

## STUDIUL ECUAȚIILOR INTEGRO-DIFERENȚIALE PRIN METODA POLINOMIALĂ \*)

DE

L. E. KRIVOȘEIN și D. MANGERON  
(Frunze, URSS) (Iași)

*Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8-13 decembrie 1960, Cluj.*

### Introducere

Autorii au consacrat în ultimii ani un șir de lucrări, redactate în colaborare, problemei de elaborare a metodelor de aproximație a soluțiilor problemelor de valori inițiale și de contur pentru diferite clase de ecuații integro-diferențiale [1, 3].

În legătură cu problema generală de contur pentru ecuații de tip neeliptic [4, 5] ei au studiat cu totul recent [8, 9] o nouă clasă de ecuații integro-diferențiale cu *derivate totale* de forma

$$\begin{aligned} D^n u(x, y) - \lambda(n-1)!^2 [A(x, y)u(x, y) + B(x, y)D'u(x, y)] = \\ = (n-1)!^2 \left[ f(x, y) + \lambda \iint_P E(x, y, \xi, \eta) \sum_0^n F_p(\xi, \eta) D^p u(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] \end{aligned} \quad (1)$$

în care  $Du$  este derivata totală în sensul lui M. Picone [6, 7] în argumentele  $x, y$ ;  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$ ,  $E(x, y, \xi, \eta)$ ,  $F_p(\xi, \eta)$  sînt funcții continue cunoscute de argumente reale  $x, y, \xi, \eta$ , care nu sînt identic nule în  $P$  și  $P - P_1$ ,  $P = \{a \leq \xi, x \leq c; b \leq y, \eta \leq d\}$ ,  $P_1 = \{a \leq \xi \leq x; b \leq \eta \leq y\}$ ,  $\lambda$  este un parametru, iar  $u(x, y)$  este soluția căutată ce satisface (problema omogenă a lui Goursat) condițiile

$$[D^i u]_{x=a} = [D^i u]_{y=b} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2)$$

\*) Această lucrare se publică și în limba rusă în revista „Mathematica” vol. 4 (27), 1962.

sau, dacă se mai presupune pentru simplificare  $r = p = 0$ , condițiile (problema omogenă de contur)

$$\begin{aligned} u|_L \equiv 0, \quad Du|_{L_1} \equiv \dots \equiv D^{n-1}u|_{L_1} = 0, \\ L_1 = \{x = a, b \leq y \leq d; y = b, a \leq x \leq c\}, \end{aligned} \quad (3)$$

în care  $L$  este conturul domeniului  $P$ , [8, 9].

În cadrul problemelor de calcul numeric<sup>1)</sup>, ce se dezvoltă atât de impetuos astăzi, al doilea dintre autori a elaborat metoda ecuațiilor integrale în mecanica sistemelor neliniare [10], iar primul, participând creator la lucrările școlii kirghize de teoria ecuațiilor integro-diferențiale [11, 12], în plină înflorire sub conducerea acad. Ia. V. Bîkov [13, 14], a publicat cu totul recent o vastă contribuție la metoda acad. A. I. Nekrasov de rezolvare a ecuațiilor integro-diferențiale de ordin  $n$  și a elaborat, folosind metodele lui S. A. Ceaplighin, Iu. D. Sokolov, metoda perturbațiilor, metoda diferențelor finite ș.a., numeroase metode de calcul cu aproximație a soluțiilor ecuațiilor integro-diferențiale avînd caracteristici variate (vezi [15–18]).

În acest articol se folosesc pe scară largă, în cadrul metodei polinomiale elaborată de autori de rezolvare cu aproximație a ecuațiilor integro-diferențiale, polinoamele lui S. N. Bernstein  $B_r(x)$  [20] și — într-o măsură mai redusă — polinoamele lui E. Landau [21].

Metoda elaborată își are la bază clasică teoremă a lui K. Weierstrass (vezi [22], p. 14–15) relativă la aproximarea funcțiilor continue prin polinoame: *Dacă  $f(x)$  posedă derivata continuă de ordin  $k$ ,  $f^{(k)}(x)$ , atunci derivatele  $B_r^{(k)}(x)$  au ca limită  $f^{(k)}(x)$ :*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} B_r^{(k)}(x) = f^{(k)}(x), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

S. E. Mikeldze [23] a aplicat polinoamele  $B_r(x)$  la rezolvarea diferitelor probleme relative la ecuații integro-diferențiale de forma

$$y(x) + \int_0^1 K(x, t) \frac{d}{dt} F[y(t)] dt = f(x). \quad (4)$$

În cele ce urmează se determină soluții pentru diferite probleme de contur relative la o clasă de ecuații integro-diferențiale de ordin superior, folosindu-se în acest scop și alte căi.

Menționăm că în cele ce urmează nu se discută problemele de existență și de unicitate a soluțiilor, presupunîndu-se că atare probleme au fost rezolvate pozitiv în prealabil pentru totalitatea problemelor puse.

<sup>1)</sup> A se vedea, de exemplu, în cadrul activității pe scară mondială volumul mereu crescînd al numărului de referate consacrate calculului numeric inserate în paginile revistei „Referativnii jurnal-matematika” sau — restringîndu-ne la manifestările științifice recente în domeniu — șirul de lucrări consacrate calculului numeric și expuse la Colocviul de calcul numeric organizat în decembrie 1960, cu participare internațională, de către Institutul de calcul al Filialei Cluj a Academiei Republicii Populare Romîne.

### § 1. Rezolvarea cu aproximație a problemelor de contur pe bază de sisteme de ecuații integrale

1. Să considerăm problema de contur neomogenă

$$R_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{ij} y^{(i)}(0) + \beta_{ij} y^{(i)}(1)] = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

pentru ecuația integro-diferențială de tip Fredholm

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \sum_0^m K_j(x, t) y^{(i)}(t) dt, \quad (1.2)$$

în care  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_j$  sînt numere cunoscute,  $a_\nu(x)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) și  $K_s(x, t)$  ( $s = 0, 1, \dots, m$ ) sînt funcții continue,  $a_n(x) \equiv 1$  pentru  $x, t \in [0, 1]$ ,  $\lambda$  este un parametru numeric,  $n \geq m$ .

Soluția problemei (1.1), (1.2) o construim sub forma

$$y(x) = \sum_1^n d_i z_i(x) + \int_0^1 G(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1.3)$$

în care  $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$  reprezintă un sistem de funcții de  $n$  ori derivabile avînd wronskianul  $\delta(x)$  diferit de zero în intervalul  $[0, 1]$ ,  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sînt niște constante deocamdată necunoscute și  $G(x, t)$  este funcția lui Green relativă la problema

$$R_j[z] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.4)$$

$$z^{(n)}(x) + \sum_1^n c_i(x) z^{(n-i)}(x) = 0, \quad (1.5)$$

$c_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) fiind coeficienți cunoscuți, funcții continue în  $[0, 1]$ , iar  $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$  este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (1.5).

Din (1.1), (1.3) avem

$$\sum_{i=1}^n d_i R_j[z_i] = \gamma_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.6)$$

Fie

$$d_i = \rho_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.7)$$

în care  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  sînt mărimi cunoscute, soluția sistemului (1.6).

Ecuația (1.3), ținînd seama de (1.7), ia forma

$$y(x) = \psi(x) + \int_0^1 G(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1.8)$$

în care

$$\psi(x) \equiv \sum_1^n \rho_i z_i(x).$$

Substituirea (1.8) în (1.2) conduce la ecuația integrală

$$\varphi(x) - \int_0^1 [M_1(x, t) + \lambda M_2(x, t)] \varphi(t) dt = F(x, \lambda), \quad (1.9)$$

în care funcțiile  $M_1(x, t)$ ,  $F(x, \lambda)$ ,  $M_2(x, t)$  sînt definite după cum urmează :

$$M_1(x, t) \equiv - \sum_0^{n-2} a_i(x) G_x^{(i)}(x, t) - \sum_{n-1}^n a_i(x) [G_x^{(i)}(x, t+0) + G_x^{(i)}(x, t-0)],$$

$$F(x, \lambda) \equiv f(x) + \lambda \int_0^1 \sum_0^m K_i(x, t) \psi^{(i)}(t) dt - \sum_{i=0}^n a_i(x) \sum_{j=1}^n \rho_j z_j^{(i)}(x),$$

$$\int_0^1 M_2(x, t) \varphi(t) dt \equiv \int_0^1 \sum_0^m K_i(x, \tau) \left[ \int_0^1 G(\tau, t) \varphi(t) dt \right]^{(i)} d\tau.$$

Sistemul de ecuații integrale (1.8), (1.9) este echivalent cu problema (1.1), (1.2) în sensul că funcția (1.8), în care  $\varphi(x)$  satisface ecuația (1.9), este soluție a problemei (1.1), (1.2).

Fie  $\varphi_1(x)$  o soluție aproximativă a ecuației (1.9). Pentru soluția aproximativă a problemei inițiale se ia atunci funcția

$$y_1(x) = \psi(x) + \int_0^1 G(x, t) \varphi_1(t) dt. \quad (1.10)$$

Să alegem pentru funcția  $\varphi_1(t)$  polinomul lui S. N. Bernstein

$$b_r(x) \equiv \sum_0^r C_r^i x^i (1-x)^{r-i} \varphi\left(\frac{i}{r}\right) \quad (1.11)$$

în care  $C_r^i$  este obișnuitul simbol al combinațiilor din  $r$  câte  $i$  elemente. Constantele necunoscute  $\varphi\left(\frac{i}{r}\right)$  se determină din condiția

$$\varphi(x') - \int_0^1 M(x', t, \lambda) b_2(t) dt = F(x', \lambda) \quad (1.12)$$

pentru toți  $x' = 0; \frac{1}{r}; \frac{2}{r}; \dots; \frac{r-1}{r}; 1$ , în care

$$M(x, t, \lambda) \equiv M_1(x, t) + \lambda M_2(x, t).$$

Să transcriem (1.12) sub forma

$$\sum_{j=0}^r s_{ij}(\lambda) \varphi\left(\frac{j}{r}\right) = F\left(\frac{i}{r}, \lambda\right) \quad (i = 0, 1, \dots, r). \quad (1.13)$$

În ipoteză că determinantul  $\Delta_r(\lambda)$  al sistemului (1.13) este diferit de zero

$$\Delta_r(\lambda) \equiv \det |s_{ij}(\lambda)| \neq 0, \quad (1.14)$$

avem

$$\varphi\left(\frac{j}{r}\right) = \Delta_{rj}(\lambda) : \Delta_r(\lambda) \quad (j = 0, 1, \dots, r), \quad (1.15)$$

în care determinantul  $\Delta_{rj}(\lambda)$  se obține din  $\Delta_r(\lambda)$  dacă în coloana de ordinul  $j$  a acestuia figurează  $F(0, \lambda), \dots, F(1, \lambda)$ .

Așadar, drept soluție aproximativă a problemei (1.1), (1.2) se ia funcția

$$y_r(x) = \psi(x) + \int_0^1 G(x, t) \sum_0^r C_r^i t^i (1-t)^{r-i} [\Delta_{ri}(\lambda) : \Delta_r(\lambda)] dt, \quad (1.16)$$

avîndu-se totodată

$$\lim_{r \rightarrow \infty} y_r(x) = y(x),$$

adică procesul de trecere la limită conducînd la soluția exactă a problemei (1.1), (1.2).

*Observații.* 1. Coeficienții  $\varphi\left(\frac{i}{r}\right)$  pot fi determinați folosind, în loc de (1.13), sistemul

$$\sum_{j=0}^r P_{ij}(\lambda) \varphi\left(\frac{j}{r}\right) = F\left(\frac{i}{r}, \lambda\right) \quad (i = 0, 1, \dots, r),$$

în care

$$P_{ij}(\lambda) = C_r^i \left[ \left(\frac{i}{r}\right)^j \left(1 - \frac{i}{r}\right)^{r-j} - \int_0^1 M\left(\frac{i}{r}, t, \lambda\right) t^j (1-t)^{r-j} dt \right].$$

2. Rădăcinile ecuației  $\Delta_r(\lambda) = 0$  constituie valori aproximative ale valorilor proprii din problema (1.1), (1.2).

Dacă  $m = n + p$ ,  $p \geq 1$  și funcțiile  $a_i(x)$ ,  $f(x)$ ,  $K_j(x, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 0, 1, \dots, m$ ) sînt derivabile de  $p$  ori în raport cu  $x$ , construcția soluției aproximative a problemei puse poate fi făcută după cum urmează.

Fie

$$y(x) = \sum_1^m d_i z_i(x) + \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1.17)$$

în care  $c_1, c_2, \dots, c_m$  sînt constante necunoscute,  $z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)$  este un sistem de funcții liniar independente de  $m$  ori derivabile, avînd wronskianul  $\delta(x) \neq 0$  pentru toți  $x \in [0, 1]$ ,

$$K(x, t) \equiv \sum_1^m \delta_i(t) z_i(t) : \delta(t), \quad (1.18)$$

$\delta_i(t)$  este complementul algebric al elementului situat la intersecția coloanei de ordin  $i$  cu ultima linie a determinantului  $\delta(t)$ .

Substituirea (1.18) în (1.1) și (1.2) conduce respectiv la ecuațiile

$$\sum_{i=1}^m d_i R_j [z_i] = \gamma_j - R_j \left[ \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt \right], \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.20)$$

$$\int_0^x M_3(x, t) \varphi(t) dt = f(x) + \sum_1^m c_i \sigma_i(x, \lambda) + \lambda \int_0^1 M_4(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1.21)$$

în care  $M_3(x, t), \sigma_i(x, \lambda), M_4(x, t)$  sînt funcții cunoscute.

Din (1.21) se mai obține

$$\sum_{i=1}^m c_i \sigma_i^{(j)}(x, \lambda) \Big|_{x=0} = - \left\{ f(x) + \lambda \int_0^1 M_4(x, t) \varphi(t) dt \right\}_{x=0}^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, p-1). \quad (1.22)$$

Dacă determinantul  $\det |R_j [z_i]; \sigma_i^{(k)}(0, \lambda)|$  al sistemului (1.20), (1.22) este diferit de zero, se găsește, ca și în cazul  $n \geq m$ ,

$$c_i = p_i(\lambda) + \int_0^1 \xi_i(t, \lambda) \varphi(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (1.23)$$

Derivînd (1.21) de  $p$  ori și folosind (1.23) se ajunge la o ecuație integrală de forma

$$\varphi(x) - \int_0^x M_5(x, t) \varphi(t) dt - \int_0^1 M_6(x, t, \lambda) \varphi(t) dt = \Phi(x, \lambda). \quad (1.24)$$

Ținînd seama de (1.23), să transcriem (1.18) sub forma

$$y(x) = \psi(x, \lambda) + \int_0^1 G(x, t) \varphi(t) dt. \quad (1.25)$$

Toate deducerile ulterioare pot fi făcute de acum încolo în același mod ca și la începutul acestui paragraf.

2. Polinomul  $b_r(x)$  a fost construit în ipoteză că integralele

$$\int_0^1 M(x, t, \lambda) t^i (1-t)^{r-i} dt, \quad (i = 0, 1, \dots, r) \quad (1.26)$$

pot fi calculate exact. În cazul contrar, metoda indicată rezultă puțin eficace. Dacă integrala (1.26) nu se calculează exact, atunci (1.26) se determină cu aproximație. Se poate aproxima, de exemplu, funcția  $\varphi(x)$  cu ajutorul polinoamelor lui E. Landau [21] deja menționate:

$$L_k(x) = \frac{1}{2} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \int_0^1 \varphi(t) [1 - (x-t)^2]^k dt. \quad (1.27)$$

Substituind, de exemplu, (1.27) în (1.9), se obține o ecuație integrală de tip Fredholm de prima specie:

$$\int_0^1 D_k(x, t, \lambda) \varphi(t) dt \approx L(n, \lambda). \quad (1.28)$$

De aici se obține

$$\sum_1^r A_i D_k(x, t_i, \lambda) \varphi(t_i) \approx L(x, \lambda) - \rho(x, \lambda) \quad (1.29)$$

în care  $A_i$  și  $t_i$  sînt respectiv coeficienții și nodurile formulei de cuadratură mecanică alese<sup>2)</sup> și  $\rho(x, \lambda)$  este eroarea comisă cu ocazia alegerii făcute.

Dacă determinantul  $\det |A_i D_k(t_j, t_i, \lambda)| \neq 0$ , atunci, presupunînd în (1.29)  $x = t_j$  și neglijînd  $\rho(x, \lambda)$ , se găsește valoarea aproximativă a funcției  $\varphi(x)$  în nodurile  $t_i$ :

$$\varphi(t_i) \approx \xi_i(\lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Folosind pentru evaluarea membrului al doilea din (1.27) formula de cuadratură aproximată

$$\int_0^1 \varphi(t) [1 - (x-t)^2]^k dt \approx \sum_1^r A_i [1 - (x-t_i)^2]^k \varphi(t_i) \approx \sum_1^r A_i [1 - (x-t_i)^2]^k \xi_i(\lambda) \quad (1.30)$$

rezultă că pentru soluția aproximativă a problemei (1.1), (1.2) se poate alege funcția

$$y_k(x) = \psi(x) + \frac{1}{2} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \sum_1^r A_i \xi_i \int_0^1 G(x, t) [1 - (t-t_i)^2]^k dt. \quad (1.31)$$

<sup>2)</sup> Autorii au în studiu, într-o lucrare ulterioară relativă la aproximarea soluțiilor ecuațiilor integro-diferențiale, folosirea formulelor de cuadraturi aproximative, elaborate cu succes în ultimii ani la Institutul de calcul al Filialei Cluj a Academiei R.P.R., sub conducerea prof. T. Popoviciu și prof. D. V. Ionescu.

3. Să luăm în (1.1)  $n \geq m$  și  $\beta_{ij} = 0$  pentru toți  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ . În acest caz problema de contur devine o problemă de valori inițiale în corespondență cu datele

$$R_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} y^{(i)}(0) = \gamma_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.32)$$

Soluția problemei (1.1), (1.2) se construiește sub forma

$$y(x) = \sum_1^n d_i z_i(x) + \int_0^x D(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1.33)$$

în care  $z_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) este un sistem de funcții independente avînd wronskianul diferit de zero în  $[0, 1]$ ,  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sînt numere cunoscute, definite prin sistemul de ecuații

$$\sum_{i=1}^n d_i z_i^{(j)}(0) = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad D(x, t) \equiv \sum_1^n \delta_i(t) z_i(x) : \delta(t),$$

$\delta_i(t)$  fiind complementul algebric al elementului situat la intersecția coloanei de ordin  $i$  cu ultima linie a determinantului  $\delta(t)$ .

Substituind (1.33) în (1.1), se obține o ecuație integrală de forma

$$\varphi(x) - \int_0^x P_1(x, t) \varphi(t) dt - \lambda \int_0^1 P_2(x, t) \varphi(t) dt = f(x, \lambda) \quad (1.34)$$

a cărei soluție poate fi aproximată prin polinomul (1.11).

Totalitatea deducerilor ulterioare se fac în același mod ca și la p. 1.

4. Să considerăm acum problema (1.32) pentru ecuația integro-diferențială de tip Volterra

$$\sum_0^n a_i(x) y^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \sum_0^m K_i(x, t) y^{(i)}(t) dt, \quad n \geq m. \quad (1.35)$$

Substituind (1.33) în (1.35), se obține o ecuație integrală de tip Volterra

$$\varphi(x) - \int_0^x [P_1(x, t) + \lambda P_3(x, t)] \varphi(t) dt = h(x, \lambda), \quad (1.36)$$

în care  $P_1(x, t)$ ,  $P_3(x, t)$  și  $h(x, \lambda)$  sînt funcții cunoscute.

Totodată coeficienții  $\varphi\left(\frac{i}{r}\right)$  se determină din sistemul de ecuații

$$\sum_{i=0}^r \bar{s}_{ij}(\lambda) \varphi\left(\frac{i}{r}\right) = h\left(\frac{j}{r}, \lambda\right), \quad \varphi(0) = h(0, \lambda), \quad (j = 0, 1, \dots, r-1), \quad (1.37)$$

în același mod ca și la nr. 1.

Dacă  $\varphi\left(\frac{i}{r}\right) = g_i(\lambda)$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) este soluția sistemului (1.37), atunci

$$y_r(x) = \sum_1^n d_i z_i(x) + \int_0^x D(x, t) \left[ \sum_1^n C_i^i t^i (1-t)^{r-i} g_i(\lambda) \right] dt \quad (1.38)$$

este o soluție aproximativă a problemei (1.32), (1.35).

5. În ipoteză că în (1.1)  $\alpha_{ij} = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ), avem

$$R_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ij} y^{(i)}(1) = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.39)$$

Substituind (1.33) în ecuația integro-diferențială (1.35), se obține o ecuație integrală mixtă, întrucîtva diferită de (1.34). În adevăr, substituind (1.33) în (1.39), se obține

$$\sum_{i=1}^n d_i R_j[z_i] = \gamma_j - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ij} \int_0^1 D_x^{(i)}(1, t) \varphi(t) dt \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.39')$$

Deoarece determinantul  $\det |R_j[z_i]| \neq 0$ , rezultă din (1.39')

$$d_i = \varepsilon_i + \int_0^1 \varepsilon_i(t) \varphi(t) dt. \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Prin urmare

$$y(x) = \sum_1^n \varepsilon_i z_i(x) + \int_0^x D(x, t) \varphi(t) dt + \int_0^1 \sum_1^n z_i(x) \varepsilon_i(t) \varphi(t) dt. \quad (1.40)$$

Înlocuind (1.40) în (1.35), se ajunge la ecuația integrală

$$\varphi(x) - \int_0^x [P_1(x, t) + \lambda P_2(x, t)] \varphi(t) dt = g(x, \lambda) + \int_0^1 [P_4(x, t) + \lambda P_5(x, t)] \varphi(t) dt.$$

Pentru determinarea coeficienților  $\varphi\left(\frac{i}{r}\right)$  se construiește un sistem de forma (1.37), pe care-l notăm cu (1.37'). Dacă

$$\det | \bar{s}_{ij}(\lambda) | \neq 0,$$

atunci coeficienții  $\varphi\left(\frac{i}{r}\right)$  se determină în mod univoc din sistemul (1.37'), iar soluția aproximativă a problemei (1.38), (1.35) se construiește sub forma

$$y_r(x) = \sum_1^n \varepsilon_i z_i(x) + \int_0^x D(x, t) b_r(t) dt + \int_0^1 \sum_0^n z_i(x) \varepsilon_i(t) b_r(t) dt. \quad (1.41)$$

Rădăcinile ecuației

$$\det | \bar{s}_{ij}(\lambda) | = 0$$

constituie un ansamblu de valori aproximative pentru valorile proprii ale problemei (1.38), (1.35).

6. Deoarece ordinul de mărime al erorii comise în cazul folosirii pentru aproximație a polinoamelor lui S. N. Bernstein  $b_r(x)$ , este egal cu  $\frac{1}{r}$ , adică

$$| b_r(x) - \varphi(x) | = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

rezultă că avem și

$$| y_r(x) - y(x) | = O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (1.42)$$

În ipoteza îndeplinirii unui număr de condiții suplimentare, se reușește a se da o evaluare efectivă a erorii comise. Să expunem metoda de evaluare a unei atare erori folosind drept schemă de lucru problema (1.1), (1.32). Introducînd funcția

$$P(x, t, \lambda) \equiv \begin{cases} P_1(x, t) + \lambda P_2(x, t), & 0 \leq t \leq x, \\ \lambda P_2(x, t), & x \leq t \leq 1, \end{cases}$$

ecuația (1.34) se transcrie sub forma

$$\varphi(x) - \int_0^1 P(x, t, \lambda) \varphi(t) dt = f(x, \lambda). \quad (1.43)$$

Fie  $\omega_r(x, \lambda)$  decalajul obținut ca rezultat al înlocuirii lui  $b_r(x)$  în (1.43). Atunci

$$b_r(x) - \varphi(x) - \int_0^1 P(x, t, \lambda) [b_r(t) - \varphi(t)] dt = \omega_r(x, \lambda). \quad (1.44)$$

Dacă în domeniul  $g = \{0 \leq x \leq 1; \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2\}$  are loc inegalitatea

$$l = 1 - \max_g \int_0^1 | P(x, t, \lambda) | dt > 0, \quad (1.45)$$

atunci

$$\max_{[0,1]} | b_r(x) - \varphi(x) | \leq \max_g | \omega_r(x, \lambda) | : l = \mu_r.$$

Prin urmare decalajul între funcția

$$y_r(x) = \sum_1^n d_i z_i(x) + \int_0^x D(x, t) b_r(t) dt.$$

și soluția exactă (1.33) a problemei considerate poate fi evaluat prin inegalitatea

$$| y_r(x) - y(x) | \leq \mu_r \int_0^x | D(x, t) | dt, \quad x \in [0, 1]. \quad (1.46)$$

În mod analog se construiesc și evaluările erorilor în alte cazuri considerate.

## § 2. Rezolvarea cu aproximație a problemelor de contur independent de considerarea ecuațiilor integrale auxiliare

1. Să construim o soluție aproximativă a problemei (1.1), (1.2) evitînd construcția sistemelor rezolvante de ecuații integrale.

Fie

$$B_r(x) = \sum_0^r C_r^i x^i (1-x)^{r-i} y\left(\frac{i}{r}\right) \quad (2.1)$$

polinomul lui S. N. Bernstein corespunzător cu soluția  $y(x)$  a problemei (1.1), (1.2) ( $r = n + k$ ,  $k$  fiind un număr întreg și pozitiv).

Substituind (2.1) în (1.1) se ajunge la sistemul

$$\sum_{i=0}^{n-1} y\left(\frac{i}{r}\right) R_v [C_r^i x^i (1-x)^{r-i}] = \gamma_v - \sum_{i=n}^r y\left(\frac{i}{r}\right) R_v [C_r^i x^i (1-x)^{r-i}],$$

$$(v = 1, 2, \dots, n),$$

pe care-l transcriem într-o formă mai condensată

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{iv} y\left(\frac{i}{r}\right) = \gamma_v - \sum_{i=n}^r y\left(\frac{i}{r}\right) \omega_{iv}, \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2)$$

Fie

$$\det | \omega_{iv} |_0^{n-1} \equiv \begin{vmatrix} \omega_{01} & \omega_{11} & \dots & \omega_{n-11} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & \dots & \omega_{n-12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{0n-1} & \omega_{1n-1} & \dots & \omega_{n-1n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.3)$$

Atunci din (2.2) se obține

$$y\left(\frac{i}{r}\right) = s_i + \sum_{i=n}^r s_{iv} y\left(\frac{i}{r}\right), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (2.4)$$

în care  $s_i$  și  $s_{iv}$  sînt numere cunoscute.

În consecință

$$B_r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_r^i x^i (1-x)^{r-i} \left[ s_i + \sum_{v=n}^r s_{iv} y\left(\frac{v}{r}\right) \right] + \sum_{v=n}^r C_r^i x^i (1-x)^{r-i} y\left(\frac{i}{r}\right) \equiv \psi_r(x) + \sum_{v=n}^r \psi_{rv}(x) y\left(\frac{v}{r}\right). \quad (2.5)$$

Coeficienții  $y\left(\frac{v}{r}\right)$ , ( $v = n, n+1, \dots, r$ ) rămași necunoscuți se determină din condiția ca decalajul

$$\alpha_r(x, \lambda) \equiv \sum_0^n a_i(x) B_r^{(i)}(x) - \lambda \int_0^1 \sum_1^m K_i(x, t) B_r^{(i)}(t) dt - f(x) \equiv \sum_{v=n}^r \omega_v(x, \lambda, r) y\left(\frac{v}{r}\right) - \eta(x, \lambda, r) \quad (2.6)$$

să fie egal cu zero în punctele de interpolare  $x = \frac{n}{r}; \frac{(n+1)}{r}; \dots; 1$ , adică

$$\sum_{v=n}^r \omega_v\left(\frac{i}{r}, \lambda, r\right) y\left(\frac{v}{r}\right) = \eta\left(\frac{i}{r}, \lambda, r\right), \quad (i = n, n+1, \dots, r). \quad (2.7)$$

În ipoteză că determinantul  $\det \left| \omega_v\left(\frac{i}{r}, \lambda, r\right) \right|$  al sistemului (2.7) este diferit de zero, din (2.7) se obține

$$y\left(\frac{v}{r}\right) = \sigma_v(r, \lambda) \quad (v = n, n+1, \dots, r). \quad (2.8)$$

Avem așadar

$$B_r(x) = \psi_r(x) + \sum_{v=n}^r \psi_{rv}(x) \sigma_v(r, \lambda). \quad (2.9)$$

Rădăcinile ecuației

$$\det \left| \omega_v\left(\frac{i}{r}, \lambda, r\right) \right| = 0$$

constituie un ansamblu de valori de aproximație a valorilor proprii a problemei (1.1), (1.2).

În mod analog se construiește soluția aproximativă a problemei (1.1) pentru ecuația integro-diferențială de tip Volterra (1.35).

2. Coeficienții  $y\left(\frac{i}{r}\right)$  ai polinomului (2.1) pot fi determinați și pe o cale întrucîtva diferită.

Se consideră, de exemplu, problema (1.1), (1.2). Introducînd operatorul

$$T[y] \equiv - \sum_0^{n-1} a_i(x) y^{(i)}(x) + \lambda \int_0^1 \sum_0^m K_i(x, t) y^{(i)}(t) dt, \quad (2.10)$$

rezultă din (1.2)

$$y(x) = \sum_1^{n-1} x^i \frac{y_0^{(i)}}{i!} + \int_0^x [(x-t)^{n-1}: (n-1)!] T[y] dt \equiv \xi(x) + \int_0^x R(x, t) T[y] dt, \quad (2.11)$$

în care constantele  $y_0^{(i)} = y^{(i)}(0)$  sînt determinate pe baza condițiilor (1.32). Să determinăm coeficienții  $y\left(\frac{i}{r}\right)$  din condiția

$$y\left(\frac{i}{r}\right) = \xi\left(\frac{i}{r}\right) + \int_0^{\frac{i}{r}} R\left(\frac{i}{r}, t\right) T[B_r] dt, \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (2.12)$$

sau

$$y\left(\frac{i}{r}\right) - \sum_{j=0}^r m_{ij}(\lambda) y\left(\frac{j}{r}\right) = \xi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (2.13)$$

în care

$$m_{ij}(\lambda) = C_r^j \int_0^{\frac{i}{r}} R\left(\frac{i}{r}, t\right) T[t^j (1-t)^{r-j}] dt, \quad \xi_i = \xi\left(\frac{i}{r}\right).$$

Presupunem că determinantul  $\det |d_r(\lambda)|$  al sistemului (2.13) este diferit de zero. Se găsește în consecință

$$y\left(\frac{j}{r}\right) = \mu_j(\lambda), \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (2.14)$$

Prin urmare

$$B_r(x) = \sum_0^r C_r^i x^i (1-x)^{r-i} \mu_i,$$

în care

$$\mu_0 = y(0) = y_0.$$

În mod analog se rezolvă problema (1.32), (1.35).

*Observații.* 3. În mod analog se rezolvă probleme de contur polilocale și integrale pentru ecuațiile integro-diferențiale (1.2), (1.32).

4. Dacă în (2.7), (2.13) cuadraturile nu sînt exacte, atunci, exprimîndu-le cu ajutorul unor agregate de aproximație, așa cum ar fi de exemplu unele agregate recent obținute în cadrul Institutului de calcul din Cluj, coeficienții  $y\left(\frac{i}{r}\right)$  se pot calcula cu aproximație.

5. Este evident că la nr. 2 din paragraful 2 condiția  $r > n$  poate fi omisă.

6. Metoda expusă este aplicată, cu modificările adecvate problemelor considerate, într-unul din articolele următoare, și la rezolvarea sistemelor de ecuații integro-diferențiale.

## РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МНОГОЧЛЕННЫМ МЕТОДОМ

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Настоящая статья входящая в рамки ряда работ авторов прилегающих к области машинной математики [10], [15—18], посвящена исследованию многочленным методом граничных задач (1.1), (1.2); (1.1), (1.32); (1.32), (1.35); (1.1), (1.39) и др. касающихся интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма, Вольтерра или же смешанного.

Разработанный многочленный метод систематически излагается привлекая в качестве аппроксимирующих многочленов полиномы С. Н. Бернштейна [20], причём, в случае, изложенном в п. 2, § 1, рассмотрена и возможность привлечения полиномов Е. Ландау [21].

Аппроксимирующие решения рассмотренных задач получаются (§ 1) после их предварительного трансформирования в системы интегральных уравнений, тогда как в § 2 их решения получаются без предварительного привлечения интегральных уравнений.

Так, например, в случае системы (1.1), (1.2) при  $n \geq m$ , аппроксимирующее решение дано в виде (1.16), тогда как при  $m = n + p$ ,  $p \geq 1$ , это решение дано в форме (1.31).

П. 6, § I посвящен построению эффективной апостериорной оценке погрешности, изложенному на примере задачи (1.1), (1.32).

Несколько замечаний помещенных в тексте статьи указывают на ряд возможных обобщений настоящего исследования.

## RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES PAR LA MÉTHODE POLYNOMIALE

### RÉSUMÉ

Les auteurs, tout en poursuivant la série de leurs études élaborées en collaboration [1—3], [8—9], considèrent ci-dessus, dans l'ordre d'idées de leurs recherches dans le domaine du calcul numérique [10], [15—18], les problèmes à la frontière ou bien des valeurs initiales (1.1), (1.2); (1.1), (1.32); (1.32), (1.35); (1.1), (1.39) et d'autres encore relatifs à la résolution par la méthode polynomiale des équations intégral-différentielles de Fredholm, Volterra ou mixtes.

La méthode polynomiale élaborée est appliquée systématiquement tout en choisissant pour les polynômes d'approximation les polynômes de S. N. Bernstein [20], en y ajoutant, dans un certain cas, les polynômes de E. Landau [21].

Les problèmes proposés sont résolus en les transformant au préalable (§ 1) dans certains systèmes d'équations intégrales, tandis qu'au § 2 on parvient à la résolution des problèmes considérés sans avoir fait recours à de telles équations.

On trouve, par exemple, pour le système (1.1), (1.2), dans le cas  $n \geq m$ , la solution approchée cherchée sous la forme (1.16), tandis que dans le cas où  $m = n + p$ ,  $p \geq 1$  la solution cherchée se présente sous la forme (1.31).

Le point 6 du § 1 est consacré au problème de l'évaluation des erreurs commises par les solutions approximatives adoptées, tandis qu'un nombre d'observations insérées dans le texte indique des voies d'extension possibles des problèmes posés et résolus.

### BIBLIOGRAFIE

1. Манжерон Д., Кривошеин Л. Е., *Приближенное решение краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений*. Бул. Inst. Polit. Iași, s. n., 6 (10), 3—4, 21—30 (1960).
2. — *Приближенные решения некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений*. Бул. Inst. Polit. Iași, s. n. 6 (10), 1—2, 17—28 (1960).
3. — *Некоторые вопросы решения интегро-дифференциальных уравнений*. Analele științ. ale Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, s. n., 7, 1960, Sect. I, Mat., Fiz., Chim., Supliment.
4. D. Mangeron, *Sur certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. C.R. Acad. Sci., Paris, 204, 94—96, 544—546, 1022—1024 (1937).
5. Березанский Ю. М., *О краевых задачах для общих дифференциальных операторов в частных производных*. Доклады АН. СССР, 122, 6, 959—962 (1958).

