DESPRE UNELE PROBLEME PRIVIND VARIETĂŢILE DIN SPAŢIUL SEPARABIL AL LUI HILBERT ŞI APLICAŢII ALE LOR LA STUDIUL PARTICOLELOR ELEMENTARE

DE

EUGEN GERGELY

(Cluj)

Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 13 iulie 1961 a Institutului de calcul al Academiei R. P. R. — Filiala Cluj.

În lucrarea de faţă se studiază unele probleme referitoare la corespondenţa ce poate fi stabilită între mulţimile elementelor din spaţiul lui Hilbert şi între varietăţile cu n dimensiuni introduse de noi [1, 2, 3]. În partea doua a lucrării se dă o aplicaţie a acestei teorii matematice în fizica microparticolelor şi anume se dă o reprezentare a microparticolelor cu ajutorul elementelor din spaţiul lui Hilbert, dîndu-se totodată sugestii pentru tratarea problemelor legate de studiul microparticolelor şi al transformărilor acestora cu ajutorul metodelor matematice folosite în studiul spaţiului lui Hilbert.

Fie dată o mulţime M de elemente în spaţiul separabil hilbertian H. Problema în cauză poate fi formulată astfel : există oare o varietate V_n cu n dimensiuni, astfel încît ea să cuprindă toate elementele lui M şi numai acestea? Răspunsul este afirmativ :

Dacă nu restrîngem clasa funcţiilor $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(i = 1, 2, \ldots)$, *care reprezintă coeficienţii elementului* $a \in V_n$ *de forma*

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) e_i,$$

atunci pentru o mulţime oarecare $M \subset H$ *poate fi construită o varietate* V_n (n fiind un număr natural oarecare) *care cuprinde toate elementele mulţimii* M *şi numai acestea.*

Pentru a face o analogie în acest sens, amintim următorul rezultat cunoscut : Fiind dată o varietate V_m, considerată în sensul obişnuit ca un spaţiu riemanian cu m dimensiuni, atunci V_m poate fi scufundată cu păstrarea metricii într-un spaţiu euclidian V_n cu n destul de mare.

Să considerăm o mulțime $\{a\} \subset H$, unde elementele $a \in \{a\}$ sînt de formă $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ sau scriind pe componente $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots)$ și să construim pentru un n fixat — deocamdată — funcțiile $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu domeniul D de definiție comun al lor, astfel ca $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ și $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i$, $(i = 1, 2, \ldots)$.

Observăm că funcția $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ poate să ia valoarea a_i pentru o mulțime de elemente $(x_1', x_2', \ldots, x_n') \in D$, care diferă de elementul $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$.

Considerăm mulțimea $\{a_1\}$ a componentelor de rang 1 ale tuturor elementelor din $\{a\}$. Căutăm pentru mulțimea de numere $\{a_1\}$ o funcție $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ astfel încît domeniul valorii acestei funcții să coincidă cu $\{a_1\}$. La fel pentru mulțimea de numere $\{a_2\}$ formată din componentele de rang 2, construim o funcție $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, astfel încît domeniul de definiție să fie de asemenea D, iar domeniul de valori să fie mulțimea $\{a_2\}$. Mai departe se procedează la fel. Menționăm că alegerea funcțiilor f_i $(i = 1, 2, \ldots)$ trebuie să fie normată astfel ca $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 < \infty$, deoarece și componentele a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ satisfac relația $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$. Construcția acestor funcții este posibilă dacă nu restrîngem clasa funcțiilor, fapt ce se poate constata.

Astfel am construit o reprezentare a mulțimii M printr-o varietate V_n, avînd elemente de forma $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) e_i$.

Prin aceste raționamente numărul n se precizează cu ocazia construcției funcției f_i. Dacă am obținut deja pentru M o reprezentare de forma $\Sigma f_i e_i$ cu domeniul de definiție D_M, care aparține varietății n-dimensionale V_n, atunci putem trece la un n oarecare $(n = 1, 2, \ldots)$, fiind cunoscut faptul că dacă nu restrîngem clasa funcțiilor f_i, atunci se poate trece printr-o transformare biunivocă de la un domeniu al lui V_n, la un domeniu în V_m pentru un m oarecare.

Astfel am ajuns la concluzia că fără a restrînge clasa funcțiilor f_i, adică considerîndu-le *în sensul cel mai general*, fiecare mulțime din spațiul lui Hilbert poate fi reprezentată ca o varietate V_n pentru orice n $(n = 1, 2, \ldots)$. Evident că la indici n diferiți corespund funcții f_i diferite.

Trecem acum la problemele aplicării spațiilor lui Hilbret în fizica microparticolelor. Relevăm de la început faptul că problemele care formează obiectul expunerii în continuare, sînt în faza de elaborare și astfel nu putem da încă rezultate definitive, ci numai idei generale și sugestii.

După concepția noastră despre natură, care este confirmată prin fapte nenumărate și care este oglindirea întotdeauna aproximativ fidelă a realității, un fenomen dat este în relație cu fenomenele care formează o vecinătate — mai mult sau mai puțin în legătură cu fenomenul în cauză — și

astfel este determinat de un număr infinit de parametri, care exprimă într-un anumit fel proprietățile fenomenului.

În baza acestui fapt, fiecare fenomen și deci și starea corespunzătoare a microparticulelor este determinată de o mulțime infinită de parametri, care nu se referă numai la determinarea poziției în spațiu a microparticolei, ci contribuie la caracterizarea stării ei în întregime. Numerele care caracterizează aspectele diferite ale acestor proprietăți, formează un șir în care termenii converg spre zero, fiindcă efectele cauzate de fenomenele situate „la periferia" fenomenului în cauză sînt relativ neglijabile. Astfel putem presupune că șirul pătratelor coordonatelor unei microparticole este convergent și astfel, starea fenomenului, adică starea microparticolei respective este reprezentată printr-un element al unui spațiu separabil al lui Hilbert. Această idee este de altfel în concordanță cu experiența. Nu este exclus ca studiul unor astfel de probleme să conducă la considerarea și a spațiilor neseparabile.

O mulțime de microparticole va fi reprezentată printr-o mulțime de elemente în spațiul lui Hilbert și după cum s-a arătat anterior, această mulțime se poate concepe ca o varietate V_n cu un număr n convenabil. Acest număr n poate să fie ales astfel încît clasa funcțiilor f_i să fie cît mai potrivită pentru calculele necesare, și totodată să caracterizeze fenomenul respectiv.

În șirul parametrilor (coordonatelor) care determină poziția și în special starea unei microparticole, s-ar putea să existe multe coordonate nule care pot fi interpretate ca reprezentînd fenomene de efect nul.

Acum putem reprezenta și anti-microparticolele în diferite moduri: sau astfel ca parametrii (coordonatele) corespunzători să aibă valorile cu semnul schimbat, sau ca microparticole complimentare care au parametrii diferiți de zero, pentru indicii pentru care particola dată are un parametru de valoare zero sau invers.

Transformările microparticolelor sînt date de operatori, în general neliniari în spațiul lui Hilbert. Natura proprietăților acestor operatori se poate stabili pe baza datelor experiențelor fizice și după aceste date se pot stabili legile la care se supun transformările respective.

O altă problemă este determinarea acelor varietăți n-dimensionale care rămîn invariante la transformările amintite anterior.

Operatorii de transformare și varietățile n-dimensionale invariate de acești operatori sînt caracteristici pentru fenomenele de transformare ale microparticolelor și astfel aceste procese sînt oglindite prin obiectele matematice introduse anterior.

Fiecare transformare este în strînsă legătură cu numere, caracteristice pentru microparticole, cu numere cuantice și alte numere, care sînt invariate de către unele transformări ale microparticolelor, sau se transformă și ele însele în baza legilor fizice. Între acești invarianți amintim și norma elementelor și a operatorilor, precum și cîteva numere care sînt legate de funcții de operatori.

Este foarte probabil — dar problema aceasta încă nu este studiată destul de adînc — că unele chestiuni în legătură cu microparticole au o reprezentare în spaţiul Hilbert, reprezentare care presupune utilizarea funcţiilor cu un număr infinit de variabile, adică de varietăţi cu un număr infinit de parametri şi care pot fi aproximate de un şir infinit de varietăţi V_n (unde n tinde spre infinit).

Din cercetările făcute pînă acum reiese faptul că spaţiile separabile ale lui Hilbert, elementele acestor spaţii, transformările acestor elemente, operatori foarte generali şi transformările operatorilor, precum şi invarianţii acestor transformări de operator constituie un aparat matematic propriu pentru reprezentarea fenomenelor din lumea microparticolelor, şi astfel studierea varietăţilor în spaţiul lui Hilbert are vaste aplicaţii în acest domeniu al fenomenelor naturii. Detaliile în această direcţie vor fi date în lucrările următoare.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОГООБРАЗИЙ В СЕПАРАБЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА И О ИХ ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде исследуются некоторые вопросы в связи с изображением множеств в прсотранстве Гилберта на n-размерных многообразиях, введенных и исследованных автором в [1—3]. Показывается, что если не ограничивается класс функций, представляющих коэффициенты элемента $a \in V_n$, то для какого-нибудь множества $M \subset H$ можно построить многообразия V_n (n — любое натуральное число), содержащие все элементы множества M и только эти элементы.

Во второй части труда применяется теория пространств Гилбертэ к физике микрочастиц. Микрочастица, в определённом её состоянии, изображается элементом в сепарабельном пространстве Гильберта, а преобразования микрочастиц представляются операторами, для которых многообразия эквивалентные с множеством соответствующих элементов пространства Гилберта являются инвариантными.

SUR QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS AUX VARIÉTÉS DE L'ESPACE SÉPARABLE DE HILBERT ET QUELQUES-UNES DE LEURS APPLICATIONS À L'ÉTUDE DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

RÉSUMÉ

L'auteur étudie quelques problèmes relatifs à la représentation des ensembles dans l'espace de Hilbert sur des variétés n-dimensionelles introduites et étudiées par l'auteur dans [1—3]. Il montre que si l'on ne restreint

pas la classe des fonctions qui représentent les coefficients de l'élément $a \in V_n$, alors pour un ensemble quelconque $M \subset H$, on peut construire des variétés V_n (n étant un nombre naturel quelconque) qui comprennent tous les éléments de l'ensemble M et seulement ceux-ci.

Dans la deuxième partie du travail, l'auteur applique la théorie des espaces de Hilbert à la physique des micro-particules. Une micro-particule dans un certain état, est représentée par un élément dans un espace séparable de Hilbert et on représente les transformations des micro-particules par des opérateurs, pour lesquels la variétés équivalentes à l'ensemble des éléments correspondants de l'espace de Hilbert sont des invariantes.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Gergely, *Probleme din geometria varietăţilor n-dimensionale în spaţiile separabile ale lui Hilbert*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XI**, *1*, 15—21 (1960).
2. — *Despre unele clase de varietăţi n-dimensionale în spaţiile separabile ale lui Hilbert*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XI**, *2*, 267—271 (1960).
3. — *Varietăţile n-dimensionale în spaţiile lui Hilbert, considerate ca spaţiu de distanţă*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XII**, *1*, 59—63 (1961).

Primit la 1. VII. 1961.