

1. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
2. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
3. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
4. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
5. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
6. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
7. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
8. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
9. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
10. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
11. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
12. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
13. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
14. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
15. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
16. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
17. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
18. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
19. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.
20. Moisewitsch L. N. "Sur les problèmes de la théorie des intégrales multiples" (en russe), *Travaux de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1959, 10, 1-2, 1-10.

CALCULUL UNOR INTEGRALE MULTIPLE ÎNTR-UN SIMPLEX CU AJUTORUL DIFERENȚELOR DIVIZATE

DE

CONSTANȚA MOCANU

(Cluj)

Comunicare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8-13 decembrie 1960, Cluj.

1. În caietul de probleme al Catedrei de analiză a Facultății de matematică și fizică din Cluj, prof. T. Popoviciu propune următoarea problemă :
Să se arate cum se poate calcula integrala multiplă

$$\int_{S_n} f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (A)$$

unde S_n este un simplex oarecare din spațiul E_n cu vîrfurile

$$(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

iar $t_1, t_2, \dots, t_n$ sînt parametri independenți de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

În particular, să se calculeze integrala

$$\int_{S_n} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (B)$$

și să se deducă valoarea integralei

$$\int_{S_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (C)$$

unde $m_1, m_2, \dots, m_n$ sînt numere întregi nenegative.

În cele ce urmează vom rezolva această problemă, bazîndu-ne pe teoria diferențelor divizate.

Menționăm că pentru cazul $n = 2$, prof. D. V. Ionescu a calculat, printr-o altă metodă, integrala (C) în vederea stabilirii unor formule de cubatură [1].

2. Fie integrala multiplă (A). Vom nota

$$u = \sum_{k=1}^n t_k x_k.$$

Prin schimbarea de variabile

$$x_k = \sum_{i=1}^n (\lambda_{ik} - \lambda_{n+1,k}) \xi_i + \lambda_{n+1,k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

calculul integralei (A) se va reduce la calculul unei integrale multiple pe simplexul T_n definit de inegalitățile

$$T_n: \begin{cases} \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \dots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leq 1. \end{cases}$$

Avem în acest caz

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^n t_k x_k = \sum_{k=1}^n [t_k \sum_{i=1}^n (\lambda_{ik} - \lambda_{n+1,k}) \xi_i + t_k \lambda_{n+1,k}] = \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{k=1}^n (\lambda_{ik} - \lambda_{n+1,k}) t_k + \sum_{k=1}^n t_k \lambda_{n+1,k} = \sum_{i=1}^n (u_i - u_{n+1}) \xi_i + u_{n+1}. \end{aligned}$$

unde $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ sînt valorile pe care le ia funcția $u = \sum_{k=1}^n t_k x_k$ în vîr-
furile simplexului S_n , adică

$$u_i = \sum_{k=1}^n t_k \lambda_{ik}. \quad (1)$$

Jacobianul transformării este

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} - \lambda_{n+1,1} & \lambda_{21} - \lambda_{n+1,1} & \dots & \lambda_{n1} - \lambda_{n+1,1} \\ \lambda_{12} - \lambda_{n+1,2} & \lambda_{22} - \lambda_{n+1,2} & \dots & \lambda_{n2} - \lambda_{n+1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1n} - \lambda_{n+1,n} & \lambda_{2n} - \lambda_{n+1,n} & \dots & \lambda_{nn} - \lambda_{n+1,n} \end{vmatrix} = Vn!$$

unde V este volumul simplexului S_n și anume

$$V = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} & 1 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n+1,1} & \lambda_{n+1,2} & \dots & \lambda_{n+1,n} & 1 \end{vmatrix}$$

Avem deci formula

$$\int_{S_n} f(u) dx_1 dx_2 \dots dx_n = n! V \int_{T_n} f \left[\sum_{i=1}^n (u_i - u_{n+1}) \xi_i + u_{n+1} \right] d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \quad (2)$$

3. Să calculăm integrala multiplă (B). Luînd $f(u) = e^u$, formula (2) ne dă

$$\int_{S_n} e^u dx_1 \dots dx_n = n! V e^{u_{n+1}} \int_{T_n} e^{\sum_{i=1}^n (u_i - u_{n+1}) \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \quad (3)$$

Pentru calculul integralei (B) să stabilim următoarea formulă

$$e^v \int_{T_n} e^{\sum_{i=1}^n (u_i - v) \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = [u_1, u_2, \dots, u_n, v; e^u] \quad (4)$$

unde se notează cu $[z_1, z_2, \dots, z_{n+1}; \varphi]$ diferența divizată de ordinul n a funcției $\varphi(u)$ pe nodurile $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$. Vom demonstra această formulă prin inducție completă.

Formula este adevărată pentru $n = 1$. Într-adevăr,

$$e^v \int_{T_1} e^{(u_1 - v) \xi_1} d\xi_1 = e^v \int_0^1 e^{(u_1 - v) \xi_1} d\xi_1 = \frac{e^v}{u_1 - v} [e^{u_1 - v} - 1] = \frac{e^{u_1} - e^v}{u_1 - v} = [u_1, v; e^u].$$

Presupunînd-o adevărată pentru $n - 1$, avem

$$\begin{aligned} e^v \int_{T_n} e^{\sum_{i=1}^n (u_i - v) \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n &= e^v \int_{T_{n-1}} e^{\sum_{i=1}^{n-1} (u_i - v) \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} \int_0^{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i} e^{(u_n - v) \xi_n} d\xi_n = \\ &= \frac{e^v}{u_n - v} \int_{T_{n-1}} e^{\sum_{i=1}^{n-1} (u_i - v) \xi_i} \left[e^{(u_n - v) \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \right)} - 1 \right] d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} = \\ &= \frac{1}{u_n - v} \left[e^{u_n} \int_{T_{n-1}} e^{\sum_{i=1}^{n-1} (u_i - u_n) \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} - e^v \int_{T_{n-1}} e^{\sum_{i=1}^{n-1} (u_i - v) \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} \right] = \\ &= \frac{[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n; e^u] - [u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v; e^u]}{u_n - v} = [u_1, u_2, \dots, u_n, v; e^u]. \end{aligned}$$

Formula (4) este astfel demonstrată.

Din (3) și (4) obținem următoarea formulă

$$\int_{S_n} e^u dx_1 dx_2 \dots dx_n = n! V[u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}; e^u], \quad (5)$$

unde

$$u = \sum_{k=1}^n t_k x_k, \quad u_i = \sum_{h=1}^n t_h \lambda_{ih}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

4. Formula (5) ne permite să calculăm integrala multiplă (C). Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \int_{S_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n &= \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n}}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \dots \partial t_n^{m_n}} \int_{S_n} e^u dx_1 dx_2 \dots dx_n \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_n=0} = \\ &= n! V \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} \Delta}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \dots \partial t_n^{m_n}} \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_n=0} \end{aligned} \quad (6)$$

unde am notat $\Delta = [u_1, u_2, \dots, u_{n+1}; e^u]$.

Aplicînd formula de derivare de ordin superior a unei funcții compuse de mai multe variabile și ținînd seama de (1), se obține

$$\frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} \Delta}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \dots \partial t_n^{m_n}} = m_1! m_2! \dots m_n! \sum_{j=1}^{n+1} \prod_{h=1}^n \frac{\lambda_{jh}^{\alpha_{jh}}}{\alpha_{jh}!} \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} \Delta}{\partial u_1^{\sum_{k=1}^n \alpha_{1k}} \partial u_2^{\sum_{k=1}^n \alpha_{2k}} \dots \partial u_{n+1}^{\sum_{k=1}^n \alpha_{n+1,k}}}$$

Însumarea se extinde asupra indicilor $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{n+1,1}; \alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{n+1,2}; \dots; \alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{n+1,n}$ care primesc toate valorile întregi nenegative cu condițiile

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i1} = m_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i2} = m_2, \dots, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{in} = m_n.$$

Pe de altă parte, se știe că dacă $\varphi(u)$ este o funcție analitică, atunci au loc formulele

$$\begin{aligned} [z_1, z_2, \dots, z_{p+1}; \varphi] \Big|_{z_1=z_2=\dots=z_{p+1}=0} &= \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(0) \\ \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_{q+1}}}{\partial z_1^{p_1} \partial z_2^{p_2} \dots \partial z_{q+1}^{p_{q+1}}} [z_1, z_2, \dots, z_{q+1}; \varphi] &= \\ = p_1! p_2! \dots p_{q+1}! [z_1, \underbrace{z_1, \dots, z_1}_{p_1 \text{ ori}}, z_2, \underbrace{z_2, \dots, z_2}_{p_2 \text{ ori}}, \dots, z_{q+1}, \underbrace{z_{q+1}, \dots, z_{q+1}}_{p_{q+1} \text{ ori}}; \varphi] \end{aligned}$$

Aplicînd aceste formule, obținem

$$\frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} \Delta}{\partial u_1^{\sum_{k=1}^n \alpha_{1k}} \partial u_2^{\sum_{k=1}^n \alpha_{2k}} \dots \partial u_{n+1}^{\sum_{k=1}^n \alpha_{n+1,k}}} \Big|_{u_1=u_2=\dots=u_{n+1}=0} = \frac{\prod_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \right)!}{(m_1 + m_2 + \dots + m_n + n)!}$$

Deoarece pentru $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$ avem și $u_1 = u_2 = \dots = u_{n+1} = 0$, deducem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} \Delta}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \dots \partial t_n^{m_n}} \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_n=0} &= \\ &= \frac{m_1! m_2! \dots m_n!}{(m_1 + m_2 + \dots + m_n + n)!} \sum_{j=1}^{n+1} \prod_{k=1}^n \frac{(\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \dots + \alpha_{jn})!}{\alpha_{j1}! \alpha_{j2}! \dots \alpha_{jn}!} \lambda_{j1}^{\alpha_{j1}} \lambda_{j2}^{\alpha_{j2}} \dots \lambda_{jn}^{\alpha_{jn}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Din (6) și (7) obținem, în definitiv, următoarea formulă

$$\begin{aligned} \int_{S_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n &= \\ &= \frac{m_1! m_2! \dots m_n! n!}{(m_1 + m_2 + \dots + m_n + n)!} V \sum_{j=1}^{n+1} \prod_{k=1}^n \frac{(\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \dots + \alpha_{jn})!}{\alpha_{j1}! \alpha_{j2}! \dots \alpha_{jn}!} \lambda_{j1}^{\alpha_{j1}} \lambda_{j2}^{\alpha_{j2}} \dots \lambda_{jn}^{\alpha_{jn}}, \end{aligned} \quad (8)$$

unde V este volumul simplexului S_n , iar însumarea se face relativ la toate numerele întregi nenegative α_{ik} ($i = 1, 2, \dots, n+1$; $k = 1, 2, \dots, n$) cu condițiile $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik} = m_k$.

Universitatea „Babeș-Bolyai” — Cluj,
Catedra de ecuații diferențiale

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА В СИМПЛЕКСЕ ПРИ ПОМОЩИ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей заметке разрешается задача, предложенная профессором Т. Попович. При помощи формулы (4) вычисляется кратный интеграл (B), данный формулой (5). На основании теории разделенных разностей и формулы дифференцирования высшего порядка сложной функции нескольких переменных, легко устанавливается формула (8), которая даёт возможность вычислить интеграл (C). S_n является любым симплексом в пространстве E_n с вершинами $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})$, $i = 1, 2, \dots, n+1$; V — объем симплекса и $[z_1, z_2, \dots, z_{n+1}; \varphi]$ представляет собой разделенную разность порядка n функции $\varphi(u)$, на узлах $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$.

LA CALCUL D'UNE INTÉGRALE MULTIPLE DANS UN SIMPLEXE À L'AIDE DES DIFFÉRENCES DIVISÉES

RÉSUMÉ

Dans cette note, l'auteur résout un problème proposé par le Professeur T. Popoviciu. Grace à la formule (4) il calcule l'intégrale multiple (B) qui est donnée par la formule (5). En vertu de la théorie des différences divisées et de la formule de dérivation d'ordre supérieur d'une fonction composée de plusieurs variables, l'auteur établit aisément la formule (8) qui permet de calculer l'intégrale (C). S_n est un simplexe quelconque de l'espace E_n aux sommets $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, V est le volume du simplexe et $[z_1, z_2, \dots, z_{n+1}; \varphi]$ représente la différence divisée d'ordre n de la fonction $\varphi(u)$ sur les noeuds $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu D. V., *Formule de cubatură în care domeniul de integrare este un triunghi oarecare*. Studii și cercetări științifice — Acad. R.P.R. Filiala Cluj, Ser. I., VI, 1-2, 7-51 (1955).

Primit la 8. XII. 1960

EXAMEN DE ÎNTREREA ÎN CLASA FUNCȚIILOR UNIVALENTE

de

DR. I. MOCANU

(1961)

1. Se consideră funcția $f(z)$ în domeniul D și funcțiile $f_1(z) = z$ și $f_2(z) = z^2$. Se arată că:

(a) $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D dacă și numai dacă $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sunt funcții univalente în domeniul D .

(b) Dacă $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D , atunci $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sunt funcții univalente în domeniul D .

$$f(z) = g(z) \quad (1)$$

atunci funcția $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D (presupunând $g(z) \neq 0$).

Se poate pune și problema de a se arată că funcția $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D dacă și numai dacă funcțiile $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sunt funcții univalente în domeniul D .

Se poate pune și problema de a se arată că funcția $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D dacă și numai dacă funcțiile $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sunt funcții univalente în domeniul D .

Se poate pune și problema de a se arată că funcția $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D dacă și numai dacă funcțiile $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sunt funcții univalente în domeniul D .

2. Se arată că dacă $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D , atunci $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D .

Se poate pune și problema de a se arată că funcția $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D dacă și numai dacă funcțiile $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sunt funcții univalente în domeniul D .

Se poate pune și problema de a se arată că funcția $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D dacă și numai dacă funcțiile $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sunt funcții univalente în domeniul D .

$$f(z) = g(z) + h(z) \quad (2)$$

unde

$$f(z) = g(z) + h(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z)}{h(z)} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \dots$$

Se poate pune și problema de a se arată că funcția $f(z)$ este funcție univalentă în domeniul D .