DOMENII EXTREMALE ÎN CLASA FUNCȚIILOR UNIVALENTE

DE

PETRU T. MOCANU

(Cluj)

1. Să considerăm clasa S a funcțiilor $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ olomorfe și univalente în cercul unitate, $|z| < 1$.

Fie $g(z)$ o funcție oarecare olomorfă sau meromorfă în cercul unitate.

Într-o lucrare anterioară [2] ne-am ocupat cu găsirea valorilor extreme ale modulelor rădăcinilor ecuației

$$f(z) = g(z) \tag{1}$$

atunci cînd funcția $f(z)$ descrie clasa S (presupunînd $g(0) \neq 0$).

În prima parte a acestei lucrări ne propunem să determinăm domeniul D descris de rădăcinile ecuației (1) atunci cînd funcția $f(z)$ descrie clasa S.

Pentru aceasta, fie a un număr complex oarecare; z fiind o rădăcină oarecare a ecuației (1), vom căuta valorile extreme ale expresiei $|z - a|$ atunci cînd f descrie clasa S. Variind apoi pe a vom determina frontiera domeniului extremal D.

2. Fie $z = x = re^{i\theta}$ o rădăcină a ecuației (1) pentru care $|x - a|$ are o valoare extremă (de exemplu minimă) și fie $f(z)$ funcția extremală corespunzătoare (care există deoarece S este un spațiu compact).

Vom avea deci $f(x) = g(x)$.

Să considerăm o variație a funcției $f(z)$ dată de formula lui Schiffer-Goluzin [1]

$$f^*(z) = f(z) + \lambda A(z;\ \zeta;\ \psi) + O(\lambda^2), \quad \lambda > 0,\ |\zeta| < 1,$$

unde

$$A(z;\zeta;\psi) = e^{i\psi} \frac{f^2(z)}{f(z) - f(\zeta)} - e^{i\psi} f(z) \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right]^2 -$$

$$- e^{-i\psi} \frac{z f'(z)}{z - \zeta}\, \zeta \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right]^2 + e^{-i\psi} \frac{z^2 f'(z)}{1 - \bar{\zeta} z} \left[\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta f'(\zeta)}\right]^2 \bar{\zeta}. \tag{2}$$

Se știe că pentru λ suficient de mic, funcția f^* aparține clasei S.

Înlocuind în ecuaţia (1) pe f cu f^*, căpătăm ecuaţia

$$f(z) + \lambda A(z;\ \zeta;\ \psi) + O(\lambda^2) = g(z), \tag{3}$$

care va avea (pentru λ suficient de mic) o rădăcină x^* :

$$x^* = x + \lambda h + O(\lambda^2).$$

Il obţinem pe h, înlocuind în ecuaţia (3) pe z cu x^*, derivînd identitatea obţinută în raport cu λ şi făcînd $\lambda = 0$. Se obţine

$$h = \frac{A}{g'(x) - f'(x)}, \quad A = A(x;\ \zeta;\ \psi).$$

Deoarece f este extremală, rezultă că

$$|\, x^* - a \,| \geqslant |\, x - a \,|.$$

Dar

$$|\, x^* - a\,|^2 = (x - a)(\bar{x} - \bar{a}) = |\, x - a\,|^2 + 2\lambda \mathcal{R}[h(\bar{x} - \bar{a})] + O(\lambda^2).$$

Trebuie deci să fie satisfăcută inegalitatea

$$\mathcal{R}[h(\bar{x} - \bar{a})] \geqslant 0,$$

sau încă

$$\mathcal{R}[h e^{-i\alpha}] \geqslant 0,$$

unde am notat

$$\alpha = \arg\,(x - a).$$

Ţinînd seama de expresia lui h şi introducînd notaţiile

$$f(x) = g(x) = g, \qquad f'(x) = l, \qquad g'(x) = \omega,$$

inegalitatea de mai sus se scrie

$$\mathcal{R}\left[\frac{Ae^{-i\alpha}}{\omega - l}\right] \geqslant 0.$$

Înlocuind pe A cu expresia dată de (2), se obţine

$$\mathcal{R}\left\{e^{i\psi}\left[\frac{e^{-i\alpha}g^2}{\omega - l}\,\frac{1}{g - f(\zeta)} - \frac{e^{-i\alpha}g}{\omega - l}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{-i\alpha}\frac{xl}{\omega - l}\cdot\frac{\zeta}{x - \zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right)^2 + e^{i\alpha}\frac{\bar{x}^2 l}{\bar{\omega} - \bar{l}}\cdot\frac{\zeta}{1 - \bar{x}\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right)^2\right]\right\} \geqslant 0.$$

Din cauza arbitrarităţii lui ψ, trebuie ca paranteza dreaptă să fie nulă, deci

$$\frac{e^{-i\alpha}g^2}{\omega - l}\,\frac{1}{g - f(\zeta)} = \left[\frac{e^{-i\alpha}g}{\omega - l} + \frac{e^{-i\alpha}xl}{\omega - l}\cdot\frac{\zeta}{x - \zeta} - \frac{e^{i\alpha}\bar{x}^2\bar{l}}{\bar{\omega} - \bar{l}}\cdot\frac{\zeta}{1 - \bar{x}\zeta}\right]\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right)^2$$

Deci funcţia extremală $w = f(\zeta)$ verifică ecuaţia diferenţială

$$e^{-i\alpha}\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{g^2}{g - w} = \frac{1}{\bar{\omega} - \bar{l}}\,\frac{\gamma_0 + \gamma_1\zeta + \gamma_2\zeta^2}{(x - \zeta)(1 - \bar{x}\zeta)} \tag{4}$$

unde

$$\gamma_0 = e^{-i\alpha}\, x g(\bar{\omega} - \bar{l}),$$
$$\gamma_1 = e^{-i\alpha}(\bar{\omega} - \bar{l})\,[xl - (1 + r^2)g] - e^{i\alpha}(\omega - l)\, x r^2 \bar{l},$$
$$\gamma_2 = e^{-i\alpha}(\bar{\omega} - \bar{l})\bar{x}[g - xl] + e^{i\alpha}(\omega - l)\bar{x}^2\bar{l}.$$

Presupunînd că $|\, x - a\,|$ are o valoare maximă, se deduce că funcţia extremală verifică de asemenea ecuaţia diferenţială (4).

3. Se poate arăta ca şi în [1] că funcţia extremală $w = f(\zeta)$ transformă cercul $|\,\zeta\,| < 1$ în întreg planul (w) tăiat de-a lungul unui număr finit de arce analitice. Fie $\zeta = k$, $|\,k\,| = 1$, punctul care corespunde extremităţii unei astfel de tăieturi. Atunci ecuaţia diferenţială (4) va lua forma

$$e^{-i\alpha}\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{g^2}{g - w} = C\,\frac{(1 - \bar{k}\zeta)^2}{(x - \zeta)(1 - \bar{x}\zeta)}.$$

Făcînd $\zeta \to 0$ se deduce $C = xge^{-i\alpha}$, deci ecuaţia diferenţială de mai sus primeşte forma

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{g}{g - w} = \frac{x(1 - \bar{k}\zeta)^2}{(x - \zeta)(1 - \bar{x}\zeta)}. \tag{5}$$

Făcînd $\zeta \to x$, se deduce relaţia

$$(1 - \bar{k}x)^2 = \frac{xl}{g}\,(1 - r^2).$$

Integrînd ecuaţia diferenţială (5), se obţine că funcţia extremală căutată este dată sub formă implicită de ecuaţia

$$\ln\frac{\sqrt{g} - \sqrt{g - w}}{\sqrt{g} + \sqrt{g - w}} = \ln\frac{(1 - r^2)\zeta}{2\sqrt{xH(\zeta)} + 2x - (1 + r^2)\zeta} - q\ln\frac{1 + r^2 - 2\bar{x}\zeta - 2\sqrt{\bar{x}H(\zeta)}}{1 - r^2}, \tag{6}$$

unde

$$H(\zeta) = (x - \zeta)(1 - \bar{x}\zeta),$$

iar

$$q = \pm\, e^{i\theta}\,\bar{k}, \qquad |\,q\,| = 1.$$

4. Rezolvînd ca şi în [2] ecuaţia (6) în raport cu w şi punînd condiţia $w'(0) = 1$, se găseşte că r şi θ trebuie să verifice relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \ln\frac{1 - r^2}{r} + \ln|g| &= -\mathcal{R}(q)\ln\frac{1 + r}{1 - r} \\ \arg g - \theta &= \mathcal{I}(q)\ln\frac{1 + r}{1 - r} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aici pe q îl privim ca un parametru care depinde de $\alpha = \arg\, \dot{a}$.

Eliminăm paramentrul q ridicînd la patrat ambii membri din relațiile (7), adunînd membru cu membru și ținînd seama că

$$|q|^2 = \mathcal{R}^2(q) + \mathcal{I}^2(q) = 1.$$

Se obține că r și θ trebuie să verifice ecuația

$$\left(\ln\frac{1-r^2}{r} + \ln|g|\right)^2 + (\arg g - \theta)^2 = \ln^2\frac{1+r}{1-r},$$

care va defini frontiera domeniului căutat.

Putem enunța deci teorema :

TEOREMA 1. *Frontiera domeniului D descris de rădăcinile ecuației*

$$f(z) = g(z)$$

cînd $f(z)$ descrie clasa S, este dată sub formă implicită, în coordonatele polare r și θ de ecuația :

$$\left(\ln\frac{1-r^2}{r} + \ln|g(re^{i\theta})|\right)^2 + (\arg g(re^{i\theta}) - \theta)^2 = \ln^2\frac{1+r}{1-r}. \tag{8}$$

Trebuie să precizăm că dacă domeniul D depășește cercul unitate, nu vom lua în considerare decît partea domeniului D din interiorul cercului unitate.

Dacă $g(0) \neq 0$, atunci evident că ecuația (8) va defini de asemenea *frontiera domeniului maxim Δ care conține originea și care nu conține nici o rădăcină a ecuației $f(z) = g(z)$, unde $f(z) \in S$.*

5. Un caz particular important este acela cînd funcția $g(z)$ este o constantă, $g(z) = c$.

Punînd $c = Re^{i\gamma}$, din (8) se deduce imediat că frontiera domeniului descris de rădăcinile ecuației

$$f(z) = c$$

sau, altfel spus, frontiera domeniului descris de imaginile punctului c din planul (w) prin transformarea inversă $z = f^{-1}(w)$, este dată sub formă implicită de ecuația

$$\ln\frac{R(1+r)^2}{r}\ln\frac{r}{R(1-r)^2} = (\gamma - \theta)^2.$$

Să considerăm cazul $R = \dfrac{1}{4}$, $\gamma = 0$.

Atunci domeniul D descris de rădăcinile ecuației $4f(z) = 1$, cînd f descrie clasa S, este mărginit de curba

$$\theta^2 = \ln\frac{(1+r)^2}{4r}\ln\frac{4r}{(1-r)^2}. \tag{9}$$

Această curbă este, evident, simetrică în raport cu axa reală. Se vede imediat că pentru $\theta = 0$ se obțin pentru r cele două valori extreme $r_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ și $r_2 = 1$. Diferențiind relația (9) obținem

$$2\theta d\theta = \frac{E(r)}{r}dt,$$

unde

$$E(r) = \frac{1+r}{1-r}\ln\frac{(1+r)^2}{4r} - \frac{1-r}{1+r}\ln\frac{4r}{(1-r)^2}$$

sau

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2\theta r}{E(r)}.$$

Făcînd substituția

$$r = \frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}$$

se găsește

$$E(r) = \frac{1}{\sqrt{u}}F(u),$$

unde $F(u) = u\ln u - (1+u)\ln(1-u)$.

Se găsește ușor că în intervalul $0 < u < 1$, funcția $F(u)$ se anulează numai pentru $u = u_0 = 0{,}24\ldots$ și avem

$$F(u) < 0 \quad \text{pentru} \quad 0 < u < u_0$$

$$F(u) > 0 \quad \text{pentru} \quad u_0 < u < 1.$$

Valorile pentru r și θ corespunzătoare lui $u = u_0$, sînt $r_0 \approx 0{,}34$, $\theta_0 \approx 31^\circ$.

Avem

$$E(r) > 0 \quad \text{pentru} \quad r_1 < r < r_0$$

$$E(r) < 0 \quad \text{pentru} \quad r_0 < r < 1,$$

deci cînd θ crește de la 0 la θ_0, r crește de la r_1 la r_0; cînd θ descrește de la θ_0 la 0, r crește în continuare de la r_0 la $r_2 = 1$.

Graficul curbei (9) este dat în figura 1. Domeniul hașurat este deci domeniul D (relativ la ecuația $4f(z) = 1$).

6. Ca o altă aplicație, să considerăm cazul cînd $g(z) = \dfrac{1}{z}$. Ecuația (8) devine

$$\theta^2 = \ln\frac{1+r}{r}\ln\frac{r}{1-r}. \tag{10}$$

Putem deci afirma că domeniul maxim Δ ce conţine originea şi care nu conţine nici o rădăcină a ecuaţiei

$$z f(z) = 1$$

este mărginit de curba (10), care este simetrică în raport cu axa reală.

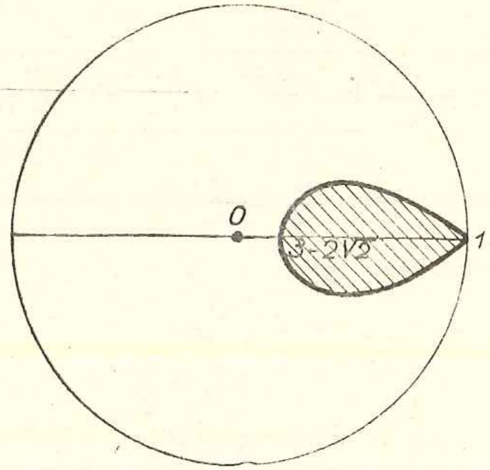

Fig. 1

Diferenţiind relaţia (10), obţinem

$$2\theta\, d\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{1-r}\ln\frac{1+r}{r} - \frac{1}{1+r}\ln\frac{r}{1-r}\right] dr.$$

Pentru $\theta = 0$, se găseşte valoarea minimă a lui r, $r_1 = \frac{1}{2}$. Pentru $\theta = \pi$, se găseşte pentru r valoarea maximă, $r = r_2$, unde $1 - 10^{-6} < r_2 < 1$.

Pentru $0 < \theta < \pi$ şi $\frac{1}{2} < r < 1$, se găseşte uşor că $\frac{dr}{d\theta} > 0$, deci cînd θ creşte de la 0 la π, r creşte de la $r_1 = \frac{1}{2}$ la r_2. Pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, se găseşte $r \approx 0{,}97$. Graficul curbei (10) este dat în figura 2. Domeniul haşurat este domeniul Δ.

7. Să considerăm ecuaţia

$$f(z) = f'(z)$$

unde $f(z) \in S$.

Ne propunem acum să determinăm cel mai mare domeniu $\mathcal{D}$ care conţine originea şi care nu conţine nici o rădăcină a ecuaţiei (11). În [3] am găsit cercul maxim cu centrul în origine care nu conţine nici o rădăcină a ecuaţiei (11).

Fie a un număr complex oarecare şi z o rădăcină oarecare a ecuaţiei (11). Vom căuta ca şi mai înainte valorile extreme ale modulului $|z - a|$ atunci cînd funcţia $f(z)$ descrie clasa S.

Fie $z = x = re$ o rădăcină a ecuaţiei (11) pentru care $|x - a|$ are o valoare extremă (minimă) şi fie $f(z)$ funcţia extremală corespunzătoare. Avem $f(x) = f'(x)$.

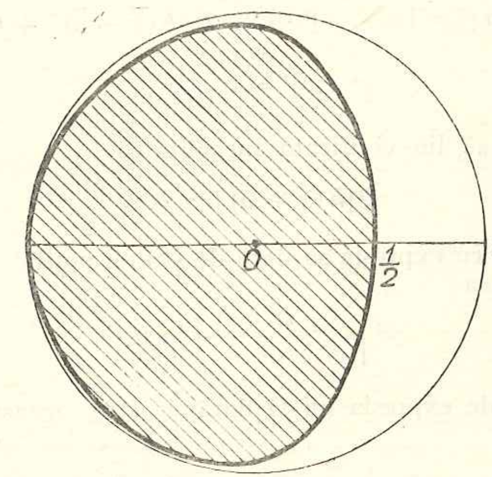

Fig. 2

Vom considera o variaţie a funcţiei $f(z)$ dată de formula [1] :

$$f^*(z) = f(z) + \lambda\Omega(z\,;\ \xi\,;\ \psi) + O(\lambda^2),\quad f^*(z) \in S,$$

unde

$$\Omega(z;\ \zeta;\ \psi) = e^{i\psi}\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2 \frac{f^2(z)}{f(z) - f(\zeta)} - e^{i\psi}\left[f(z) - zf'(z)\ \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right] - e^{-i\psi}\left[f(z) - zf'(z)\ \frac{1 + \bar{z}\zeta}{1 - \bar{z}\zeta}\right] \tag{12}$$

Înlociund în (11) pe $f(z)$ cu $f^*(z)$, se obţine ecuaţia

$$f(z) + \lambda[\Omega(z\,;\ \zeta\,;\ \psi) - \Omega'_z(z\,;\ \zeta\,;\ \psi)] + O(\lambda^2) = f'(z),$$

care va avea pentru λ suficient de mic, o rădăcină x^* care va fi o variaţie a rădăcinii x a ecuaţiei (9) :

$$x^* = x + \lambda h + O(\lambda^2).$$

Procedînd ca şi la nr. 2, se găseşte pentru h expresia

$$h = \frac{\Omega' - \Omega}{l - m}, \tag{13}$$

unde

$$\Omega = \Omega(x\,;\ \zeta\,;\ \psi), \qquad \Omega' = \Omega_z'(x\,;\ \zeta\,;\ \psi)$$

şi

$$f(x) = f'(x) = f, \qquad m = f''(x).$$

Deoarece

$$|\,x^* - a\,|^2 = |\,x - a\,|^2 + 2\lambda\,\mathcal{R}\,[h\,(\bar{x} - \bar{a})\,] + O(\lambda^2)$$

şi

$$|\,x^* - a\,| \geqslant |\,x - a\,|,$$

rezultă că trebuie să fie verificată inegalitatea

$$\mathcal{R}\,[h\,(\bar{x} - \bar{a})\,] \geqslant 0.$$

Înlocuind pe h cu expresia sa dată de (13) şi notînd $\alpha = \arg\,(x - a)$, se obţine inegalitatea

$$\mathcal{R}\left[e^{-i\alpha}\frac{\Omega' - \Omega}{f - m}\right] \geqslant 0.$$

Ţinînd seamă de expresia lui Ω dată de (12), această inegalitate se mai scrie

$$\mathcal{R}\left\{e^{i\psi}\left[\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{e^{-i\alpha} f^2 w}{(f - w)^2} - \frac{\sum\limits_{k=0}^{4} \gamma_k\, \zeta^k}{(\bar{m} - \bar{f})(x - \zeta)^2(1 - \bar{x}\zeta)^2}\right]\right\} \geqslant 0.$$

Deoarece ψ este arbitrar, se deduce că funcţia extremală $w = f(\zeta)$ trebuie să verifice ecuaţia diferenţială

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{e^{-i\alpha} f^2 w}{(f - w)^2} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{4} \gamma_k\, \zeta^k}{(\bar{m} - \bar{f})(x - \zeta)^2(1 - \bar{x}\zeta)^2}.$$

Expresiile coeficienţilor γ_k nu interesează în problema noastră. Folosind formula de variaţie

$$f^*(z) = f(z) + \lambda\left[f(z) - zf'(z)\,\frac{1 + e^{i\varphi}z}{1 - e^{i\varphi}z}\right] + O(\lambda^2),$$

se poate arăta că

$$\gamma_4 = \bar{\gamma}_0 = 0.$$

Deci ecuaţia diferenţială primeşte forma

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{e^{-i\alpha} f^2 w}{(f - w)^2} = \frac{\zeta(a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2)}{(x - \zeta)^2(1 - \bar{x}\zeta)^2}.$$

8. Notînd ca şi la nr. **3** cu $\zeta = k$, $|\,k\,| = 1$, punctul în care $w' = 0$, ecuaţia diferenţială de mai sus se mai scrie

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{e^{-i\alpha} f^2 w}{(f - w)^2} = C\,\frac{\zeta\,(1 - \bar{k}\zeta)^2}{(x - \zeta)^2(1 - \bar{x}\zeta)^2}.$$

Împărţind cu ζ şi făcînd $\zeta \to 0$, se găseşte $C = x^2 e^{-i\alpha}$, deci se găseşte, în definitiv, că funcţia extremală $w = f(\zeta)$ trebuie să verifice ecuaţia diferenţială :

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{f^2 w}{(f - w)^2} = \frac{x^2\,\zeta\,(1 - \bar{k}\zeta)^2}{(x - \zeta)^2(1 - \bar{x}\zeta)^2}.$$

Integrînd această ecuaţie diferenţială, se deduce că funcţia extremală $w = f(\zeta)$ este dată sub formă implicită de ecuaţia :

$$\ln\frac{\sqrt{f} - \sqrt{w}}{\sqrt{f} + \sqrt{w}} = \ln\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\zeta}}{\sqrt{x} + \sqrt{\zeta}} + q\,\mathrm{Ln}\,\frac{1 + \sqrt{\bar{x}\zeta}}{1 - \sqrt{\bar{x}\zeta}},$$

unde

$$q = \frac{r^2 - \bar{k}x}{r\,(1 - \bar{k}x)}, \quad |\,q\,| = 1.$$

Din relaţia de mai sus se deduce

$$\frac{\sqrt{f} - \sqrt{w}}{\sqrt{f} + \sqrt{w}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\zeta}}{\sqrt{x} + \sqrt{\zeta}}\left(\frac{1 + \sqrt{\bar{x}\zeta}}{1 - \sqrt{\bar{x}\zeta}}\right)^q$$

Împărţind cu $\sqrt{x} - \sqrt{\zeta}$ şi făcînd $\zeta \to x$, se deduce (ţinînd seamă că $f'(x) = f(x) = f$) relaţia

$$x = \left(\frac{1 + r}{1 - r}\right)^q,$$

sau

$$re^{i\theta} = \left(\frac{1 + r}{1 - r}\right)^{\mathcal{R}(q)} \exp\left\{i\,\mathcal{I}(q)\,\ln\frac{1 + r}{1 - r}\right\}$$

De aici deducem că r şi θ trebuie să verifice relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \ln r &= \mathcal{R}(q)\,\ln\frac{1 + r}{1 - r} \\ \theta &= \mathcal{I}(q)\,\ln\frac{1 + r}{1 - r} \end{aligned}\right\}$$

Parametrul q, $|\,q\,| = 1$, depinde de $\alpha = \arg a$. Eliminînd acest parametru se obţine că r şi θ trebuie să verifice ecuaţia

$$(\ln r)^2 + \theta^2 = \left(\ln\frac{1 + r}{1 - r}\right)^2$$

sau

$$\theta^2 = \ln \frac{r(1+r)}{1-r} \ln \frac{1+r}{r(1-r)} \tag{14}$$

care va defini (în coordonatele polare r şi θ) frontiera domeniului $\mathcal{D}$ căutat (figura 3).

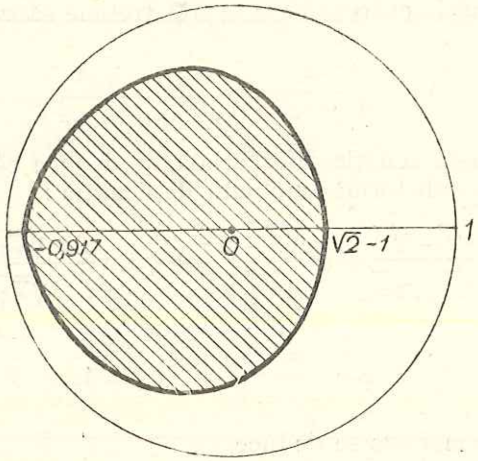

Fig. 3

Rezultatul obţinut se poate enunţa şi sub următoarea formă:

TEOREMA 2. *Frontiera domeniului maxim $\mathcal{D}$, care nu conţine nici un punct fix al transformării* $w = \frac{z f'(z)}{f(z)}$, *oricare ar fi funcţia* $f(z) \in S$, *este dată (în coordonatele polare r şi θ) de ecuaţia* (14).

Curba (14) este simetrică în raport cu axa reală. Se poate vedea că pentru $0 < \theta < \pi$, $\frac{dr}{d\theta} > 0$.

Pentru $\theta = 0$, r ia valoarea minimă $r_1 = \sqrt{2} - 1$, iar pentru $\theta = \pi$, r ia valoarea maximă $r_2 = 0{,}917\ldots$

Cînd θ creşte de la 0 la π, r creşte de la r_1 la r_2 (figura 3).

Universitatea „Babeş-Bolyai" — Cluj, Catedra de teoria funcţiilor

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ В КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть S класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ голоморфные и однолистные в $|z| < 1$. В первой части настоящего труда рассматривается уравнение (1), $f(z) = g(z)$, где $f(z) \in S$, а $g(z)$ — заданная голоморфная или мероморфная функция в окружности $|z| < 1$. Определяется граница области, описанной корнями уравнения (1), когда $f(z)$ пробегает класс S (уравнения (8)).

Во второй части труда определяется граница максимальной области, содержащей начальную точку и не содержащей ни одной неподвижной точки преобразования $w = \frac{z f'(z)}{f(z)}$ когда $f(z)$ пробегает класс S (уравнение (14)).

DOMAINES EXTRÉMAUX DANS LA CLASSE DES FONCTIONS UNIVALENTES

RÈSUMÈ

Nous désignons par S la classe des fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ holomorphes et univalentes dans $|z| < 1$. Dans la première partie de ce travail nous considérons l'équation (1) $f(z) = g(z)$, où $f(z) \in S$, et $g(z)$ est une fonction donnée holomorphe ou méromorphe dans le cercle $|z| < 1$. Nous déterminons la frontière du domaine décrit par les racines de l'équation (1) lorsque $f(z)$ décrit la clase S (équation (8)).

Dans la deuxième partie du travail nous déterminons la frontière du domaie maximum qui renferme l'origine et qui ne contient aucun point fixe de la transformation $w = \frac{z f'(z)}{f(z)}$ lorsque $f(z)$ décrit la classe S (équation (14)).

BIBLIOGRAFIE

1. **Голузин Г. М.,** *Метод вариации в конформном отображении* **(I). Матем. сборник, XIX (61), 2, 203—236 (1946).**
2. P. T. Mocanu, *O problemă extremală în clasa funcţiilor univalente.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), *1*, **XI**, 99—106 (1960).
3. — *O teoremă asupra funcţiilor univalente.* Studia Univ. Babeş-Bolyai, 1961.

Primit la 20. III. 1961.