2 + 0,570\xi^4 + 0,439\xi^6)\eta^3 + \\ &+ (0,082 - 0,038\xi^2 - 0,494\xi^4)\eta^5 + \\ &+ (-0,013 + 0,094\xi^2)\eta^7 - 0,001\eta^9]\phi, \quad (22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= [0,695\xi - 0,038\xi^3 + 0,056\xi^5 + 0,031\xi^7 + 0,006\xi^9 + \\ &+ (-0,381\xi + 0,131\xi^3 - 0,338\xi^5 - 0,189\xi^7)\eta^2 + \\ &+ (-0,409\xi + 0,063\xi^3 + 0,494\xi^5)\eta^4 + \\ &+ (0,088\xi - 0,221\xi^3)\eta^6 + 0,012\xi\eta^8]\phi.\end{aligned}$$

Aceasta ne conduce la o distribuție \mathcal{D}_1 de tensiuni pe contur, din care scădem distribuția \mathcal{D}_2 de sarcini exterioare. Găsim astfel :

— pentru laturile $\xi = \pm 1$

$$\begin{aligned}\sigma_x(\pm 1, \eta) &= (-0,028\eta + 0,135\eta^3 - 0,087\eta^5 - 0,020\eta^7)\phi = \\ &= -0,02\eta(\eta^2 - 1)(\eta^2 - 0,25)(\eta^2 + 5,6)\phi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(\pm 1, \eta) &= \pm (-0,027\eta^2 + 0,148\eta^4 - 0,133\eta^6 + 0,012\eta^8)\phi \cong \\ &\cong \pm 0,012\eta^2(\eta^2 - 1)(\eta^2 - 0,25)(\eta^2 - 9,7)\phi,\end{aligned} \quad (23)$$

— pentru laturile $\eta = \pm 1$

$$\begin{aligned}\sigma_y(\xi, \pm 1) &= \pm (0,037\xi^2 - 0,202\xi^4 + 0,224\xi^6 - 0,059\xi^8)\rho \cong \\ &\cong \pm 0,05\xi^2(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 0,25)(\xi^2 - 2,55)\rho,\end{aligned}\quad (24)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(\xi, \pm 1) &= (0,005\xi - 0,065\xi^3 + 0,212\xi^5 - 0,158\xi^7 + 0,006\xi^9)\rho \cong \\ &\cong 0,006\xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 0,25)(\xi^2 - 0,15)(\xi^2 - 25)\rho.\end{aligned}$$

Aceste tensiuni parazitare $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ sunt reprezentate în figura 4. Cu toate că nu se aplică principiul lui B. de St. Venant, grinda perete

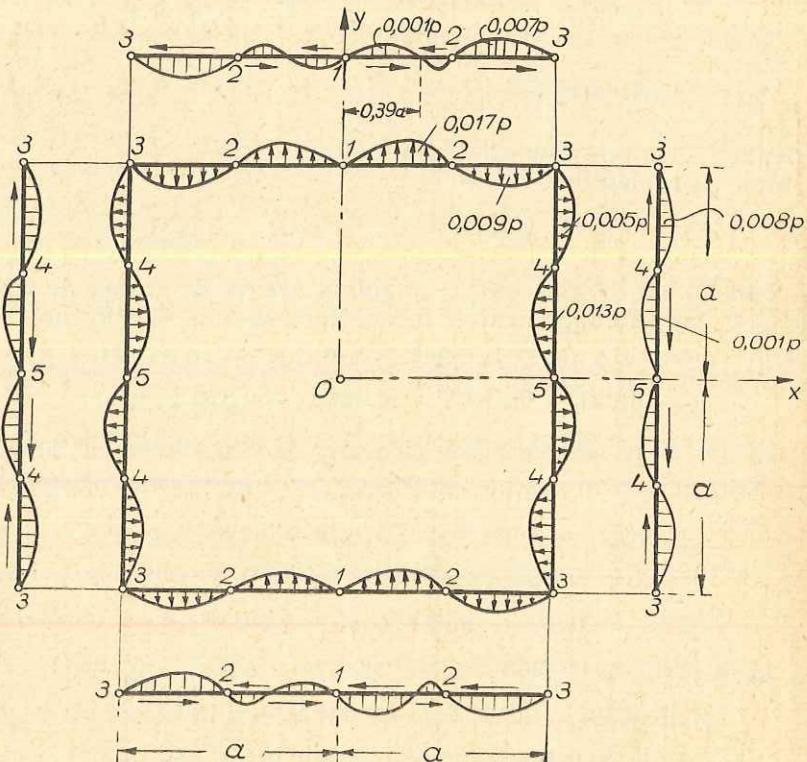


Fig. 4

având dimensiuni egale, în interior ia naștere o stare de tensiune neglijabilă (tensiunile \mathcal{D} fiind foarte mici în raport cu încărcarea \mathcal{D}_2). Putem face o verificare elementară, aproxiimînd încărcarea cu sarcini distribuite parabolic și folosind metodele rezistenței materialelor. Momentele încovoietoare în secțiunile 2-2 și 1-1 verticale vor fi

$$M_{2-2} = -2 \frac{2}{3} 0,01 \rho \frac{a}{2} \frac{a}{4} = -\frac{0,01 \rho a^2}{6}, \quad (25)$$

$$M_{1-1} = -2 \frac{2}{3} 0,01 \rho \frac{a}{2} \frac{3a}{4} + 2 \frac{2}{3} 0,02 \rho \frac{a}{2} \frac{a}{4} = -\frac{0,01 \rho a^2}{6}.$$

Cu modulul de rezistență

$$W = \frac{1}{6} (2a)^2 = \frac{2}{3} a^2, \quad (26)$$

puem scrie

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M}{W} = \mp \frac{0,01 \rho a^2}{6} \frac{3}{2a^2} = \mp \frac{0,01}{4} \rho = \pm 0,0025 \rho. \quad (27)$$

Se vede deci că eroarea nu va trece de 1,7% din sarcina exterioară, maximum pe care-l atinge în patru puncte pe contur. Putem deci considera că relațiile (22) ne dă starea de tensiune căutată.

În figura 5 se reprezintă diagramele de tensiuni date de relațiile (22). Aceste rezultate prezintă un interes în sine și din punct de vedere al teoriei elasticității.

Folosind formulele (3) și (5) putem calcula și componentele vectorului deplasare. Găsim astfel

$$\begin{aligned}E \frac{u}{a} &= \{0,500\mu\xi + [-(0,504 - 0,695\mu)\xi + (0,127 - 0,038\mu)\xi^3 - \\ &- (0,013 - 0,056\mu)\xi^5 + (0,016 + 0,031\mu)\xi^7 + \\ &+ (0,005 + 0,007\mu)\xi^9]\eta + [-(0,291 + 0,127\mu)\xi + \\ &+ (0,273 + 0,044\mu)\xi^3 - (0,013 + 0,114\mu)\xi^5 - \\ &- (0,047 + 0,063\mu)\xi^7]\eta^3 + [-(0,151 + 0,028\mu)\xi - \\ &- (0,088 - 0,013\mu)\xi^3 + (0,066 + 0,099\mu)\xi^5]\eta^5 + \\ &+ [(0,027 + 0,013\mu)\xi - (0,016 + 0,031\mu)\xi^3]\eta^7 + \\ &+ 0,001\mu\xi\eta^9\} \rho,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E \frac{v}{a} &= \{-(0,924 + 0,352\mu) + (0,947 + 0,348\mu)\xi^2 - \\ &- (0,051 + 0,010\mu)\xi^4 + (0,021 + 0,009\mu)\xi^6 + \\ &+ (0,006 + 0,004\mu)\xi^8 + (0,001 + 0,001\mu)\xi^{10} - \\ &- 0,500\eta + [-(0,348 - 0,252\mu) + \\ &+ (0,057 - 0,190\mu)\xi^2 - (0,139 - 0,032\mu)\xi^4 - \\ &- (0,108 + 0,057\mu)\xi^6 - (0,030 + 0,024\mu)\xi^8]\eta^2 + \\ &+ [0,042 + 0,073\mu - (0,033 + 0,205)\xi^2 + \\ &+ (0,142 + 0,016\mu)\xi^4 + (0,110 + 0,082\mu)\xi^6]\eta^4 + \\ &+ [0,013 + 0,025\mu - (0,006 - 0,044\mu)\xi^2 - \\ &- (0,082 + 0,055\mu)\xi^4]\eta^6 + \\ &+ [-(0,002 + 0,003\mu) + (0,012 + 0,006\mu)\xi^2]\eta^8\} \rho.\end{aligned} \quad (28)$$

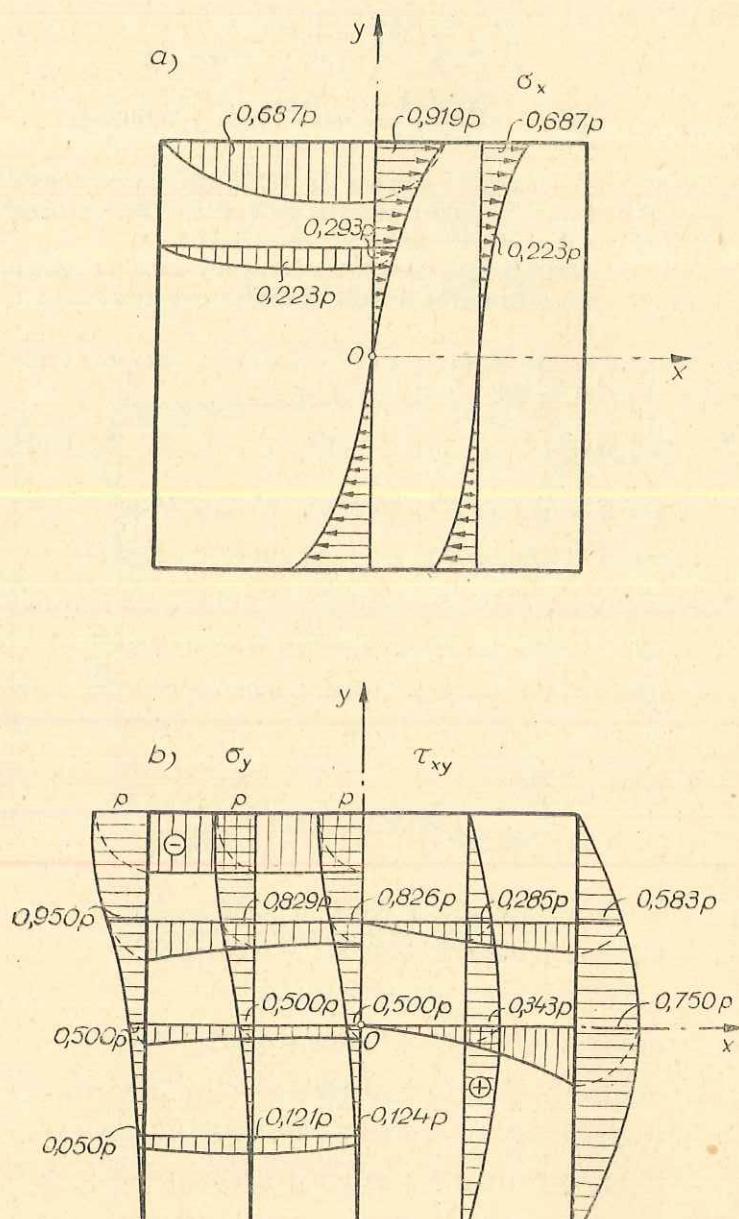


Fig. 5

Ecuația fibrei medii deformate va avea forma ($\eta = 0$)

$$E \frac{v(\xi, 0)}{a} = [-(0,924 + 0,352\mu) + (0,947 + 0,348)\xi^2 - \\ - (0,051 + 0,010\mu)\xi^4 + (0,021 + 0,009\mu)\xi^6 + \\ + (0,006 + 0,004\mu)\xi^8 + (0,001 + 0,001\mu)\xi^{10}] p. \quad (29)$$

Rezultatele obținute prin metodele rezistenței materialelor pot fi comparate cu rezultatele de mai sus, obținute prin metodele teoriei elasticității, trăgind astfel concluzii interesante pentru practică. Nu vom face aici acest lucru, neînțînd în domeniul de preocupări al lucrării de față.

6. Concluzii. Noi vom trage concluzii în special pentru problemele de teoria elasticității și în limbajul corespunzător. Aceste concluzii pot fi însă ușor adaptate pentru orice problemă de fizică matematică.

Metoda de calcul se poate folosi pentru studiul unei mari varietăți de elemente de construcție, de exemplu: grinzi pereți cu contur dreptunghiular, în diferite cazuri de rezemare și de încărcare; grinzi pereți cu un contur oarecare pentru poduri, grinzi cu vute etc.

Avantajele metodei de calcul sunt următoarele:

- Se poate face un studiu al unei grinzi perete cu exactitatea pe care o dorim.

- Se poate studia problema unei grinzi perete cu un contur practic oarecare.

- Se poate studia problema grinzelor pereți cu goluri (domenii multiplu conexe) tot așa de ușor ca și problema grinzelor pereți fără goluri (domenii simplu conexe).

- Se poate face un studiu punând, cu tot atâta ușurință, condiții pe contur în tensiuni sau în deplasări, pentru toate cele trei probleme fundamentale ale teoriei elasticității (spre deosebire de alte metode).

- Spre deosebire de alte metode (diferențe finite, de exemplu), care ne dă valori numerice în puncte, obținem expresii analitice atât pentru tensiuni cât și pentru deplasări (care altminteri nu se puteau calcula decât cu greutate).

- Putând calcula deplasările, se poate aprecia rigiditatea grinzelor perete, ceea ce este foarte important în unele cazuri (de exemplu pentru diafragmele de rigidizare la construcții mijlocii și finală în regiuni seismice).

- Calculând diferența D dintre starea de tensiune găsită de noi și solicitările pe contur, putem aprecia aproximarea cu care s-a făcut clacul.

- Se folosesc polinoame biarmonice, deci metode de calcul elementare, ușor accesibile unui cerc larg de ingineri.

- În cazul unor proprietăți de simetrie sau de antisimetrie se obțin simplificări importante în rezolvarea problemei.

Dezavantajele metodei de calcul sunt următoarele:

- Din punct de vedere al calculului se ajunge la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare cu un număr destul de mare de necunoscute. Acest sistem nu este simetric în raport cu diagonala principală.

— Pentru fiecare raport între dimensiunile grinzi trebuie să facem un calcul special, neputînd astfel efectua un calcul cu caracter general (ca și în cazul metodei diferențelor finite).

— Putem uneori să introducem parametri ai încărcării (care să ne indice, de exemplu, o poziție arbitrară a unei sarcini). Calculul devine mai greoi (uneori chiar imposibil, trebuie să facem un studiu separat pentru fiecare caz în parte). Trebuie să remarcăm însă că, în sistemul de ecuații liniare pe care-l avem de rezolvat, încărcarea afectează numai termenii liberi.

Se poate extinde metoda de calcul, făcînd ca numărul punctelor de pe contur în care se pun condiții la limită să crească indefinit, ajungînd astfel la un rezultat exact.

Eventual se pot folosi și alte funcții de tensiune decît cele polinomiale, pentru diferite probleme particulare.

Metoda de calcul indicată poate fi folosită cu ușurință și în spațiul tridimensional pentru a rezolva probleme analoge. Credem că această metodă ar putea conduce la rezolvarea unor probleme grele din punct de vedere al condițiilor pe contur, probleme rămase nerezolvate pînă în prezent. Este drept că în acest caz putem ajunge la un sistem de ecuații liniare cu un număr mare de necunoscute, a cărui rezolvare devine o problemă în sine. Dar cu ajutorul mașinilor electronice de calculat, aceasta nu mai poate constitui o dificultate.

Pentru diferite probleme ale fizicii matematice putem face studii similare.

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КОНТУРНЫХ
УСЛОВИЙ ПРИМЕНITЕЛЬНО К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Обсуждается возможность приближенного решения краевых задач математической физики налагая условия в конечном числе точек контура рассматриваемой области. Уточняются эти соображения в случае плоской задачи теории упругости, причем показывается способ оценки степени приближения полученных результатов. Применяя бигармонические полиномы приводится далее численный пример расчета для случая балки стенки квадратной формы в плоскости.

SUR UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE D'APPROXIMATION DES
CONDITIONS SUR LE CONTOUR DANS LE CAS DES PROBLÈMES
AUX LIMITES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

RÉSUMÉ

On discute la possibilité de résoudre, d'une manière approximative, les problèmes aux limites de la physique mathématique, en posant des conditions dans un nombre fini de points sur le contour du domanie considéré. On précise ensuite ces considérations pour le problème plan de la théorie de l'élasticité, en démontrant la possibilité d'apprecier le degré d'approximation des résultats obtenus. En utilisant des polynomes biharmoniques, on donne un exemple de calcul pour le cas d'une poutre-paroi carrée.

BIBLIOGRAFIE

1. Airy G. B., *On the Strains in the Interior of Beams*, Adv. Sci. Rept., 1962.
2. — *Ibid. Phil. Trans.*, **153**, 49 (1863).
3. Almansi E., *Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$* . Ann. di Matem., s. III, **II**, 1 (1898).
4. Hermite R. L., *Calcul des parois planes et des poutres cloisons en béton armé*. Génie civil, **102**, 393 (1933).
5. Лейбензон Л. С., *Вариационные методы решения задач теории упругости*. Г.Т.И., Москва—Ленинград, 1943.
6. — *Собрание трудов*, т. I, Изд. Акад. Наук СССР. Москва, 1951.
7. Teodorescu P. P., *O metodă de aproximare a condițiilor pe contur în cazul problemei plane a elasticității*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, 3, 655 (1956).
8. — *Asupra problemei plane a elasticității în cazul unor forțe masice oarecare*. Bul. științ. — Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, **IX**, 2, 481 (1957)

Primit la 10. XII. 1960.