DESPRE TOPOLOGIZAREA INELELOR

DE

I. MAURER

Comunicare prezentată la şedinţa din 24 septembrie 1956 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

Într-o lucrare anterioară [1] am comunicat o metodă de topologizare a grupului de permutări P al unei mulţimi infinite arbitrare. Importanţa acestei topologizări reiese din faptul că orice grup abstract se poate scufunda în grupul de permutări P ale elementelor sale (este izomorf cu un subgrup al lui P), deci prin topologizarea lui P obţinem o metodă de topologizare a unui grup abstract arbitrar.

Este bine cunoscut faptul că o reprezentare analoagă cu reprezentarea grupurilor abstracte prin grupuri de permutări, este valabilă şi pentru o vastă clasă de inele : orice inel R cu element unitate este izomorf cu un subinel al inelului $E(R^+)$ al endomorfismelor modulului R^+ al lui R [2]. Se pune deci în mod firesc problema topologizării inelului $E(R^+)$ al endomorfismelor lui R^+ sau în general al inelului $E(G)$ al endomorfismelor unui grup abelian G. Rezultă din cele de mai sus că, rezolvînd această problemă, obţinem *o metodă de topologizare a inelelor abstracte* R [cu element unitate]. Deoarece orice inel se poate scufunda într-un inel cu element unitate [2], rezultă că metoda amintită este *generală* în sensul că rezolvă topologizarea unui *inel abstract arbitrar*.

Fie G un grup abelian şi $E(G)$ inelul endomorfismelor lui G. În cele ce urmează presupunem valabilă pentru G axioma alegerii. Vom introduce în $E(G)$ o topologie pe baza unei noţiuni de limită. pe care o definim în mod analog cu cazul grupurilor de permutări [1] şi anume în felul următor :

D e f i n i ţ i e. *Un şir infinit* $\{\alpha_r\}$ *de endomorfisme* $\alpha_r \in E(G)$ *are ca limită endomorfismul* α, *dacă pentru orice element* $x \in G$ *există un număr natural* R_x *în aşa fel că pentru* $r > R_x$ *să subsiste egalitatea* $\alpha_r x = \alpha x$. În acest caz şirul $\{\alpha_r\}$ este *convergent*, în caz contrar *divergent*. În caz de convergenţă scriem : $\alpha_r \to \alpha$.

Pe baza acestei noţiuni de limită putem introduce *noţiunea de închidere* în $E(G)$ în felul bine cunoscut şi anume vom defini închiderea $\overline{A}$ a unei mulţimi arbitrare $A \subset E(G)$ ca totalitatea elementelor lui A, completate cu toate elementele limită ale acestuia.

Sînt valabile următoarele *propoziții:*

1. *Dacă* $\alpha_r \to \alpha$ *și* $k_1 < k_2 < \ldots$, *atunci* $\alpha_{k_r} \to \alpha$.
2. *Dacă* $\alpha_r = \alpha$ *pentru orice* r, *atunci* $\alpha_r \to \alpha$.
3. *Dacă* $\{\alpha_{r1}\}, \{\alpha_{r2}\}, \ldots, \{\alpha_{rr}\}, \ldots$ *sînt șiruri convergente de endomorfisme, iar șirul format din limitele* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ *ale șirurilor de mai sus este tot convergent, avînd ca limită endomorfismul* α, *atunci se poate extrage din tabloul format din termenii șirurilor de mai sus un șir convergent în așa fel ca limita acestui șir să fie egală cu* α.

Demonstrația acestor propoziții se face la fel ca și în cazul grupului de permutări P [1]. Într-adevăr, noțiunile de limită introduse în comunicarea [1] și în lucrarea de față sînt în fond identice; în [1] nu ne-am folosit la demonstrarea propozițiilor 1, 2 și 3 de faptul că permutările sînt aplicații biunivoce, ci numai de proprietatea că ele sînt aplicații univoce, proprietate pe care o au și endomorfismele.

Se arată ușor că din proprietățile 1, 2 și 3 rezultă valabilitatea axiomelor lui Riesz-Kuratowski [3] în $E(G)$, deci E(G) *este un spațiu topologic.*

Șirurile convergente în $E(G)$ au încă următoarele *proprietăți*:

1*. *Dacă* $\alpha_r \to \alpha$ *și* $\alpha'_r \to \alpha'$, *atunci* $\alpha_r \alpha'_r \to \alpha\alpha'$.

2*. *Dacă* $\alpha_r \to \alpha$ *și* $\alpha'_r \to \alpha'$, *atunci* $\alpha_r \pm \alpha'_r \to \alpha \pm \alpha'$.

În raport cu demonstrația proprietății 1*, facem aceeași observație ca și în cazul propozițiilor 1, 2 și 3 și ne referim la demonstrația proprietății corespunzătoare în cazul grupului de permutări P, dată în lucrarea [1]. Rămîne deci să demonstrăm proprietățile 2*:

Din ipotezele $\alpha_r \to \alpha$ și $\alpha'_r \to \alpha'$ rezultă că pentru orice element $x \in G$ există un număr natural R_x, respectiv R'_x, în așa fel că pentru $r > R_x$ respectiv $r > R'_x$ avem $\alpha_r x = \alpha x$ respectiv $\alpha'_r x = \alpha' x$. De aici rezultă că dacă $r >$ max (R_x, R'_x), atunci egalitățile de mai sus subsistă simultan, deci $(\alpha_r + \alpha'_r)\, x = \alpha_r x + \alpha'_r x = \alpha x + \alpha' x = (\alpha + \alpha')x$. În consecință: $\alpha_r + \alpha'_r \to \alpha + \alpha'$.

Se vede ușor, pe baza primei proprietăți din punctul 2*, că, pentru a arăta valabilitatea proprietății $\alpha_r - \alpha'_r \to \alpha - \alpha'$ în condițiile de la punctul 2*, este suficient să demonstrăm următoarea propoziție: dacă $\alpha'_r \to \alpha'$, atunci $-\alpha'_r \to -\alpha'$.

Pentru a demonstra această proprietate, vom arăta în prealabil valabilitatea următoarei leme: dacă șirurile $\{\alpha'_r\}$ și $\{\alpha_r + \alpha'_r\}$ sînt convergente, atunci șirul $\{\alpha_r\}$ este convergent. Să presupunem contrariul. Atunci există un element $y \in G$ astfel ca pentru orice endomorfism α_p să existe un endomorfism α_q $(q > p)$, așa încît $\alpha_p y \neq \alpha_q y$ Pe de altă parte, din convergența șirurilor $\{\alpha'_r\}$ și $\{\alpha_r + \alpha'_r\}$ rezultă că pentru un număr s convenabil ales avem $\alpha'_s y = \alpha'_t y$ și $(\alpha_s + \alpha'_s)\, y = (\alpha_t + \alpha'_t) y$ pentru orice $t > s$. Să alegem acum numerele p și t în așa fel, încît să avem $p = s$ și $t = q$. Atunci avem următoarele relații: $\alpha_s y \neq \alpha_q y$, $\alpha'_s y = \alpha'_q y$ și $(\alpha_s + \alpha'_s)\, y = (\alpha_q + \alpha'_q)\, y$, care se mai poate scrie și sub forma următoare: $\alpha_s y + \alpha'_s y = \alpha_q y + \alpha'_q y$. Ultima egalitate

ne dă, pe baza relației $\alpha'_s y = \alpha'_q y$, următoarea egalitate: $\alpha_s y = \alpha_q y$. Această însă contrazice inegalitatea $\alpha_s y \neq \alpha_q y$. De aici rezultă valabilitatea lemei. Pe baza acestei leme putem trece la demonstrarea proprietății din enunț. Pentru acest scop formăm șirul $\{\alpha'_r + (-\alpha'_r)\} = \{0\}$. Acest șir este convergent pe baza propoziției 2 și are ca limită endomorfismul 0. Deoarece șirul $\{\alpha'_r\}$ este convergent prin ipoteză, rezultă pe baza lemei demonstrate anterior că șirul $\{-\alpha'_r\}$ este convergent. Să notăm cu β limita acestui șir: $-\alpha'_r \to \beta$. Atunci pe baza primei proprietăți din punctul 2* avem: $\alpha'_r + (-\alpha'_r) \to \alpha' + \beta$, deci $\alpha' + \beta = 0$, de unde $\beta = \alpha'$, ceea ce era de demonstrat.

Pe baza proprietăților 1* și 2* putem afirma că operațiile definite în inelul $E(G)$ al endomorfismelor lui G sînt *continue*. Deoarece $E(G)$ este 1) un inel abstract, 2) un spațiu topologic, iar 3) operațiile definite în $E(G)$ sînt continue, putem enunța următoarea teoremă[1]):

TEOREMĂ. — $E(G)$ *este un inel topologic.*

BIBLIOGRAFIE

1. I. Maurer, *Topologizarea grupurilor de permutări a unei mulțimi infinite arbitrare.* Bul. mat. al Soc. Şt. Mat.-Fiz. din R.P.R., t. 2(50), nr. 1, 1958, p. 95—98.
2. L. Rédei, *Algebra I.*, Budapesta, 1954.
3. C. Kuratowski, *Topologie I.*, ed. 2-a., Varşovia—Wroclaw, 1948.

Universitatea „Bolyai", Cluj
Catedra de analiză şi algebră

О ТОПОЛОГИЗАЦИИ КОЛЕЦ

(Краткое содержание)

В этой работе введем топологию в кольцо $E(G)$ эндоморфизмов некоторого абелевой группы G на основе следующего понятия предела:

Определение. Бесконечная иследовательности $\{\alpha_r\}$ эндоморфизмов $\alpha_r \in E(G)$ имеет предел эндоморфизм α, если для любого элемента $x \in G$ существует натуральное число R_x такое, что для $r > R_x$ имеет место равенство $\alpha_r x = \alpha x$. В этом случае последовательность $\{\alpha_r\}$ называется сходящейся; в противном случае — расходящейся.

Направляясь от этого определения предела, введем понятие замыкания в $E(G)$ обычным образом и устанавливаем следующую теорему:

[1]) Mulţumim d-lui A. Kertész (Debrecen), care ne-a atras atenţia că în moştenirea prof. T. Szele (Debrecen), ce urmează să fie redactată de d-sa există o metodă de topologizare a inelelor abstracte. Această convorbire ne-a dat ideea elaborării prezentei note şi — urmînd o cale independentă de cea a lui T. Szele — am aplicat la inele metoda folosită de noi pentru grupuri.

Теорема. $E(G)$ является топологическим кольцом.

Посредством этой топологизации кольца $E(G)$ мы получили метод топологизации абстрактных колец, так как любое кольцо можно вложить в кольцо R с единичном елементом, а R можно вложить в кольцо $E(R^{+})$ эндоморфизмов модуля R^{+}. Этот метод аналогичен методу, использованному нами в случае групп [1].

SUR LA TOPOLOGISATION DES ANNEAUX

(Résumé)

Dans le présent travail, nous introduison une topologie dans l'anneau des endomorphismes d'un groupe abélien G sur la base de la suivante *notion de limite:*

D é f i n i t i o n. *Une suite infinie* $\{\alpha_r\}$ *d'endomorphismes* $\alpha^r \in E(G)$ *a comme limite l'endomorphisme* α, *si pour chaque élément* $x \in G$ *existe un nombre naturel* R_x, *de manière à ce que pour* $r > R_x$ *subsiste l'égalité* $\alpha_r x = \alpha x$. Dans ce cas la suite $\{\alpha_r\}$ est *convergente* et dans le cas contraire, elle est *divergente.*

En partant de cette définition de la limite, nous introduisons la notion de *fermeture* dans $E(G)$ de la manière habituelle et nous établissons la théorème suivant:

T h é o r è m e. *$E(G)$ est un anneau topologique.*

Par cette topologisation de l'anneau $E(G)$, nous avons obtenu *une méthode de topologisation des anneaux abstraits,* parce que chaque anneau peut être plongé dans un anneau R avec élément unité et R peut être plongé dans l'anneau $E(R^{+})$ des endomorphismes du module R^{+}. Cette méthode est analogue à celle que nous avons employée dans le cas des groupes [1].