O FORMULĂ ASIMPTOTICĂ GENERALĂ PENTRU EVALUAREA RESTULUI SERIILOR CONVERGENTE CU TERMENI POZITIVI

DE

ANDREI NEY

(Cluj)

Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 11 iulie 1960 a Institutului de calcul al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj.

ÎNTRODUCERE

Fie

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

o serie convergentă cu termeni pozitivi. Restul ei

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

are următoarele proprietăţi fundamentale :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \\ &\frac{R_n - R_{n+1}}{u_{n+1}} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

În baza proprietăţilor (2), dăm următoarea

DEFINIŢIE. *$\mathcal{R}_n$ este o expresie asimptotică a restului seriei $\sum_{1}^{\infty} u_n$, dacă sînt îndeplinite condiţiile :*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_n = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+1}}{u_{n+1}} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+1}}{R_n - R_{n+1}} = 1.$$

Deoarece pentru o serie convergentă cu termeni pozitivi R_n tinde descrescător către zero cînd $n \to \infty$, obţinem prin aplicarea teoremei lui Cesàro-Stolz, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}_n}{R_n} = 1$, ceea ce se mai scrie ca o relaţie asimptotică, astfel: $\mathcal{R}_n \cong R_n$.

Cunoscînd expresia lui $\mathcal{R}_n$, din relaţia $\frac{R_n}{\mathcal{R}_n} = 1 + o(1)$ rezultă nemijlocit $R_n - \mathcal{R}_n = o(\mathcal{R}_n)$ $(n \to \infty)$.

A doua din relaţiile (3) se mai scrie

$$\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+1} = u_{n+1} + \omega_{n+1} u_{n+1}; \quad \omega_{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{4}$$

Însumînd egalitatea de mai sus de la n la $+\infty$ şi ţinînd seama de relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{R}_n = 0$, obţinem

$$\mathcal{R}_n = R_n + \sum_{k=n}^{\infty} \omega_{k+1} u_{k+1}.$$

Din (4) rezultă $\omega_{k+1} u_{k+1} = \mathcal{R}_k - \mathcal{R}_{k+1} - u_{k+1}$, prin urmare

$$R_n = \mathcal{R}_n + \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 - \frac{\mathcal{R}_k - \mathcal{R}_{k+1}}{u_{k+1}}\right) u_{k+1}, \tag{5}$$

ceea ce ne permite evaluarea diferenţei $R_n - \mathcal{R}_n$.

Menţionăm de pe acum că dacă $\mathcal{R}_n = \alpha_n u_n$, unde α_n se lămureşte prin observaţia 2, din cap. II, atunci formula (5) este chiar cunoscuta transformare a lui Kummer, [6], aplicată restului R_n al seriei $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$.

În cele ce urmează vom deduce o formulă pentru expresia asimptotică a restului, general valabilă pentru serii convergente cu termeni pozitivi. Această formulă ne va da pentru unele clase de serii, chiar valoarea exactă a restului R_n.

Pentru stabilirea unei astfel de formule cu caracter general, vom porni de la condiţia necesară şi suficientă a convergenţei unei serii cu termeni pozitivi.

I

În prealabil facem unele precizări cu privire la criteriul lui Kummer-Jensen şi asupra unor formulări ale acestui criteriu, folosite în literatura de specialitate şi îndeosebi în lucrările [2, 1, 8].

1. Dacă există un şir $\{a_n\}$ de numere pozitive astfel încît să avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) = \mu > 0, \tag{K}$$

atunci seria $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$, cu termeni pozitivi, este convergentă — şi invers: dacă seria $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ cu termeni pozitivi este convergentă, atunci există un şir $\{a_n\}$ de numere pozitive astfel ca relaţia (K) să fie îndeplinită.

Suficienţa condiţiei (K), pentru convergenţa seriei $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$, este îndeobşte cunoscută, iar caracterul ei necesar rezultă din posibilitatea construirii — în cazul seriei convergente — a unui şir de numere pozitive şi anume punînd $a_n = \frac{R_n}{u_n}$, care înlocuit în expresia de sub semnul limită din relaţia (K), ne dă

$$\frac{R_n}{u_n} \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{R_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{R_n - R_{n+1}}{u_{n+1}} = 1 > 0.$$

2. Relaţia

$$\underline{\lim} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) = \mu' > 0 \tag{J}$$

unde $\{a_n\}$ este un şir de numere pozitive adecuat ales, exprimă de asemenea condiţia necesară şi suficientă a convergenţei seriei $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$, cu termeni pozitivi.

Condiţia (J) este echivalentă cu condiţia (K). Într-adevăr, din (K) rezultă nemijlocit (J), căci în acest caz $\mu' = \mu$. Pe de altă parte, dacă (J) este îndeplinită, atunci seria $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ este convergentă (conform demonstraţiei clasice), deci va avea loc şi relaţia (K), pentru un şir de numere, $\{a_n\}$, potrivit ales.

3. În [8] § 3, G. S. Salehov, introducînd un parametru l, dă o nouă formă criteriului lui Kummer. Pentru a fi în consonanţă cu notaţia din prezenta lucrare, enunţăm formularea lui G. S. Salehov, astfel:

Dacă

$$\underline{\lim} \frac{a_n u_n - a_{n+l} u_{n+l}}{u_{n+l}} = \mu'_l > 0 \tag{S}$$

unde l este un număr întreg pozitiv oarecare, iar $\{a_n\}$ un şir de numere pozitive, atunci seria cu termeni pozitivi, $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$, este convergentă.

În locul părţii a 2-a a criteriului, care se referă la o condiţie suficientă a divergenţei, vom pune în evidenţă caracterul necesar al condiţiei (S), pentru convergenţa seriei $\sum_1^\infty u_n$. În acest sens, pentru seria convergentă se poate pune $a_n = \frac{R_{n+l-1}}{u_n}$ şi se obţine

$$\frac{a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}}{u_{n+l}} = \frac{R_{n+l-1} - R_{n+l}}{u_{n+l}} = 1 > 0.$$

Condiţia (S) fiind necesară şi suficientă pentru convergenţa seriei $\sum_1^\infty u_n$, este echivalentă cu condiţia (J), respectiv cu (K).

4. Dăm, în sfîrşit, o nouă formulare a criteriului lui Kummer (evident echivalentă cu cele de mai sus), la care ne vom referi în cursul lucrării, pentru faptul că parametrul arbitrar pe care-l conţine prezintă diferite posibilităţi practice de calcul, puse în evidenţă în [8]:

Condiţia necesară şi suficientă pentru convergenţa seriei $\sum_1^\infty u_n$, cu termeni pozitivi, este existenţa unui şir $\{a_n\}$ de numere pozitive astfel ca să aibă loc relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}}{u_{n+l}} = \mu_l > 0, \tag{I}$$

l putînd fi un număr întreg pozitiv oarecare.

II

Vom stabili expresia asimptotică generală pentru restul seriei (1), bazîndu-ne pe relaţia (I).

TEOREMA 1. *Dacă seria cu termeni pozitivi, $\sum_1^\infty u_n$, este convergentă, adică dacă are loc relaţia* (I), *atunci pentru restul ei este valabilă următoarea relaţie la limită*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{n+l-1}}{a_n u_n - b} = \frac{1}{\mu_l}, \tag{6}$$

unde am notat $b = \lim_{n\to\infty} a_n u_n$. Totodată (6) *poate fi pusă sub forma*

$$R_{n+l-1} \cong \frac{a_n u_n - b}{\mu_l}, \tag{7}$$

care este o relaţie asimptotică pentru evaluarea aproximativă a restului seriei.

Demonstraţie. Din (I) rezultă că de la un indice suficient de mare, avem $a_n u_n > a_{n+1} u_{n+1} > 0$, deci există $\lim_{n\to\infty} a_n u_n$, nenegativă şi o notăm cu b. Urmează egalităţile.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{\mu_l} u_n - \frac{a_{n+1}}{\mu_l} u_{n+1}}{u_{n+l}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n u_n - b}{\mu_l} - \frac{a_{n+1} u_{n+1} - b}{\mu_l}}{u_{n+l}} = 1.$$

Expresia $\frac{a_n u_n - b}{\mu_l}$ satisface condiţiile (3), deci este o expresie asimptotică a restului seriei $\sum_1^\infty u_n$, putîndu-se scrie

$$R_{n+l-1} \cong \mathcal{R}_{n+l-1} = \frac{a_n u_n - b}{\mu_l}.$$

Observaţia 1. Pentru $l = 1$, primim expresii corespunzătoare formulării (K) a criteriului lui Kummer şi anume:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{a_n u_n - b} = \frac{1}{\mu}, \tag{6a}$$

respectiv

$$R_n \cong \frac{a_n u_n - b}{\mu}. \tag{7a}$$

Observaţia 2. Dacă condiţia (K) este îndeplinită, putem substitui şirul $\{a_n\}$ prin şirul $\{\alpha_n\}$, unde $\alpha_n = \frac{1}{\mu}\left(a_n - \frac{b}{u_n}\right)$. Astfel primim „forma redusă" a expresiei asimptotice a restului seriei,

$$R_n \cong \alpha_n u_n. \tag{8}$$

Observaţia 3. În baza relaţiei (I) putem asocia numărului η $(0 < \eta < \mu_l)$ un număr pozitiv suficient de mare, N_η, astfel ca să avem

$$\mu_l - \eta < \frac{a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}}{u_{n+l}} < \mu_l + \eta \quad (n > N_\eta),$$

adică

$$(\mu_l - \eta) u_{n+l} < a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} < (\mu_l + \eta) u_{n+l} \quad (n > N_\eta),$$

de unde, prin însumare de la n la ∞ şi aranjări convenabile, obţinem

$$\frac{a_n u_n - b}{\mu_l + \eta} \leqslant R_{n+l-1} \leqslant \frac{a_n u_n - b}{\mu_l - \eta} \quad (n > N_\eta). \tag{9}$$

Inegalităţile (9) pot fi utilizate la delimitarea restului seriei $\sum_1^\infty u_n$.

Observația 4. Dacă condiția (S) este satisfăcută, obținem pe o cale analoagă celei indicate în observația 3, inegalitățile

$$R_{n+l-1} \leqslant \frac{a_n u_n - b}{\mu_l'} \leqslant \frac{a_n u_n}{\mu_l'}. \qquad (10)$$

Pentru $l = 1$, primim din (10) inegalitățile corespunzătoare condiției (J).

III

Teorema 1, aplicată la serii care satisfac condițiile vreunuia din criteriile de convergență ce derivă din criteriul lui Kummer, ne conduce la forme simple pentru evaluarea asimptotică a restului. Prezentăm următoarele cazuri :

CAZUL 1. Considerînd expresia

$$\rho_n = \frac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}}\ ^{1)}$$

pentru seriile cu termeni pozitivi și descrescători, se obține un criteriu care include atît cazul de convergență prevăzut de criteriul lui d'Alembert, cît și cel prevăzut de criteriul lui Gauss[2].

CRITERIU DE CONVERGENȚĂ. *Dacă* $\sum\limits_1^\infty u_n$ *este o serie cu termeni pozitivi și descrescători, pentru care avem*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_n - \rho_{n+1}}{u_{n+1}} = \mu > 0, \qquad (11a)$$

[1] În [4], autorul prezentei lucrări a arătat rolul expresiei $\rho_n = \dfrac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}} = \dfrac{\lambda_n u_n}{1 - \lambda_n}$, unde s-a notat $\lambda_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$; *o condiție necesară de convergență a unei serii numerice oarecare este* $\underline{\lim} \mid \rho_n \mid = 0$.

[2] Cazul de convergență ce se exprimă prin criteriul lui d'Alembert se dovedește a fi cuprins în consecința criteriului ce urmează a fi dedus mai jos, în prezenta lucrare, iar cu privire la criteriul lui Gauss, ajungem la aceeași concluzie, punînd în (11c) $\lambda_n = 1 - \dfrac{\alpha}{n} - \dfrac{\beta_n}{n^k}$, unde $\{\beta_n\}$ este un șir mărginit, $\alpha > 1$ și $k > 1$. În acest caz $\dfrac{\lambda_n}{1 - \lambda_n} = n \dfrac{1}{\alpha + \dfrac{\beta_n}{n^k}} - 1$, deci

$$\Delta \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n} = \frac{1}{\alpha + \dfrac{\beta_n}{n^k}} + \frac{(n+1)\left[\dfrac{\beta_n}{n^k} - \dfrac{\beta_{n+1}}{(n+1)^k}\right]}{\left[\alpha + \dfrac{\beta_{n+1}}{(n+1)^k}\right]\left(\alpha + \dfrac{\beta_n}{n^k}\right)},$$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \Delta \dfrac{\lambda_n}{1 - \lambda_n}\right) = 1 - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} > 0$.

adică

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1 - \lambda_n} - \frac{\lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}}\right) = \mu > 0, \qquad (11b)$$

respectiv

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 - \Delta\left(\frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n}\right)\right] = \mu > 0, \qquad (11c)$$

(unde ρ_n și λ_n s-au definit prin nota [1] iar Δ este simbolul obișnuit al diferenței finite), *atunci seria considerată este convergentă și are loc pentru restul ei relația*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{\rho_n} = \frac{1}{\mu}. \qquad (12)$$

Demonstrație. Din definiția lui ρ_n rezultă imediat că expresiile de sub cele trei semne de limită din (11a), (11b) respectiv (11c) sînt identice. Din condiția (11a) urmează că începînd de la un indice suficient de mare avem $\rho_n > \rho_{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n \geqslant 0$. Punînd $a_n = \dfrac{\rho_n}{u_n}$, urmează — conform criteriului lui Kummer — convergența seriei $\sum\limits_1^\infty u_n$. În acest caz, din nota[1]) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \underline{\lim}\, \rho_n = 0,$$

iar relația (6a) ia forma (12).

Menționăm că dacă avem

$$\underline{\lim} \frac{\rho_n - \rho_{n+1}}{u_{n+1}} > 0,$$

atunci rezultă o formulă de delimitare a restului, analoagă lui (10).

CONSECINȚĂ. *Dacă seria cu termeni pozitivi* $\sum\limits_1^\infty u_n$ *îndeplinește condiția din forma limită a criteriului lui d'Alembert, adică*

$$\lambda_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda \quad (n \to \infty)\,; \quad (0 < \lambda < 1)$$

atunci are loc relația

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{\rho_n} = 1. \qquad (13)$$

Într-adevăr, din condiția cuprinsă în enunț rezultă că, de la un indice suficient de mare, termenii seriei descresc. Totodată avem conform relației (11b)

$$\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1 - \lambda_n} - \frac{\lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}}\right) = \frac{1}{1 - \lambda} - \frac{\lambda}{1 - \lambda} = 1,$$

deci urmează convergenţa seriei $\sum_{1}^{\infty} u_n$ şi relaţia (13), ceea ce trebuia demonstrat.

Relaţia (13) ne permite să scriem

$$R_n \cong \rho_n = \frac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}} = \frac{\lambda_n u_n}{1 - \lambda_n}, \tag{14}$$

de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{u_n} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}. \tag{15}$$

Relaţia (15) este prima relaţie a lui N. Obreschkoff din [5], aplicată în prezenta lucrare, seriilor cu termeni pozitivi (a se vedea şi [4]). Menţionăm că relaţia lui N. Obreschkoff nu este aplicabilă în cazul $\lambda = 0$, pe cînd relaţia (14) permite o evaluare asimptotică a restului şi în acest caz, după cum arată şi

Exemplul 1. Fie $u_n = \frac{1}{n!}$. Avem $\lambda_n = \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Putem scrie

$$R_n \cong \frac{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\, n}.$$

Din teoria seriilor se cunoaşte aproximarea restului conform formulei $R_n = \frac{\theta}{n!\, n}$ $(0 < \theta < 1)$. Precizăm că θ depinde de n şi că în baza formulei asimptotice $R_n \cong \frac{1}{n!\, n}$, dedusă mai sus, are loc relaţia la limită $\lim\limits_{n\to\infty} \theta = 1$.

Chiar în cazul cînd $\lambda = 1$ — caz necuprins în formula (15) — putem evalua asimptotic restul unor serii cu termeni pozitivi în baza relaţiei (12), pornind de la forma (11c) a criteriului nostru. Să considerăm

Exemplul 2. Fie seria $u_n = \frac{1}{n^{1+k}}$ $(k > 0)$. În acest caz $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{v_n} = 1$. În vederea aplicării relaţiei (11c), se porneşte de la următoarele egalităţi

$$\lambda_n = \frac{n^{1+k}}{(n+1)^{1+k}}; \quad \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+k} - 1}.$$

La calcularea diferenţei $\Delta \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}$ se utilizează teorema mediei a lui Lagrange, astfel

$$\Delta \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} = \frac{-(1+k)\left(1 + \frac{1}{n+\theta}\right)^k \left(-\frac{1}{(n+\theta)^2}\right)}{\left[\left(1 + \frac{1}{n+\theta}\right)^{1+k} - 1\right]^2} = \frac{1+k}{(n+\theta)^2} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+\theta}\right)^k}{\left[\frac{1+k}{n+\theta} + \frac{M_n}{(n+\theta)^2}\right]^2} \; (0 < \theta < 1),$$

unde M_n este o mărime mărginită. Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \Delta \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} = \frac{1}{1+k}.$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1 - \Delta \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\right] = \frac{k}{1+k}$. Pe de altă parte

$$\rho_n = \frac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{1+k} - n^{1+k}} = \frac{1}{(1+k)(n+\tau)^k} \qquad (0 < \tau < 1).$$

Formula (12) ne dă

$$R_n \cong \frac{\rho_n}{\mu} = \frac{1}{k(n+\tau)^k} \qquad (0 < \tau < 1).$$

Observaţia 5. Prezintă interes adaptarea cunoscutei transformări a lui Kummer, la notaţia utilizată în criteriul de convergenţă dedus în cap. III al prezentei lucrări. Punînd în relaţia (5) $\mathcal{R}_n = \frac{\rho_n}{\mu}$, obţinem

$$R_n = \frac{\rho_n}{\mu} + \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\mu} \frac{\rho_k - \rho_{k+1}}{u_{k+1}}\right) u_{k+1}, \tag{16a}$$

sau altfel

$$R_n = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda_n u_n}{1 - \lambda_n} + \sum_{k=n}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{\mu}\left(1 - \Delta \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\right)\right] u_{k+1}, \tag{16c}$$

ceea ce se transcrie uşor pentru calculul sumei

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = u_1 + R_1 = u_1 + \frac{1}{\mu} \frac{\lambda_1 u_1}{1-\lambda_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{\mu}\left(1 - \Delta \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\right)\right] u_{k+1},$$

adică

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = u_1 \left[1 + \frac{\lambda_1}{\mu(1-\lambda_1)}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{\mu}\left(1 - \Delta \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\right)\right] u_{n+1}. \tag{17}$$

Vom aplica relaţia de transformare (17) în

Exemplul 3. Fie seria $e = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Efectuînd transformarea (17), obținem

$$e = 3 - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)n!},$$

pe cînd transformarea lui Kummer adaptată condițiilor din criteriul lui d'Alembert (vezi [8], cap. III. § 1), nu ne poate duce la nici un rezultat, seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ fiind un invariant al transformării.

Cazul 2. *Dacă seria* $\sum_{1}^{\infty} u_n$ *îndeplinește condiția din forma limită a criteriului lui Raabe-Duhamel, adică*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = r > 1,$$

atunci se obține

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{n\,u_n} = \frac{1}{r-1}, \quad \textit{respectiv} \quad R_n \cong \frac{n\,u_n}{r-1}. \tag{18}$$

Într-adevăr, condiția (K) este îndeplinită, cu $a_n = n$ și $\mu = r - 1$, prin urmare din teorema 1 rezultă (18).

Dacă avem $\underline{\lim}\, n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) > 1$, obținem ușor inegalități analoage celor din (10).

Exemplul 4. În lucrarea [7] și apoi în [8], G. S. Salehov se preocupă de delimitarea restului seriei

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Aplicîndu-și metoda, autorul citat obține rezultatele:

$$0{,}0050 < R_5 < 0{,}0149,$$

$$0{,}00315 \leqslant R_{11} \leqslant 0{,}00337^{3)}.$$

Cu ajutorul relației (18) din prezenta lucrare se obține

$$R_5 \approx \frac{1}{84} = 0{,}001\,190\,4 \ldots \quad \text{și} \quad R_{11} \approx \frac{1}{312} = 0{,}003\,205 \ldots$$

Subliniem că atît $\frac{1}{84}$ cît și $\frac{1}{312}$ sînt valori *exacte* ale restului. În cap. IV vom da explicația acestui fapt.

---

[3]) Notației R_n din prezenta lucrare îi corespunde notația R_{n+1} în lucrările citate ale lui G. S. Salehov.

Cazul 3. *Dacă seria* $\sum_{1}^{\infty} u_n$ *îndeplinește condiția din forma limită a criteriului lui J. Bertrand, adică*

$$\lim_{n\to\infty} \left[(L^p n)\frac{u_n}{u_{n+1}} - L^p(n+1)\right] = \mu > 0,$$

unde $L^p n$ *înseamnă* $n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n \ldots \underbrace{\ln \ln \ldots \ln}_{p} n$, *atunci se obține cu ajutorul teoremei* 1, *relația*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{(L^p n)\,u_n} = \frac{1}{\mu}. \tag{19}$$

Într-adevăr, în demonstrația teoremei 1 se arată că șirul $\{a_n u_n\}$, cu termeni pozitivi, este descrescător. Punînd $a_n = L^p n$, se obține $\lim\limits_{n\to\infty} (L^p n)\, u_n = 0$, căci în cazul contrar, începînd de la un indice suficient de mare, am avea $(L^p n) u_n > \alpha > 0$, ceea ce ne-ar conduce la inegalitatea $u_n > \frac{\alpha}{L^p n}$, de unde ar rezulta divergența seriei $\sum_{1}^{\infty} u_n$. Prin urmare relația (19) este justificată.

Menționăm că din inegalitatea

$$\underline{\lim}\left[(L^p n)\frac{v_n}{v_{n+1}} - L^p(n+1)\right] > 0,$$

rezultă imediat inegalitățile analoage celor din (10).

Exemplul 5. Fie cunoscuta serie $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$, a cărei convergență se poate stabili ușor cu ajutorul criteriului lui J. Bertrand, punînd $L^p n = n \ln n$. Un calcul simplu ne dă $\mu = 1$, iar din relația (19) rezultă $R_n \cong \frac{1}{\ln n}$. Această expresie asimptotică a restului este chiar integrala $\int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$, pe care o primim aplicînd criteriul integral al lui Cauchy la seria considerată în exemplu.

IV

În introducere s-a arătat că formulările (K), (J) și (S) ale condiției necesare și suficiente a convergenței seriei $\sum_{1}^{\infty} u_n$, cu termeni pozitivi, sînt echivalente, iar din observația 2 rezultă echivalența lor și cu forma redusă a formulării (K) și anume

$$\lim_{n\to\infty} \left(\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1}\right) = 1, \tag{K*}$$

de unde conform relației (8) se obține $R_n \cong \alpha_n u_n$.

Fără a restrînge generalitatea celor ce urmează, vom porni de la relaţia la limită

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty), \tag{20}$$

căreia îi ataşăm egalitatea

$$\varkappa_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varkappa_{n+1} = 1 \quad (n > N), \tag{20 a}$$

care, în cazul cînd seria este convergentă, este satisfăcută de soluţia $\varkappa_n = \frac{R_n}{u_n}$. Vom demonstra

TEOREMA 2. *Dacă începînd cu un indice suficient de mare, egalitatea* (20 a)

$$\varkappa_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varkappa_{n+1} = 1$$

este satisfăcută de un şir $\{\varkappa_n\}$ *de numere pozitive, atunci* $\varkappa_n u_n$ *este valoarea exactă a restului seriei convergente cu termeni pozitivi,* $\sum\limits_1^{\infty} u_n$.

Demonstraţie. Punînd $\varkappa_{n+1} = \varkappa_n + \Delta\varkappa_n$, egalitatea (20 a) ia forma

$$\Delta\varkappa_n - \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\varkappa_n = -1, \tag{20 b}$$

care este o ecuaţie cu diferenţe finite, neomogenă (u_n fiind cunoscut, iar $\varkappa_n$ se caută). Soluţia generală a ecuaţiei omogene corespunzătoare lui (20 b) este $\frac{c}{u_n}$, iar o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene este $\frac{R_n}{u_n}$. În consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei (20 b) este $\varkappa_n = \frac{R_n + c}{u_n}$. Pentru determinarea constantei c, pornim de la faptul că în cazul seriei convergente avem $R_n \to 0$ $(n \to \infty)$, deci $R_n = \varkappa_n u_n - c \to 0$ $(n \to \infty)$, de unde $c = \lim\limits_{n\to\infty} \varkappa_n u_n$. Deoarece în cazul formei reduse, (K*), are loc egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa_n u_n = 0$, obţinem $R_n = \varkappa_n u_n$.

Rezultă fără dificultate şi formula exactă

$$R_n = \frac{a_n u_n - b}{\mu} \tag{21}$$

dacă

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = \mu > 0, \quad \lim a_n u_n = b.$$

Exemplul 6. Se pune următoarea problemă : *care este clasa de serii, pentru care relaţia asimptotică* (18) *ne dă valoarea exactă a restului seriei?*

Din egalitatea

$$n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) = \mu \quad (\mu > 0) \tag{22}$$

rezultă

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda_n = \frac{n}{n+1+\mu},$$

prin urmare

$$u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1+\mu} = u_1 \frac{(n-1)\,!}{(\mu+2)(\mu+3)\ldots(\mu+n)},$$

unde u_1 este o constantă pozitivă, arbitrară. Expresia lui u_n dedusă mai sus poate fi pusă sub forma

$$u_n = a \frac{(n-1)\,!}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)}, \tag{23}$$

a fiind egal cu $u_1(\mu + 1)$. Din (21) urmează

$$R_n = a \frac{n\,!}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n)}, \tag{24}$$

iar pentru suma seriei

$$S = u_1 + R_1 = \frac{a}{\mu+1} + \frac{a}{\mu(\mu+1)} = \frac{a}{\mu}. \tag{25}$$

Pentru $a = \frac{1}{2}$ şi $\mu = 2$, se obţine din (23) seria $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, cu $R_n = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ şi suma $S = \frac{1}{4}$. Această serie a fost obiectul calculelor din exemplul 4.

Aceeaşi problemă, pusă în cadrul relaţiei asimptotice (14), ne conduce la seria geometrică $u_n = u_1 \lambda^{n-1}$.

Problema generală a găsirii expresiei exacte a restului revine la determinarea lui $\varkappa_n$ din (20 b), cunoscîndu-se u_n şi condiţia $\varkappa_n > 0$. Procedînd la rezolvarea ecuaţiei cu diferenţe finite (20 b) prin metoda variaţiei constantelor, se obţine

$$\varkappa_n = \frac{c - s_n}{u_n}, \tag{26}$$

unde $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, iar c este o constantă arbitrară supusă doar condiţiei $c > s_n$. Găsirea lui c revine chiar la stabilirea limitei lui s_n cînd $n \to \infty$; în acest sens, problema rămîne deschisă.

Problema poate fi abordată pe altă cale şi anume : cunoscînd o expresie asimptotică a restului seriei cu termeni pozitivi, $\sum\limits_1^{\infty} u_n$, se va căuta o metodă de aproximare succesivă a valorii exacte a restului prin „îmbunătăţirea expresiei asimptotice a restului". În acest scop vom căuta astfel de şiruri $\{\alpha_n\}$ de numere pozitive, pentru care ε_{n+1} din relaţia

$$\alpha_n u_n - \alpha_{n+1} u_{n+1} = u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \tag{27}$$

să tindă cît mai repede către zero. Conform relaţiilor (4) şi (8),

$$\varepsilon_{n+1} = \omega_{n+1} u_{n+1}.$$

Să presupunem că avem un şir $\{\alpha'_n\}$ care satisface relaţia (27). Căutăm: ce legătură există între termenii acestui şir şi termenii unui alt şir, $\{\alpha''_n\}$, care satisface aceeaşi relaţie (27), cu condiţia ca diferenţa între restul R_n şi expresia ei asimptotică $\mathcal{R}''_n$, obţinută cu ajutorul lui $\{\alpha''_n\}$, să tindă mai repede către zero, decît diferenţa între acelaşi rest R_n şi expresia lui asimptotică $\mathcal{R}'_n$, obţinută cu ajutorul şirului $\{\alpha'_n\}$, în baza teoremei 1?

Se demonstrează două leme:

LEMA 1. *Dacă $\{\alpha'_n\}$ şi $\{\alpha''_n\}$ sînt şiruri de numere pozitive, care satisfac relaţiile*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n u_n - \alpha_{n+1} u_{n+1}}{u_{n+1}} = 1 \\ &\lim_{n\to\infty} \alpha_n u_n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

(înlocuindu-se α_n cu α'_n respectiv α''_n în (28)), *atunci între ele există relaţia la limită*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha''_n}{\alpha'_n} = 1.$$

Demonstraţie. Din (28) rezultă că seria $\sum\limits_1^\infty u_n$ este convergentă, iar $\alpha'_n u_n$ respectiv $\alpha''_n u_n$ sînt expresii asimptotice ale restului R_n şi le notăm cu $\mathcal{R}'_n$ respectiv cu $\mathcal{R}''_n$. Din definiţia expresiei asimptotice a restului, urmează relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}''_n}{\mathcal{R}'_n} = 1, \text{ deci şi } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha''_n}{\alpha'_n} = 1.$$

LEMA 2. *Fie $\{\alpha'_n\}$ şi $\{\alpha''_n\}$ şiruri de numere pozitive, care satisfac relaţiile* (28) *ale lemei* 1. *Fie mai departe*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha''_n u_n - \alpha''_{n+1} u_{n+1}}{u_{n+1}} - 1 = \frac{\varepsilon''_{n+1}}{u_{n+1}} \to 0 \quad (n \to \infty) \\ &\frac{\alpha'_n u_n - \alpha'_{n+1} u_{n+1}}{u_{n+1}} - 1 = \frac{\varepsilon'_{n+1}}{u_{n+1}} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

unde ε'_{n+1} şi ε''_{n+1} sînt nenule, ε'_{n+1} nu-şi schimbă semnul începînd de la un indice suficient de mare, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon''_{n+1}}{\varepsilon'_{n+1}} = 0$. Atunci expresiile asimptotice $\mathcal{R}''_n = \alpha''_n u_n$ şi $\mathcal{R}'_n = \alpha'_n u_n$ satisfac relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}''_n - R_n}{\mathcal{R}'_n - R_n} = 0$, adică $\mathcal{R}''_n$ este o aproximare mai bună a restului, decît $\mathcal{R}'_n$.

Demonstraţie. Din (29) rezultă convergenţa seriei $\sum\limits_1^\infty u_n$ şi relaţiile:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{R}''_n - \mathcal{R}''_{n+1} &= u_{n+1} + \varepsilon''_{n+1} \\ \mathcal{R}'_n - \mathcal{R}'_{n+1} &= u_{n+1} + \varepsilon'_{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Însumînd fiecare din relaţiile (30) de la n la ∞, obţinem

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{R}''_n &= R_n + \sum_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon''_{\nu+1} \\ \mathcal{R}'_n &= R_n + \sum_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon'_{\nu+1} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon''_{n+1}}{\varepsilon'_{n+1}} = 0$, din enunţul lemei 2, se transcrie astfel

$$-\alpha < \frac{\varepsilon''_{n+1}}{\varepsilon'_{n+1}} < \alpha \quad (n > N_\alpha), \tag{32}$$

unde α este un număr pozitiv arbitrar de mic, iar N_α un număr suficient de mare asociat lui α. Din (32) se obţine

$$-\alpha \sum_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon'_{\nu+1} < \sum_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon''_{\nu+1} < \alpha \sum_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon'_{\nu+1} \quad (n > N_\alpha),$$

de unde

$$-\alpha < \frac{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon''_{\nu+1}}{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon'_{\nu+1}} < \alpha \quad (n > N_\alpha). \tag{33}$$

Ţinîndu-se seamă de (31), sistemul de inegalităţi (33) este echivalent cu relaţia la limită

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}''_n - R_n}{\mathcal{R}'_n - R_n} = 0.$$

Dacă de la un indice suficient de mare, ε_n' este negativ, raţionamentul de mai sus nu se modifică esenţial. Astfel lema 2 este demonstrată.

Ţinîndu-se seamă de lema 1 şi lema 2, rezultă următoarea

METODĂ de îmbunătăţirea expresiei asimptotice a restului: *Dacă avem un şir de numere pozitive, $\{a_n\}$, pentru care este valabilă relaţia la limită* (I), *iar expresia $a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} - \mu_l u_{n+l}$ nu-şi schimbă semnul începînd cu un indice suficient de mare, atunci căutăm un şir $\{b_n\}$ astfel ca să aibă loc relaţiile*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} b_n = 1 \\ &\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n u_n - a_{n+1} b_{n+1} u_{n+1} - \mu_l u_{n+l}}{a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} - \mu_l u_{n+l}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

În aceste condiţii, $\frac{1}{\mu_l}(a_n b_n u_n - \lim_{n\to\infty} a_n b_n u_n)$ este o expresie asimptotică a restului R_{n+l-1}, îmbunătăţită faţă de expresia $\frac{1}{\mu_l}(a_n u_n - \lim_{n\to\infty} a_n u_n)$, stabilită prin teorema 1.

O formulare puţin diferită de cea de sus este următoarea:

Dacă avem o expresie asimptotică $\mathcal{R}_n$, pentru restul seriei convergente cu termeni pozitivi, $\sum_1^\infty u_n$, atunci, dacă un şir de numere pozitive $\{b_n\}$ satisface condiţiile

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} b_n = 1 \\ &\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}_n b_n - \mathcal{R}_{n+1} b_{n+1} - u_{n+1}}{\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+1} - u_{n+1}} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$\mathcal{R}_n b_n$ este o expresie asimptotică a restului R_n, îmbunătăţită faţă de $\mathcal{R}_n$.

Exemplul 7. În [8] cap. II, § 1, se dă o delimitare a restului seriei $\sum_1^\infty \frac{n}{a^n}$ $(a > 1)$, cu ajutorul unei duble inegalităţi. Pornind de la o expresie asimptotică a restului şi aplicînd metoda de îmbunătăţire din prezenta lucrare, reuşim, în cazul acestui exemplu, să determinăm valoarea exactă a restului. Deoarece în cazul seriei $u_n = \frac{n}{a^n}$ avem $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}$, formula mai sus amintită a lui N. Obreschkoff ne dă o primă expresie asimptotică pentru rest, şi anume

$$\mathcal{R}_n = \frac{1}{a-1} \frac{n}{a^n}.$$

De aici

$$\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+1} - u_{n+1} = -\frac{1}{a-1} \frac{1}{a^n}.$$

Punînd $b_n = 1 + \frac{\beta}{n}$, se obţine

$$\mathcal{R}_n b_n - \mathcal{R}_{n+1} b_{n+1} - u_{n+1} = -\frac{1}{a-1} \frac{1}{a^n} \frac{a-(a-1)\beta}{a}.$$

De aici se determină β, astfel încît expresia $\mathcal{R}_n b_n - \mathcal{R}_{n+1} b_{n+1} - u_{n+1}$ să se anuleze; $\beta = \frac{a}{a-1}$. Prin urmare, *restul exact* este

$$R_n = \frac{(a-1)n + a}{(a-1)^2 a^n}.$$

Universitatea „Babeş-Bolyai" — Cluj
Catedra de analiză

ОБЩАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОЦЕНКИ ОСТАТКА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Автор даёт общую асимптотическую формулу для остатка сходящегося рода с положительными членами $\sum_1^\infty u_n$ а именно

$$R_{n+l-1} \cong \frac{a_n u_n - \lim_{n\to\infty} a_n u_n}{\mu_l},$$

где l есть параметр, могущий принимать целые положительные значения, μ_l — положительная константа, а $\{a_n\}$ последовательность положительных чисел, фигурирующий в формулировке (I) предельной формы критерия Куммера, измененного в смысле обобщения, Г. С. Салехова, [8].

При помощи этой формулы получаются, при $l = 1$ простые выражения для асиптотической оценки остатка ряда $\sum_1^\infty u_n$, когда ряд удовлетворяет условиям одного из критерий Даламбера, Раабе-Дюхамеля, Ж. Бертрана и т.д. Асимптотическая формула Н. Обрешкова [5] оказывается частым случаем общей асимптотической формулы, установленной в настоящем труде. Для некоторых классов рядов общая асимптотическая формула даётдаже точное значение остатка. В труде исследуется и вопрос улучшения асимптотической формулы остатка.

В труде содержатся и численные применения.

UNE FORMULE ASYMPTOTIQUE GÉNÉRALE POUR L'ÉVALUATION DU RESTE DES SÉRIES CONVERGENTES À TERMES POSITIFS

RÉSUMÉ

L'auteur de cet article déduit une formule asymptotique générale pour le reste de la série $\sum_{1}^{\infty} u_n$, convergente et à termes positifs, notamment

$$R_{n+l-1} \cong \frac{a_n u_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n u_n}{\mu_l},$$

où l est un paramètre qui peut prendre des valeurs entières positives, μ_l est une constante positive et $\{a_n\}$ la suite à termes positifs qui figure dans l'énoncé (I) de la forme limite du critérium de Kummer, modifié dans le sens d'une généralisation considérée par G. S. Salekhov dans [8]. Grâce à cette formule, on obtient, si on pose $l = 1$, des expressions simples pour l'évaluation asymptotique du reste de la série $\sum_{1}^{\infty} u_n$ satisfaisant les conditions envisagées par l'un des critériums de d'Alembert, Raabe-Duhamel, J. Bertrand, etc. Une formule asymptotique de N. Obrechkoff [5] se déduit de même de la formule asymptotique générale. Pour certaines classes de séries, la formule asymptotique générale donne la valeur exacte du reste. L'auteur s'occupe aussi du problème de l'amélioration de la formule asymptotique du reste.

Il donne aussi des applications numériques.

BIBLIOGRAFIE

1. K. Knopp, *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen.* Verlag Julius Springer, Berlin, 1931.
2. E. Kummer, *Über die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, **13**, 171–184 (1835).
3. — *Eine neue Methode, die numerische Summen langsamm convergierenden Reihen zu berechnen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, **16**, 206–214 (1837).
4. A. Ney, *O condiție necesară de convergență și legătura ei cu restul seriilor.* Studia Universitatis „Babeș-Bolyai" – Cluj, Ser. I, Fasc. 1, Mathematica-Physica (1961).
5. N. Obreschkoff, *Asymptotische Formeln zur angenäherten Auswertung von Summen unendlicher Reihen.* Aktuelle Probleme der Rechentechnik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957 p. 119–125.
6. Романовский В. И., *Введение в анализ. Избранные труды I.* Издательство Академии Наук Узбекской ССР, Ташкент, 1959.
7. Салехов Г. С., *К теории вычислений рядов.* Усехи математических наук, **IV**, *4* (*32*), 50–82 (1949).
8. — *Вычисление рядов.* Гостехиздат, Москва, 1955.

Primit la 1. VI. 1960.