STUDIUL ECUAŢIILOR INTEGRO-DIFERENŢIALE PRIN METODA POLINOMIALĂ *)

DE

L. E. KRIVOŠEIN şi D. MANGERON
(Frunze, URSS) (Iaşi)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8–13 decembrie 1960, Cluj.

Introducere

Autorii au consacrat în ultimii ani un şir de lucrări, redactate în colaborare, problemei de elaborare a metodelor de aproximaţie a soluţiilor problemelor de valori iniţiale şi de contur pentru diferite clase de ecuaţii integro-diferenţiale [1, 3].

În legătură cu problema generală de contur pentru ecuaţii de tip neeliptic [4, 5] ei au studiat cu totul recent [8, 9] o nouă clasă de ecuaţii integro-diferenţiale cu *derivate totale* de forma

$$D^n u(x, y) - \lambda(n-1)!^2 [A(x, y)\, u(x, y) + B(x, y)\, D^r u(x, y)] =$$

$$= (n-1)!^2 \left[f(x, y) + \lambda \iint_P E(x, y, \xi, \eta) \sum_0^n F_p(\xi, \eta)\, D^p u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right] \quad (1)$$

în care Du este derivata totală în sensul lui M. Picone [6, 7] în argumentele x, y; $A(x, y)$, $B(x, y)$, $E(x, y, \xi, \eta)$, $F_p(\xi, \eta)$ sînt funcţii continue cunoscute de argumente reale x, y, ξ, η, care nu sînt identic nule în P şi $P - P_1$, $P = \{a \leqslant \xi,\ x \leqslant c;\ b \leqslant y,\ \eta \leqslant d\}$, $P_1 = \{a \leqslant \xi \leqslant x;\ b \leqslant \eta \leqslant y\}$, λ este un parametru, iar $u(x, y)$ este soluţia căutată ce satisface (problema omogenă a lui Goursat) condiţiile

$$[D^i u]_{x=a} = [D^i u]_{y=b} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \quad (2)$$

*) Această lucrare se publică şi în limba rusă în revista „Mathematica" vol. 4 (27), 1962.

sau, dacă se mai presupune pentru simplificare $r = p = 0$, condiţiile (problema omogenă de contur)

$$u|_L \equiv 0, \quad Du|_{L_1} \equiv \ldots \equiv D^{n-1}u|_{L_1} = 0,$$
$$L_1 = \{x = a,\ b \leqslant y \leqslant d\,;\ y = b,\ a \leqslant x \leqslant c\}, \tag{3}$$

în care L este conturul domeniului P, [8, 9].

În cadrul problemelor de calcul numeric[1]), ce se dezvoltă atît de impetuos astăzi, al doilea dintre autori a elaborat metoda ecuaţiilor integrale în mecanica sistemelor neliniare [10], iar primul, participînd creator la lucrările şcolii kirghize de teoria ecuaţiilor integro-diferenţiale [11, 12], în plină înflorire sub conducerea acad. Ia. V. Bîkov [13, 14], a publicat cu totul recent o vastă contribuţie la metoda acad. A. I. Nekrasov de rezolvare a ecuaţiilor integro-diferenţiale de ordin n şi a elaborat, folosind metodele lui S. A. Ceaplîghin, Iu. D. Sokolov, metoda perturbaţiilor, metoda diferenţelor finite ş.a., numeroase metode de calcul cu aproximaţie a soluţiilor ecuaţiilor integro-diferenţiale avînd caracteristici variate (vezi [15—18]).

În acest articol se folosesc pe scară largă, în cadrul metodei polinomiale elaborată de autori de rezolvare cu aproximaţie a ecuaţiilor integro-diferenţiale, polinoamele lui S. N. Bernstein $B_r(x)$ [20] şi — într-o măsură mai redusă — polinoamele lui E. Landau [21].

Metoda elaborată îşi are la bază clasica teoremă a lui K. Weierstrass (vezi [22], p. 14—15) relativă la aproximarea funcţiilor continue prin polinoame: *Dacă $f(x)$ posedă derivata continuă de ordin k, $f^{(k)}(x)$, atunci derivatele $B_r^{(k)}(x)$ au ca limită $f^{(k)}(x)$*:

$$\lim_{r\to\infty} B_r^{(k)}(x) = f^{(k)}(x),\ (k = 1, 2, \ldots).$$

S. E. Mikeladze [23] a aplicat polinoamele $B_r(x)$ la rezolvarea diferitelor probleme relative la ecuaţii integro-diferenţiale de forma

$$y(x) + \int_0^1 K(x,t)\,\frac{d}{dt}F\,[y(t)]\,dt = f(x). \tag{4}$$

În cele ce urmează se determină soluţii pentru diferite probleme de contur relative la o clasă de ecuaţii integro-diferenţiale de ordin superior, folosindu-se în acest scop şi alte căi.

Menţionăm că în cele ce urmează nu se discută problemele de existenţă şi de unicitate a soluţiilor, presupunîndu-se că atare probleme au fost rezolvate pozitiv în prealabil pentru totalitatea problemelor puse.

[1]) A se vedea, de exemplu, în cadrul activităţii pe scară mondială volumul mereu crescînd al numărului de referate consacrate calculului numeric inserate în paginile revistei „Referativnîi jurnal-matematika" sau — restrîngîndu-ne la manifestările ştiinţifice recente în domeniu — şirul de lucrări consacrate calculului numeric şi expuse la Colocviul de calcul numeric organizat în decembrie 1960, cu participare internaţională, de către Institutul de calcul al Filialei Cluj a Academiei Republicii Populare Romîne.

§ 1. Rezolvarea cu aproximaţie a problemelor de contur pe bază de sisteme de ecuaţii integrale

1. Să considerăm problema de contur neomogenă

$$R_j\,[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{ij}y^{(i)}(0) + \beta_{ij}y^{(i)}(1)] = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

pentru ecuaţia integro-diferenţială de tip Fredholm

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\,y^{(i)}(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 \sum_0^m K_j(x,t)\,y^{(j)}(t)\,dt, \tag{1.2}$$

în care α_{ij}, β_{ij}, γ_j sînt numere cunoscute, $a_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ şi $K_s(x,t)$ $(s = 0, 1, \ldots, m)$ sînt funcţii continue, $a_n(x) \equiv 1$ pentru $x, t \in [0,1]$, λ este un parametru numeric, $n \geqslant m$.

Soluţia problemei (1.1), (1.2) o construim sub forma

$$y(x) = \sum_1^n d_i\,z_i(x) + \int_0^1 G(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1.3}$$

în care $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$ reprezintă un sistem de funcţii de n ori derivabile avînd wronskianul $\delta(x)$ diferit de zero în intervalul $[0, 1]$, $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sînt nişte constante deocamdată necunoscute şi $G(x,t)$ este funcţia lui Green relativă la problema

$$R_j\,[z] = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.4}$$

$$z^{(n)}(x) + \sum_1^n c_i(x)\,z^{(n-i)}(x) = 0, \tag{1.5}$$

$c_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fiind coeficienţi cunoscuţi, funcţii continue în $[0, 1]$, iar $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (1.5).

Din (1.1), (1.3) avem

$$\sum_{i=1}^n d_i\,R_j\,[z_i] = \gamma_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.6}$$

Fie

$$d_i = \rho_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.7}$$

în care $\rho_1\ \rho_2, \ldots, \rho_n$ sînt mărimi cunoscute, soluţia sistemului (1.6).

Ecuaţia (1.3), ţinînd seama de (1.7), ia forma

$$y(x) = \psi(x) + \int_0^1 G(x,t)\varphi(t)\,dt, \tag{1.8}$$

în care

$$\psi(x) \equiv \sum_{1}^{n} \rho_i \, z_i(x).$$

Substituirea (1.8) în (1.2) conduce la ecuaţia integrală

$$\varphi(x) - \int_0^1 [M_1(x, t) + \lambda M_2(x, t)]\varphi(t)\, dt = F(x, \lambda), \qquad (1.9)$$

în care funcţiile $M_1(x, t)$, $F(x, \lambda)$, $M_2(x, t)$ sînt definite după cum urmează :

$$M_1(x, t) \equiv - \sum_{0}^{n-2} a_i(x)\, G_x^{(i)}(x, t) - \sum_{n-1}^{n} a_i(x)\, [G_x^{(i)}\underset{x \leqq t+0}{(x, t+0)} + G_x^{(i)}\underset{x \geqq t-0}{(x, t-0)}],$$

$$F(x, \lambda) \equiv f(x) + \lambda \int_0^1 \sum_{0}^{m} K_i(x, t)\, \psi^{(i)}(t) dt - \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \sum_{j=1}^{n} \rho_j \, z_j^{(i)}(x),$$

$$\int_0^1 M_2(x, t)\, \varphi(t)\, dt \equiv \int_0^1 \sum_{0}^{m} K_i(x, \tau) \left[\int_0^1 G(\tau, t)\, \varphi(t)\, dt \right]^{(i)} d\tau.$$

Sistemul de ecuaţii integrale (1.8), (1.9) este echivalent cu problema (1.1), (1.2) în sensul că funcţia (1.8), în care $\varphi(x)$ satisface ecuaţia (1.9), este soluţie a problemei (1.1), (1.2).

Fie $\varphi_1(x)$ o soluţie aproximativă a ecuaţiei (1.9). Pentru soluţia aproximativă a problemei iniţiale se ia atunci funcţia

$$y_1(x) = \psi(x) + \int_0^1 G(x, t)\, \varphi_1(t)\, dt. \qquad (1.10)$$

Să alegem pentru funcţia $\varphi_1(t)$ polinomul lui S. N. Bernstein

$$b_r(x) \equiv \sum_{0}^{r} C_r^i \, x^i (1 - x)^{r-i} \varphi\left(\frac{i}{r}\right) \qquad (1.11)$$

în care C_r^i este obişnuitul simbol al combinărilor din r cîte i elemente. Constantele necunoscute $\varphi\left(\frac{i}{r}\right)$ se determină din condiţia

$$\varphi(x') - \int_0^1 M(x', t, \lambda)\, b_2(t)\, dt = F(x', \lambda) \qquad (1.12)$$

pentru toţi $x' = 0\,;\ \frac{1}{r}\,;\ \frac{2}{r}\,; \ldots ;\ \frac{r-1}{r}\,;\ 1$, în care

$$M(x, t, \lambda) \equiv M_1(x, t) + \lambda M_2(x, t).$$

Să transcriem (1.12) sub forma

$$\sum_{j=0}^{r} s_{ij}(\lambda)\, \varphi\left(\frac{j}{r}\right) = F\left(\frac{i}{r}, \lambda\right) \quad (i = 0, 1, \ldots, r). \qquad (1.13)$$

În ipoteză că determinantul $\Delta_r(\lambda)$ al sistemului (1.13) este diferit de zero

$$\Delta_r(\lambda) \equiv \det \mid s_{ij}(\lambda) \mid \neq 0, \qquad (1.14)$$

avem

$$\varphi\left(\frac{j}{r}\right) = \Delta_{rj}(\lambda) : \Delta_r(\lambda) \quad (j = 0, 1, \ldots, r), \qquad (1.15)$$

în care determinantul $\Delta_{rj}(\lambda)$ se obţine din $\Delta_r(\lambda)$ dacă în coloana de ordinul j a acestuia figurează $F(0, \lambda), \ldots, F(1, \lambda)$.

Aşadar, drept soluţie aproximativă a problemei (1.1), (1.2) se ia funcţia

$$y_r(x) = \psi(x) + \int_0^1 G(x, t) \sum_{0}^{r} C_r^i t^i (1-t)^{r-i} [\Delta_{ri}(\lambda) : \Delta(\lambda)] dt, \qquad (1.16)$$

avîndu-se totodată

$$\lim_{r \to \infty} y_r(x) = y(x),$$

adică procesul de trecere la limită conducînd la soluţia exactă a problemei (1.1), (1.2).

Observaţii. 1. Coeficienţii $\varphi\left(\frac{i}{r}\right)$ pot fi determinaţi folosind, în loc de (1.13), sistemul

$$\sum_{j=0}^{r} P_{ij}(\lambda)\, \varphi\left(\frac{j}{r}\right) = F\left(\frac{i}{r}, \lambda\right) \quad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

în care

$$P_{ij}(\lambda) = C_r^i \left[\left(\frac{i}{r}\right)^j \left(1 - \frac{i}{r}\right)^{r-j} - \int_0^1 M\left(\frac{i}{r}, t, \lambda\right) t^j \, (1 - t)^{r-j} \, dt \right].$$

2. Rădăcinile ecuaţiei $\Delta_r(\lambda) = 0$ constituie valori aproximative ale valorilor proprii din problema (1.1), (1.2).

Dacă $m = n + p$, $p \geqslant 1$ şi funcţiile $a_i(x)$, $f(x)$, $K_j(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n\,;\ j = 0, 1, \ldots, m)$ sînt derivabile de p ori în raport cu x, construcţia soluţiei aproximative a problemei puse poate fi făcută după cum urmează.

Fie

$$y(x) = \sum_{1}^{m} d_i z_i(x) + \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t) dt, \qquad (1.17)$$

în care $c_1, c_2, \ldots, c_m$ sînt constante necunoscute, $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_m(x)$ este un sistem de funcţii liniar independente de m ori derivabile, avînd wronskianul $\delta(x) \neq 0$ pentru toţi $x \in [0,1]$,

$$K(x,t) \equiv \sum_1^m \delta_i(t)\, z_i(t) : \delta(t), \tag{1.18}$$

$\delta_i(t)$ este complementul algebric al elementului situat la intersecţia coloanei de ordin i cu ultima linie a determinantului $\delta(t)$.

Substituirea (1.18) în (1.1) şi (1.2) conduce respectiv la ecuaţiile

$$\sum_{i=1}^m d_i R_j[z_i] = \gamma_j - R_j\left[\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt\right], \quad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{1.20}$$

$$\int_0^x M_3(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) + \sum_1^m c_i\sigma_i(x,\lambda) + \lambda\int_0^1 M_4(x,t)\,\varphi(t)dt, \tag{1.21}$$

în care $M_3(x,t)$, $\sigma_i(x,\lambda)$, $M_4(x,t)$ sînt funcţii cunoscute.

Din (1.21) se mai obţine

$$\sum_{i=1}^m c_i\sigma_i^{(j)}(x,\lambda)\Big|_{x=0} = -\left\{f(x) + \lambda\int_0^1 M_4(x,t)\,\varphi(t)\,dt\right\}_{x=0}^{(j)} \quad (j=0,1,\ldots,p-1). \tag{1.22}$$

Dacă determinantul det $|R_j[z_i]\,;\ \sigma_i^{(k)}(0,\lambda)\,|$ al sistemului (1.20), (1.22) este diferit de zero, se găseşte, ca şi în cazul $n \geqslant m$,

$$c_i = p_i(\lambda) + \int_0^1 \xi_i(t,\lambda)\,\varphi(t)\,dt \quad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{1.23}$$

Derivînd (1.21) de p ori şi folosind (1.23) se ajunge la o ecuaţie integrală de forma

$$\varphi(x) - \int_0^x M_5(x,t)\,\varphi(t)\,dt - \int_0^1 M_6(x,t,\lambda)\,\varphi(t)\,dt = \Phi(x,\lambda). \tag{1.24}$$

Ţinînd seama de (1.23), să transcriem (1.18) sub forma

$$y(x) = \psi(x,\lambda) + \int_0^1 G(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{1.25}$$

Toate deducerile ulterioare pot fi făcute de acum încolo în acelaşi mod ca şi la începutul acestui paragraf.

2. Polinomul $b_r(x)$ a fost construit în ipoteză că integralele

$$\int_0^1 M(x,t,\lambda)\, t^i\,(1-t)^{r-i}dt, \quad (i=0,1,\ldots,r) \tag{1.26}$$

pot fi calculate exact. În cazul contrar, metoda indicată rezultă puţin eficace. Dacă integrala (1.26) nu se calculează exact, atunci (1.26) se determină cu aproximaţie. Se poate aproxima, de exemplu, funcţia $\varphi(x)$ cu ajutorul polinoamelor lui E. Landau [21] deja menţionate :

$$L_k(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\int_0^1 \varphi(t)\,[1-(x-t)^2]^k dt. \tag{1.27}$$

Substituind, de exemplu, (1.27) în (1.9), se obţine o ecuaţie integrală de tip Fredholm de prima specie :

$$\int_0^1 D_k(x,t,\lambda)\,\varphi(t)\,dt \approx L(n,\lambda). \tag{1.28}$$

De aici se obţine

$$\sum_1^r A_i D_k(x,t_i,\lambda)\,\varphi(t_i) \approx L(x,\lambda) - \rho(x,\lambda) \tag{1.29}$$

în care A_i şi t_i sînt respectiv coeficienţii şi nodurile formulei de cuadratură mecanică alese[2] şi $\rho(x,\lambda)$ este eroarea comisă cu ocazia alegerii făcute.

Dacă determinantul det $|\,A_i D_k\,(t_j, t_i, \lambda)\,| \neq 0$, atunci, presupunînd în (1.29) $x = t_j$ şi neglijînd $\rho(x,\lambda)$, se găseşte valoarea aproximativă a funcţiei $\varphi(x)$ în nodurile t_i :

$$\varphi(t_i) \approx \xi_i(\lambda) \quad (i=1, 2, \ldots, r).$$

Folosind pentru evaluarea membrului al doilea din (1.27) formula de cuadratură aproximată

$$\int_0^1 \varphi(t)\,[1-(x-t)^2]^k dt \approx \sum_1^r A_i\,[1-(x-t_i)^2]^k\varphi(t_i) \approx \sum_1^r A_i\,[1-(x-t_i)^2]^k\,\xi_i(\lambda) \tag{1.30}$$

rezultă că pentru soluţia aproximativă a problemei (1.1), (1.2) se poate alege funcţia

$$y_k(x) = \psi(x) + \frac{1}{2}\,\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\sum_1^r A_i\xi_i\int_0^1 G(x,t)\,[1-(t-t_i)^2]^k dt. \tag{1.31}$$

---

[2] Autorii au în studiu, într-o lucrare ulterioară relativă la aproximarea soluţiilor ecuaţiilor integro-diferenţiale, folosirea formulelor de cuadraturi aproximative, elaborate cu succes în ultimii ani la Institutul de calcul al Filialei Cluj a Academiei R.P.R., sub conducerea prof. T. Popoviciu şi prof. D. V. Ionescu.

3. Să luăm în (1.1) $n \geqslant m$ şi $\beta_{ij} = 0$ pentru toţi $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $j = 1, 2, \ldots, n$. În acest caz problema de contur devine o problemă de valori iniţiale în corespondenţă cu datele

$$R_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} y^{(i)}(0) = \gamma_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.32}$$

Soluţia problemei (1.1), (1.2) se construieşte sub forma

$$y(x) = \sum_1^n d_i z_i(x) + \int_0^x D(x, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1.33}$$

în care $z_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ este un sistem de funcţii independente avînd wronskianul diferit de zero în $[0, 1]$, $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sînt numere cunoscute, definite prin sistemul de ecuaţii

$$\sum_{i=1}^n d_i z_i^{(j)}(0) = \gamma_j \; (j = 1, 2, \ldots, n); \quad D(x, t) \equiv \sum_1^n \delta_i(t)\, z_i(x) : \delta(t),$$

$\delta_i(t)$ fiind complementul algebric al elementului situat la intersecţia coloanei de ordin i cu ultima linie a determinantului $\delta(t)$.

Substituind (1.33) în (1.1), se obţine o ecuaţie integrală de forma

$$\varphi(x) - \int_0^x P_1(x, t)\, \varphi(t)\, dt - \lambda \int_0^1 P_2(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x, \lambda) \tag{1.34}$$

a cărei soluţie poate fi aproximată prin polinomul (1.11).

Totalitatea deducerilor ulterioare se fac în acelaşi mod ca şi la p. 1.

4. Să considerăm acum problema (1.32) pentru ecuaţia integro-diferenţială de tip Volterra

$$\sum_0^n a_i(x) y^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \sum_0^m K_i(x, t) y^{(i)}(t)\, dt, \quad n \geqslant m. \tag{1.35}$$

Substituind (1.33) în (1.35), se obţine o ecuaţie integrală de tip Volterra

$$\varphi(x) - \int_0^x [P_1(x, t) + \lambda P_3(x, t)]\, \varphi(t)\, dt = h(x, \lambda), \tag{1.36}$$

în care $P_1(x, t)$, $P_3(x, t)$ şi $h(x, \lambda)$ sînt funcţii cunoscute.

Totodată coeficienţii $\varphi\left(\frac{i}{r}\right)$ se determină din sistemul de ecuaţii

$$\sum_{i=0}^r s_{ij}(\lambda)\, \varphi\left(\frac{i}{r}\right) = h\left(\frac{j}{r}, \lambda\right), \; \varphi(0) = h(0, \lambda), \; (j = 0, 1, \ldots, r-1), \tag{1.37}$$

în acelaşi mod ca şi la nr. 1.

Dacă $\varphi\left(\frac{i}{r}\right) = g_i(\lambda)$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ este soluţia sistemului (1.37), atunci

$$y_r(x) = \sum_1^n d_i z_i(x) + \int_0^x D(x, t) \left[\sum_1^n C_r^i t^i (1 - t)^{r-i} g_i(\lambda)\right] dt \tag{1.38}$$

este o soluţie aproximativă a problemei (1.32), (1.35).

5. În ipoteză că în (1.1) $\alpha_{ij} = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, avem

$$R_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ij} y^{(i)}(1) = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.39}$$

Substituind (1.33) în ecuaţia integro-diferenţială (1.35), se obţine o ecuaţie integrală mixtă, întrucîtva diferită de (1.34). În adevăr, substituind (1.33) în (1.39), se obţine

$$\sum_{i=1}^n d_i R_j[z_i] = \gamma_j - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ij} \int_0^1 D_x^{(i)}(1, t) \varphi(t) dt \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.39'}$$

Deoarece determinantul $\det | R_j[z_i] | \neq 0$, rezultă din (1.39′)

$$d_i = \varepsilon_i + \int_0^1 \varepsilon_i(t)\, \varphi(t)\, dt. \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Prin urmare

$$y(x) = \sum_1^n \varepsilon_i z_i(x) + \int_0^x D(x, t)\, \varphi(t)\, dt + \int_0^1 \sum_1^n z_i(x)\, \varepsilon_i(t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{1.40}$$

Înlocuind (1.40) în (1.35), se ajunge la ecuaţia integrală

$$\varphi(x) - \int_0^x [P_1(x, t) + \lambda P_2(x, t)]\, \varphi(t)\, dt = g(x, \lambda) + \int_0^1 [P_4(x, t) + \lambda P_5(x, t)] \varphi(t) dt.$$

Pentru determinarea coeficienţilor $\varphi\left(\frac{i}{r}\right)$ se construieşte un sistem de forma (1.37), pe care-l notăm cu (1.37′). Dacă

$$\det | \bar{s}_{ij}(\lambda) | \neq 0,$$

atunci coeficienţii $\varphi\left(\frac{i}{r}\right)$ se determină în mod univoc din sistemul (1.37′), iar soluţia aproximativă a problemei (1.38), (1.35) se construieşte sub forma

$$y_r(x) = \sum_1^n \varepsilon_i z_i(x) + \int_0^x D(x, t)\, b_r(t)\, dt + \int_0^1 \sum_0^n z_i(x)\, \varepsilon_i(t)\, b_r(t)\, dt. \tag{1.41}$$

Rădăcinile ecuaţiei

$$\det |\bar{s}_{ij}(\lambda)| = 0$$

constituie un ansamblu de valori aproximative pentru valorile proprii ale problemei (1.38), (1.35).

6. Deoarece ordinul de mărime al erorii comise în cazul folosirii pentru aproximaţie a polinoamelor lui S. N. Bernstein $b_r(x)$, este egal cu $\frac{1}{r}$, adică

$$|b_r(x) - \varphi(x)| = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

rezultă că avem şi

$$|y_r(x) - y(x)| = O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{1.42}$$

În ipoteza îndeplinirii unui număr de condiţii suplimentare, se reuşeşte a se da o evaluare efectivă a erorii comise. Să expunem metoda de evaluare a unei atare erori folosind drept schemă de lucru problema (1.1), (1.32).

Introducînd funcţia

$$P(x), t, \lambda) \equiv \begin{cases} P_1(x, t) + \lambda P_2(x, t), & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \lambda P_2(x, t), & x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

ecuaţia (1.34) se transcrie sub forma

$$\varphi(x) - \int_0^1 P(x, t, \lambda)\, \varphi(t)\, dt = f(x, \lambda). \tag{1.43}$$

Fie $\omega_r(x, \lambda)$ decalajul obţinut ca rezultat al înlocuirii lui $b_r(x)$ în (1.43). Atunci

$$b_r(x) - \varphi(x) - \int_0^1 P(x, t, \lambda)\,[b_r(t) - \varphi(t)]\, dt = \omega_r(x, \lambda). \tag{1.44}$$

Dacă în domeniul $g = \{0 \leqslant x \leqslant 1\,;\ \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2\}$ are loc inegalitatea

$$l = 1 - \max_g \int_0^1 |P(x, t, \lambda)|\, dt > 0, \tag{1.45}$$

atunci

$$\max_{[0,1]} |b_r(x) - \varphi(x)| \leqslant \max_g |\omega_r(x, \lambda)| : l = \mu_r.$$

Prin urmare decalajul între funcţia

$$y_r(x) = \sum_1^n d_i\, z_i(x) + \int_0^x D(x, t)\, b_r(t)\, dt$$

şi soluţia exactă (1.33) a problemei considerate poate fi evaluat prin inegalitatea

$$|y_r(x) - y(x)| \leqslant \mu_r \int_0^x |D(x, t)|\, dt, \quad x \in [0, 1]. \tag{1.46}$$

În mod analog se construiesc şi evaluările erorilor în alte cazuri considerate.

§ 2. Rezolvarea cu aproximaţie a problemelor de contur independent de considerarea ecuaţiilor integrale auxiliare

1. Să construim o soluţie aproximativă a problemei (1.1), (1.2) evitînd construcţia sistemelor rezolvante de ecuaţii integrale.

Fie

$$B_r(x) = \sum_0^r C_r^i\, x^i (1 - x)^{r-i}\, y\left(\frac{i}{r}\right) \tag{2.1}$$

polinomul lui S. N. Bernstein corespunzător cu soluţia $y(x)$ a problemei (1.1), (1.2) ($r = n + k$, k fiind un număr întreg şi pozitiv).

Substituind (2.1) în (1.1) se ajunge la sistemul

$$\sum_{i=0}^{n-0} y\left(\frac{i}{r}\right) R_\nu [C_r^i x^i (1 - x)^{r-i}] = \gamma_\nu - \sum_{i=n}^{r} y\left(\frac{i}{r}\right) R_\nu [C_r^i\, x^i (1 - x)^{r-i}],$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

pe care-l transcriem într-o formă mai condensată

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{i\nu}\, y\left(\frac{i}{r}\right) = \gamma_\nu - \sum_{i=n}^{r} y\left(\frac{i}{r}\right) \omega_{i\nu}, \ (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.2}$$

Fie

$$\det |\omega_{i\nu}|_0^{n-1} \equiv \begin{vmatrix} \omega_{01} & \omega_{11} & \cdots & \omega_{n-1\,1} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{n-2\,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{0\,n-1} & \omega_{1\,n-1} & \cdots & \omega_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.3}$$

Atunci din (2.2) se obţine

$$y\left(\frac{i}{r}\right) = s_i + \sum_{i=n}^{r} s_{i\nu}\, y\left(\frac{i}{r}\right), \quad (i = 0, 1, \ldots, n - 1), \tag{2.4}$$

în care s_i şi $s_{i\nu}$ sînt numere cunoscute.

În consecinţă

$$B_r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_r^i\, x^i (1-x)^{r-i}\left[s_i + \sum_{\nu=n}^{r} s_{i\nu}\, y\left(\frac{\nu}{r}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{n}^{r} C_r^i x^i (1-x)^{r-i}\, y\left(\frac{i}{r}\right) \equiv \psi_r(x) + \sum_{\nu=n}^{r} \psi_{r\nu}(x)\, y\left(\frac{\nu}{r}\right). \tag{2.5}$$

Coeficienţii $y\left(\frac{\nu}{r}\right)$, $(\nu = n, n+1, \ldots, r)$ rămaşi necunoscuţi se determină din condiţia ca decalajul

$$\alpha_r(x, \lambda) \equiv \sum_{0}^{n} a_i(x) B_r^{(i)}(x) - \lambda \int_0^1 \sum_{1}^{m} K_i(x, t) B_r^{(i)}(t) dt - f(x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\nu=n}^{r} \omega_\nu(x, \lambda, r)\, y\left(\frac{\nu}{r}\right) - \eta(x, \lambda, r) \tag{2.6}$$

să fie egal cu zero în punctele de interpolare $x = \frac{n}{r}; \frac{(n+1)}{r}; \ldots; 1$, adică

$$\sum_{\nu=n}^{r} \omega_\nu\left(\frac{i}{r}, \lambda, r\right) y\left(\frac{\nu}{r}\right) = \eta\left(\frac{i}{r}, \lambda, r\right), \quad (i = n, n+1, \ldots, r). \tag{2.7}$$

În ipoteză că determinantul $\det\left|\omega_\nu\left(\frac{i}{r}, \lambda, r\right)\right|$ al sistemului (2.7) este diferit de zero, din (2.7) se obţine

$$y\left(\frac{\nu}{r}\right) = \sigma_\nu(r, \lambda) \qquad (\nu = n, n+1, \ldots, r). \tag{2.8}$$

Avem aşadar

$$B_r(x) = \psi_r(x) + \sum_{\nu=n}^{r} \psi_{r\nu}(x)\, \sigma_\nu(r, \lambda). \tag{2.9}$$

Rădăcinile ecuaţiei

$$\det\left|\omega_\nu\left(\frac{i}{r}, \lambda, r\right)\right| = 0$$

constituie un ansamblu de valori de aproximaţie a valorilor proprii a problemei (1.1), (1.2).

În mod analog se construieşte soluţia aproximativă a problemei (1.1) pentru ecuaţia integro-diferenţială de tip Volterra (1.35).

2. Coeficienţii $y\left(\frac{i}{r}\right)$ ai polinomului (2.1) pot fi determinaţi şi pe o cale întrucîtva diferită.

Se consideră, de exemplu, problema (1.1), (1.2). Întroducînd operatorul

$$T[y] \equiv -\sum_{0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x) + \lambda \int_0^1 \sum_{0}^{m} K_i(x, t)\, y^{(i)}(t)\, dt, \tag{2.10}$$

rezultă din (1.2)

$$y(x) = \sum_{1}^{n-1} x^i \frac{y_0^{(i)}}{i!} + \int_0^x [(x-t)^{n-1} : (n-1)!]\, T[y]\, dt \equiv$$

$$\equiv \xi(x) + \int_0^x R(x, t)\, T[y]\, dt, \tag{2.11}$$

în care constantele $y_0^{(i)} = y^{(i)}(0)$ sînt determinate pe baza condiţiilor (1.32). Să determinăm coeficienţii $y\left(\frac{i}{r}\right)$ din condiţia

$$y\left(\frac{i}{r}\right) = \xi\left(\frac{i}{r}\right) + \int_0^{\frac{i}{r}} R\left(\frac{i}{r}\right), t)\, T[B_r]\, dt, \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{2.12}$$

sau

$$y\left(\frac{i}{r}\right) - \sum_{j=0}^{r} m_{ij}(\lambda)\, y\left(\frac{j}{r}\right) = \xi_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{2.13}$$

în care

$$m_{ij}(\lambda) = C_r^j \int_0^{\frac{i}{r}} R\left(\frac{i}{r}, t\right) T[t^j (1-t)^{r-j}]\, dt, \quad \xi_i = \xi\left(\frac{i}{r}\right).$$

Presupunem că determinantul $\det|d_r(\lambda)|$ al sistemului (2.13) este diferit de zero. Se găseşte în consecinţă

$$y\left(\frac{j}{r}\right) = \mu_j(\lambda), \quad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{2.14}$$

Prin urmare

$$B_r(x) = \sum_{0}^{r} C_r^i\, x^i (1-x)^{r-i}\, \mu_i,$$

în care

$$\mu_0 = y(0) = y_0.$$

În mod analog se rezolvă problema (1.32), (1.35).

Observații. 3. În mod analog se rezolvă probleme de contur polilocale și integrale pentru ecuațiile integro-diferențiale (1.2), (1.32).

4. Dacă în (2.7), (2.13) cuadraturile nu sînt exacte, atunci, exprimîndu-le cu ajutorul unor agregate de aproximație, așa cum ar fi de exemplu unele agregate recent obținute în cadrul Institutului de calcul din Cluj, coeficienții $y\left(\frac{i}{r}\right)$ se pot calcula cu aproximație.

5. Este evident că la nr. 2 din paragraful 2 condiția $r > n$ poate fi omisă.

6. Metoda expusă este aplicată, cu modificările adecvate problemelor considerate, într-unul din articolele următoare, și la rezolvarea sistemelor de ecuații integro-diferențiale.

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МНОГОЧЛЕННЫМ МЕТОДОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Настояшая статья входящая в рамки ряда работ авторов прилегающих к области машинной математики [10], [15—18], посвящена исследованию многочленным методом граничных задач (1.1), (1.2); (1.1), (1.32); (1.32), (1.35); (1.1), (1.39) и др. касающихся интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма, Вольтерра или же смешанного.

Разработанный многочленный метод систематически излагается привлекая в качестве аппроксимирующих многочленов полиномы С. Н. Бернштейна [20], причём, в случае, изложенном в п. 2, § 1, рассмотрена и возможность привлечения полиномов Е. Ландау [21].

Аппроксимирующие решения рассмотренных задач получаются (§ 1) после их предварительного трансформирования в системы интегральных уравнений, тогда как в § 2 их решения получаются без предварительного привлечения интегральных уравнений.

Так, например, в случае системы (1 . 1), (1 . 2) при $n \geq m$, аппроксимирующее решение дано в виде (1.16), тогда как при $m = n + p$, $p \geq 1$, это решение дано в форме (1.31).

П. 6, § I посвящен построению эффективной апостериорной оценке погрешности, изложенному на примере задачи (1.1), (1.32).

Несколько замечаний помещенных в тексте статьи указывают на ряд возможнвых обобщений настоящего исследования.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES PAR LA MÉTHODE POLYNOMIALE

RÉSUMÉ

Les auteurs, tout en poursuivant la série de leurs études élaborées en collaboration [1—3], [8—9], considèrent ci-dessus, dans l'ordre d'idées de leurs recherches dans le domaine du calcul numérique [10], [15—18], les problèmes à la frontière ou bien des valeurs initiales (1.1), (1.2) ; (1.1), (1.32) ; (1.32), (1.35) ; (1.1), (1.39) et d'autres encore relatifs à la résolution par la méthode polynomiale des équations intégro-différentielles de Fredholm, Volterra ou mixtes.

La méthode polynomiale élaborée est appliquée systématiquement tout en choisissant pour les polynomes d'approximation les polynomes de S. N. Bernstein [20], en y ajoutant, dans un certain cas, les polynomes de E. Landau [21].

Les problèmes proposés sont résolus en les transformant au préalable (§ 1) dans certains systèmes d'équations intégrales, tandis qu'au § 2 on parvient à la résolution des problèmes considérés sans avoir fait recours à de telles équations.

On trouve, par exemple, pour le système (1.1), (1.2), dans le cas $n \geqslant m$, la solution approchée cherchée sous la forme (1.16), tandis que dans le cas où $m = n + p$, $p \geqslant 1$ la solution cherchée se présente sous la forme (1.31).

Le point 6 du § 1 est consacré au problème de l'évaluation des erreurs commises par les solutions approximatives adoptées, tandis qu'un nombre d'observations insérées dans le texte indique des voies d'extension possibles des problèmes posés et résolus.

BIBLIOGRAFIE

1. Манжерон Д., Кривошеин Л. Е., *Приближенное решение краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.* Bul. Inst. Polit. Iași, s. n., **6** **(10)**, *3—4*, 21—30 (1960).
2. — *Приближенные решения некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений.* Bul. Inst. Polit. Iași, s. n. **6** **(10)**, *1—2*, 17—28 (1960).
3. — *Некоторые вопросы решения интегро-дифференциальных уравнений.* Analele științ. ale Univ. „Al. I. Cuza", Iași, s. n., **7**, 1960, Secț. I, Mat., Fiz., Chim., Supliment.
4. D. Mangeron, *Sur certains problèmes a la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* C.R. Acad. Sci., Paris, **204**, 94—96, 544—546, 1022—1024 (1937).
5. Березанский Ю. М., *О краевых задачах для общих дифференциальных операторов в частных производных.* Доклады А.Н. СССР, **122**, *6*, 959—962 (1958).

6. Picone M., *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica-Matematica*. Ann. Sci. de l'Univ. Jassy, I-ère Sect., Math., Phys., Chimie, **26**, *1*, 183–232 (1940)

7. Mangeron D., *Sur les problèmes de Dirichlet pour les équations aux „dérivées totales"*. Bul. Inst. Polit. Iași, s.n., **3** (**7**), 3–4, 49–52 (1957).

8. Mangeron D., Krivošein L. E., *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone*. Atti dell'Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **29**, *2* sem., fasc. ferie, (1961).

9. Mangeron D., Krivochéine L. E., *Sur quelques problèmes de l'approximation relatifs à une nouvelle classe d'équations intégrodifférentielles*. Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences. Sci. Math., **9** (1961).

10. Mangeron D., *The Integral Equations Method in Nonlinear Mechanics*. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Symposium on Nonlinear Mechanics. Institute of Mathematics. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev, 1961, 1–4.

11. *** *Исследования по интегро-дифферениальным уревнениям в Киргизии*. Акад. Наук Кирг. ССР, Ин-т физ., мат. и мех., Фрунзе, 1961.

12. Кривошеин Л. Е., *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизком Гос. Университете*. In volumul „Материалы 10-й научной конференции профессорско-преподавательского состава физ.-мат. фак. (секция мат.)", Фрунзе, 1961, p. 3—13.

13. Быков Я. В., *О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений*. Изд. Кирг. Гос. Ун-та, Фрунзе, 1957.

14. Быков Я. В., *О некоторых методах построения решений интегральных уравнений*. Акад. Наук Кирг. СССР, Ин-т физ., мех. и мат. Фрунзе, 1961.

15. Кривошеин Л. Е., *Об одном общем методе решения систем линейных интегро-дифференциальных уравнений*. In volumul „Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии", Акад. Наук Кирг. ССР, Фрунзе, 1961, p. 191—199.

16. Кривошеин Л. Е., *К решению одной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений*. In volumul „Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии", Акад.. Наук. Кирг. ССР, Фрунзе, 1961, p. 177—189.

17. Кривошеин Л. Е., *Приближенное решение некоторых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений*. Автореферат диссертации канд. физ. мат. наук. Среднеазиатский Гос. Ун-т, Ташкент, 1958.

18. Кривошеин Л. Е., *Приближенное решение некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений*. Bulet. Inst. Polit. Iași, **5** (**9**), s.n., *3—4*, 39—50 (1959).

19. Weierstrass K., *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente*. Math. Werke, Bd. III, Abh. III, Berlin, Mayer-Müller, 1903, p. 1–37.

20. Бернштейн С. Н., *Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей*. Соч., т. I, Изд. АН СССР, 1952, я. 105—106.

21. Landau E., *Über die Approximation einer stetigen Funktionen durch eine ganze rationale Funktion* Rend. Circ. Mat., Palermo, **25**, 337–345 (1908).

22. Гончаров В. Л., *Теория интерполирования и приближения функций*. ГИТТЛ, Москва, 1954, изд. 2-е.

23. Микеладзе Ш. Е., *Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью многочленов*. Тр. Тбилиского матем.ин-та им. Размадзе, **26**, 264—279 (1959).

Primit la 10. X. 1961.