ASUPRA UNEI TEOREME A LUI W. A. MARKOV*)

DE

TIBERIU POPOVICIU

Membru corespondent al Academiei R.P.R.

(Cluj)

Cu ocazia generalizării celebrei inegalităţi a lui A. A. Markov, W. A. M a r k o v a dat [2], ca o lemă ajutătoare, următoarea teoremă :

Dacă rădăcinile a două polinoame de gradul n, cu toate rădăcinile reale, se separă, atunci şi rădăcinile derivatelor lor se separă.

În a doua parte a lucrării vom da o demonstraţie a acestei teoreme, puţin diferită de aceea lui W. A. Markov însuşi precum şi de aceea a lui P. M o n t e l [3], dată acum vreo 30 de ani.

Demonstraţia pe care o dăm se bazează pe continuitatea şi pe monotonia rădăcinilor derivatei unui polinom cu toate rădăcinile reale, în raport cu rădăcinile polinomului. În prima parte a acestei lucrări vom analiza puţin această proprietate de monotonie.

În fine, în partea a treia a lucrării vom da o nouă teoremă asupra polinoamelor cu toate rădăcinile reale, analoagă cu aceea citată a lui W. A. Markov.

În cele ce urmează vom considera numai polinoame de o variabilă cu toate rădăcinile reale iar prin gradul unui polinom vom înţelege gradul său efectiv, chiar dacă aceste lucruri nu sînt specificate în mod explicit. Deoarece ne interesează numai rădăcinile polinoamelor, două polinoame care diferă numai printr-o constantă multiplicativă pot fi considerate egale.

Accentul la polinoame înseamnează derivare.

I

1. Dacă un polinom are toate rădăcinile sale reale, şi derivata sa are toate rădăcinile reale. Există o importantă proprietate, bine cunoscută, de separare a rădăcinilor derivatei de către rădăcinile polinomului. Vom ţine mai jos seamă de această proprietate.

---

*) Lucrarea a apărut în limba franceză în revista „Mathematica" vol. 2 (25), 1960.

Rădăcinile unui polinom cu cel mai înalt coeficient egal cu 1 (deci un polinom de forma x^n + polinom de gradul $< n$) sînt funcţii continue în raport cu coeficienţii polinomului, iar coeficienţii sînt funcţii continue (polinoame) în raport cu rădăcinile polinomului. Dacă ţinem seamă de relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii unui polinom, deducem continuitatea rădăcinilor derivatei în raport cu rădăcinile polinomului.

2. Proprietatea de monotonie a rădăcinilor derivatei în raport cu rădăcinile polinomului se poate enunţa sub forma următoare:

Rădăcinile derivatei sînt funcţii nedescrescătoare de rădăcinile polinomului.

Această proprietate este bine cunoscută şi a fost mult folosită de Laguerre în cercetările sale asupra polinoamelor cu toate rădăcinile reale.

Pentru a clarifica proprietatea de monotonie de mai sus, introducem relaţia $P \overset{c}{\to} Q$ între două polinoame care are loc dacă şi numai dacă:

1°. Polinoamele P, Q sînt de acelaşi grad $n \geqq 1$.

2°. Rădăcinile respective

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n, \quad y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_n \tag{1}$$

ale acestor polinoame verifică inegalităţile

$$x_i \leqq y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Această relaţie este (reflexivă şi) transitivă.

Este inutil de considerat cazul $n = 0$ cînd relaţia precedentă nu are nici un sens (deoarece nu există rădăcini). Dacă $n = 1$, în definiţie, este suficient să menţinem numai inegalitatea (2) şi se vede uşor că, în acest caz, cel puţin una din relaţiile $P \overset{c}{\to} Q$, $Q \overset{c}{\to} P$ are loc totdeauna. Pentru orice $n > 1$ se pot construi polinoame P, Q pentru care nici una dintre relaţiile $P \overset{c}{\to} Q$, $Q \overset{c}{\to} P$ nu este adevărată.

Proprietatea de monotonie a rădăcinilor derivatei în raport cu acelea ale polinomului se exprimă atunci prin

TEOREMA 1. *Dacă P, Q sînt două polinoame de gradul $n > 1$, din $P \overset{c}{\to} Q$ rezultă $P' \overset{c}{\to} Q'$.*

Introducem de asemenea relaţia $P \overset{cc}{\to} Q$ între două polinoame, care are loc dacă şi numai dacă:

1°. Polinoamele P, Q au acelaşi grad $n \geqq 1$ şi ambele au toate rădăcinile simple.

2°. Rădăcinile respective

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \quad y_1 < y_2 < \cdots < y_n \tag{1'}$$

ale acestor polinoame verifică inegalităţile

$$x_i < y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2'}$$

Această relaţie, care este transitivă, este un caz particular al relaţiei precedente şi anume cînd peste tot în (1) şi (2) semnul $\leqq$ este înlocuit cu $<$. Cele două relaţii sînt legate şi prin o proprietate de transitivitate mixtă, analoagă cu transitivitatea mixtă a relaţiilor de inegalitate $<$ şi $\leqq$. Dacă $P \overset{cc}{\to} R$, $R \overset{c}{\to} Q$ şi dacă Q are toate rădăcinile simple, avem $P \overset{cc}{\to} Q$. Din $P \overset{cc}{\to} R$, $R \overset{c}{\to} S$, $S \overset{cc}{\to} Q$ rezultă $P \overset{cc}{\to} Q$.

Avem următoarea:

Dacă rădăcinile lui P, Q sînt funcţii continue de un parametru λ pe un interval care conţine pe λ_0 şi dacă avem $P \overset{cc}{\to} Q$ pentru $\lambda \neq \lambda_0$, vom avea $P \overset{c}{\to} Q$, dar nu în general $P \overset{cc}{\to} Q$, pentru $\lambda = \lambda_0$. Această observaţie este valabilă şi pentru perechile de relaţii $\overset{s}{\to}$, $\overset{ss}{\to}$; $\overset{m}{\to}$, $\overset{mm}{\longrightarrow}$; $\overset{mc}{\to}$, $\overset{mcmc}{\longrightarrow}$, care vor fi considerate mai jos.

Avem următoarea:

TEOREMA 2. *Dacă P, Q sînt două polinoame de gradul $n > 1$, din $P \overset{cc}{\to} Q$ rezultă $P' \overset{cc}{\to} Q'$.*

3. Vom arăta că teorema 1 rezultă din teorema 2.

Într-adevăr fie $P \overset{c}{\to} Q$, (1) rădăcinile polinoamelor P, Q, $n > 1$ şi

$$\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \cdots \leqq \xi_{n-1}, \quad \eta_1 \leqq \eta_2 \leqq \cdots \leqq \eta_{n-1} \tag{3}$$

respectiv rădăcinile polinoamelor P', Q'.

Să considerăm polinoamele P_ε, Q_ε de gradul n, avînd respectiv rădăcinile $x_i + i\varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $y_i + (i+1)\varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$, unde ε este un număr pozitiv. Polinoamele P_ε, Q_ε au toate rădăcinile simple şi avem $P_\varepsilon \overset{cc}{\to} Q_\varepsilon$. Dacă

$$\xi_1^{(\varepsilon)} < \xi_2^{(\varepsilon)} \cdots < \xi_{n-1}^{(\varepsilon)}, \quad \eta_1^{(\varepsilon)} < \eta_2^{(\varepsilon)} < \cdots < \eta_{n-1}^{(\varepsilon)}$$

sînt respectiv rădăcinile polinoamelor P'_ε, Q'_ε, avem

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \xi_i^{(\varepsilon)} = \xi_i, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \eta_i^{(\varepsilon)} = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Dacă presupunem că teorema 2 este adevărată, rezultă că $P'_\varepsilon \overset{cc}{\to} Q'_\varepsilon$ şi din (4) deducem, făcînd $\varepsilon \to 0$, că avem $P' \overset{c}{\to} Q'$.

Cu aceasta s-a demonstrat că teorema 1 rezultă din teorema 2.

4. Rămîne să demonstrăm teorema 2.

Fie P, Q două polinoame de gradul $n > 1$ astfel ca să avem $P \overset{cc}{\to} Q$ şi fie (1') respectiv rădăcinile acestor polinoame. Fie P_i un polinom de gradul

n avînd ca rădăcini pe $x_1, x_2, \ldots, x_{n-i}, y_{n-i+1}, y_{n-i+2}, \ldots, y_n$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Polinomul P_0 este egal cu P iar P_n este egal cu Q. Polinoamele P_i au toate rădăcinile simple, avem însă, în general, numai $P_i \overset{c}{\rightarrow} P_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Dar, dacă putem demonstra că avem

$$P'_i \overset{cc}{\rightarrow} P'_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{5}$$

atunci, pe baza transitivităţii, rezultă că $P' \overset{cc}{\rightarrow} Q'$ şi teorema 2 este demonstrată.

Rămîne dar să demonstrăm relaţiile (5). Aceste relaţii rezultă din

LEMA 1. *Rădăcinile derivatei unui polinom cu toate rădăcinile reale şi simple sînt funcţii crescătoare în raport cu fiecare dintre rădăcinile polinomului.*

Fie g un polinom de gradul n ($\geqq 1$) cu toate rădăcinile $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ reale şi simple. Prin enunţul lemei 1 înţelegem că fiecare dintre rădăcinile derivatei polinomului $f_\alpha = (x - \alpha)g$ este o funcţie crescătoare de α. Aceste rădăcini $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$ sînt funcţii continue de α şi rămîn distincte. Vom demonstra întîi că ele sînt funcţii strict monotone de α. Într-adevăr, dacă, de exemplu, β_k nu ar fi o funcţie strict monotonă de α, am putea găsi două valori diferite α', α'' ale lui α pentru care polinoamele

$$f'_{\alpha'} = (x - \alpha')g' + g, \quad f'_{\alpha''} = (x - \alpha'')g' + g \tag{6}$$

să aibă o rădăcină comună β_k. Acest lucru este însă imposibil deoarece orice rădăcină comună polinoamelor (6) ar trebui să fie o rădăcină comună a polinoamelor g, g', ceea ce contrazice faptul că g are numai rădăcini simple. Cu aceasta strict monotonia rădăcinilor β_i este demonstrată. Rămîne numai să precizăm sensul acestei monotonii. Dacă ţinem seamă de faptul că rădăcinile derivatei sînt separate de acelea ale polinomului şi dacă observăm că

$$\lim_{\alpha \to \alpha_i} \beta_i = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

deducem imediat că sensul monotoniei este cel crescător pentru fiecare dintre rădăcinile β_i.

Cu aceasta lema 1 este demonstrată.

Se pot da şi alte demonstraţii lemei 1. Se pot da demonstraţii bazate pe nişte consideraţii analoage cu cele făcute în partea II şi partea III a acestei lucrări. Nu ne vom ocupa de asemenea demonstraţii.

Observare. Dacă $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \ldots < \alpha'_{n-1}$ sînt rădăcinile polinomului g', rădăcinile β_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ variază respectiv în intervalele $(-\infty, \alpha'_1]$, $[\alpha'_{i-1}, \alpha'_i]$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$, $[\alpha'_{n-1}, \infty)$, dacă $n > 2$. Dacă $n=1$, rădăcina β_1 variază de la $-\infty$ la ∞, iar dacă $n=2$ rădăcinile β_1, β_2 variază respectiv în intervalele $\left(-\infty, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \infty\right)$.

II

5. Ne vom ocupa acum de demonstrarea semnalată a teoremei lui W. A. Markov.

Introducem relaţia $P \overset{s}{\rightarrow} Q$ între două polinoame, care are loc dacă şi numai dacă:

1°. Polinoamele P, Q au aceleaşi grad $n \geqq 1$.

2°. Rădăcinile respective (1) ale acestor polinoame verifică inegalităţile

$$x_1 \leqq y_1 \leqq x_2 \leqq y_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq y_n. \tag{7}$$

Dacă $P \overset{s}{\rightarrow} Q$ sau $Q \overset{s}{\rightarrow} P$, putem spune că rădăcinile polinoamelor P, Q *se separă*.

În general din $P \overset{s}{\rightarrow} Q$ rezultă $P \overset{c}{\rightarrow} Q$, iar pentru $n = 1$, relaţiile $P \overset{c}{\rightarrow} Q$, $P \overset{s}{\rightarrow} Q$ sînt echivalente.

Pe baza unei observaţii precedente , pentru orice $n > 1$ putem găsi polinoamele P, Q de gradul n astfel ca nici una dintre relaţiile $P \overset{s}{\rightarrow} Q$, $Q \overset{s}{\rightarrow} P$ să nu fie verificată.

Teorema lui W. A. Markov se poate enunţa sub forma următoare:

TEOREMA 3. *Dacă P, Q sînt două polinoame de gradul $n > 1$, din $P \overset{s}{\rightarrow} Q$ rezultă $P' \overset{s}{\rightarrow} Q'$.*

Dacă $n = 2$, teorema 3 rezultă din teorema 1. Într-adevăr, din $P \overset{s}{\rightarrow} Q$ rezultă $P \overset{c}{\rightarrow} Q$ din care, pe baza teoremei 1, rezultă $P' \overset{c}{\rightarrow} Q'$. Această relaţie este însă (pentru $n = 2$) echivalentă cu $P' \overset{s}{\rightarrow} Q'$ şi proprietatea este demonstrată.

Introducem de asemenea relaţia $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$ între două polinoame, care are loc dacă şi numai dacă:

1°. Polinoamele P, Q au acelaşi grad $\geqq 1$ şi ambele au toate rădăcinile lor simple.

2°. Rădăcinile respective (1′) ale acestor polinoame verifică inegalităţile

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n. \tag{7'}$$

Din $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$ rezultă $P \overset{cc}{\rightarrow} Q$, iar pentru $n = 1$ aceste relaţii sînt echivalente.

Avem următorul caz particular al teoremei lui W. A. Markov:

TEOREMA 4. *Dacă P, Q sînt două polinoame de gradul $n > 1$, din $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$, rezultă $P' \overset{ss}{\rightarrow} Q'$.*

Ca mai sus se demonstrază că pentru $n = 2$, teorema 4 rezultă din teorema 2.

6. Este suficient să demonstrăm teorema 4, căci atunci teorema 3 rezultă. Pentru a arăta acest lucru procedăm la fel ca la nr. **3**, unde am arătat că teorema 1 rezultă din teorema 2.

Dacă avem $P \overset{s}{\rightarrow} Q$ şi dacă considerăm acum polinoamele P_ε, Q_ε avînd respectiv ca rădăcini pe $x_i+(2i-1)\varepsilon$, $i=1,2,\ldots,n$, $y_i+2i\varepsilon$, $i=1,2,\ldots,n$, unde ε este un număr pozitiv, avem $P_\varepsilon \overset{ss}{\rightarrow} Q_\varepsilon$. Dacă presupunem că teorema 4 este adevărată, de aici rezultă că $P'_\varepsilon \overset{ss}{\rightarrow} Q'_\varepsilon$. Dacă facem $\varepsilon \rightarrow 0$, rădăcinile lui P'_ε, Q'_ε tind respectiv către rădăcinile lui P', Q' şi deducem $P' \overset{s}{\rightarrow} Q'$. Teorema 3 este demonstrată.

7. Teorema 4 se demonstrează bazîndu-ne pe teorema 2, pe lema 1 şi pe continuitatea rădăcinilor derivatei.

Dacă $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$, rezultă $P \overset{cc}{\rightarrow} Q$, deci $P' \overset{cc}{\rightarrow} Q'$. Pentru a arăta că avem chiar $P' \overset{ss}{\rightarrow} Q'$, este suficient să demonstrăm că derivatele polinoamelor P, Q (care au toate rădăcinile simple) nu pot avea nici o rădăcină comună. Într-adevăr, este uşor de văzut că, în acest caz, relaţia $P' \overset{ss}{\rightarrow} Q'$ se menţine cînd rădăcinile lui P cresc către rădăcinile respective ale lui Q.

Dar, dacă (1') sînt rădăcinile polinoamelor P, Q de gradul n, relaţia $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$ este echivalentă cu egalitatea

$$Q = P\left(a + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x - x_i}\right), \tag{8}$$

unde a este o constantă diferită de zero, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt n constante diferite de zero şi de acelaşi semn. De altfel, produsul aa_i este de semn contrar cu cel mai înalt coeficient al lui P, deci cu semnul lui P pentru x foarte mare.

Prin derivare din (8) deducem

$$Q' = P'\left(a + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x - x_i}\right) - P\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(x - x_i)^2}. \tag{9}$$

De aici se vede că dacă P', Q' ar avea o rădăcină comună, aceasta ar trebui să anuleze şi polinomul P, ceea ce este imposibil, deoarece, prin ipoteză, P are toate rădăcinile sale simple.

8. Relaţiile $P \overset{s}{\rightarrow} Q$, $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$ se pot extinde şi la cazul cînd polinomul P este de gradul n iar polinomul Q de gradul $n-1$. Dacă $n > 1$ şi

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n, \quad y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_{n-1} \tag{10}$$

sînt respectiv rădăcinile lui P şi ale lui Q, relaţia $P \overset{s}{\rightarrow} Q$ are loc dacă şi numai dacă

$$x_i \leqq y_i \leqq x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{11}$$

Se poate încă spune că atunci rădăcinile lui P şi Q se separă.

Relaţia $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$ are loc dacă şi numai dacă, în plus, rădăcinile lui P şi Q sînt toate simple iar în loc de inegalităţile (11) avem

$$x_i < y_i < x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{11'}$$

Avem atunci :

CONSECINŢA 1. *Dacă P este un polinom de gradul n iar Q un polinom de gradul $n-1$, $n > 1$, din $P \overset{s}{\rightarrow} Q$ rezultă $P' \overset{s}{\rightarrow} Q'$.*

Proprietatea rezultă din teorema 3 printr-o trecere la limită. Pentru a arăta acest lucru, fie (10) rădăcinile lui P şi Q, care verifică relaţia $P \overset{s}{\rightarrow} Q$. Să considerăm polinomul $R = (x - y_n)\,Q$ de gradul n. Dacă $x_n \leqq y_n$, avem $P \overset{s}{\rightarrow} R$, de unde, pe baza teoremei 3, deducem $P' \overset{s}{\rightarrow} R'$. Dacă facem $y_n \rightarrow \infty$, una din rădăcinile lui R' (cea mai mare) tinde la ∞ iar celelalte către rădăcinile respective ale lui Q'. Ţinînd seamă de continuitatea rădăcinilor derivatei în raport cu rădăcinile polinomului, se vede că făcînd $y_n \rightarrow \infty$, din $P' \overset{s}{\rightarrow} R'$ rezultă $P' \overset{s}{\rightarrow} Q'$.

Avem de asemenea :

CONSECINŢA 2. *Dacă P este un polinom de gradul n iar Q un polinom de gradul $n-1$, $n > 1$, din $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$ rezultă $P' \overset{ss}{\rightarrow} Q'$.*

Această proprietate se deduce din teorema 4 ca şi consecinţa 1 din teorema 3. Formăm ca mai sus polinomul R. Dacă $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$ şi $x_n < y_n$, avem $P \overset{ss}{\rightarrow} R$ şi deci, pe baza teoremei 4, $P' \overset{ss}{\rightarrow} R'$. De aici, dacă facem $y_n \rightarrow \infty$, rezultă $P' \overset{s}{\rightarrow} Q'$, şi pentru a arăta că avem chiar $P' \overset{ss}{\rightarrow} Q'$ este suficient să demonstrăm că dacă $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$, polinoamele P', Q' nu pot avea nici o rădăcină comună.

Dacă $P \overset{ss}{\rightarrow} Q$ avem formula (8), unde $a = 0$ iar a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sînt n constante diferite de zero şi de acelaşi semn. Formula (9) ne arată că P', Q' nu pot avea nici o rădăcină comună.

Consecinţa 2 este demonstrată.

9. Ca o aplicaţie să considerăm un şir de polinoame ortogonale

$$\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-1}, \Pi_n, \ldots$$

Se ştie că rădăcinile lui Π_n sînt toate reale şi simple şi că rădăcinile lui Π_{n-1} sînt separate, în sens strict, de către rădăcinile lui Π_n. Cu alte cuvinte pentru $n > 1$, avem $\Pi_n \overset{ss}{\to} \Pi_{n-1}$. Din consecinţa 2 rezultă deci şi :

CONSECINŢA 3. *Dacă Π_{n-1}, Π_n sînt doi termeni consecutivi ai unui şir de polinoame ortogonale ($n > 1$), avem $\Pi'_n \overset{ss}{\to} \Pi'_{n-1}$.*

III

10. Ne vom ocupa acum de o teoremă analoagă cu a lui W. A. Markov.

Introducem relaţia $P \overset{m}{\to} Q$ între două polinoame, care are loc dacă şi numai dacă :

1°. Polinoamele P, Q au acelaşi grad $n \geqq 1$.

2°. Rădăcinile (1) ale acestor polinoame verifică inegalităţile

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_i \leqq y_1 + y_2 + \cdots + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (12)$$

precum şi egalitatea

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n. \qquad (13)$$

Dacă $n = 1$ păstrăm din definiţie numai egalitatea (13).

Dacă $n = 1$ relaţia $P \overset{m}{\to} Q$ înseamnează că P, Q au aceeaşi rădăcină, deci că — conform sensului adoptat la începutul acestei lucrări — ele sînt egale. Este clar că pentru orice $n \geqq 1$ putem găsi două polinoame P, Q de gradul n, astfel ca nici una dintre relaţiile $P \overset{m}{\to} Q$, $Q \overset{m}{\to} P$ să nu fie verificată.

După G. H. Hardy, J. E. Littlewood şi G. Pólya [1] relaţia $P \overset{m}{\to} Q$ este echivalentă cu faptul că rădăcinile lui Q se deduc din acelea ale lui P printr-un aşa-numit procedeu de „mediere". Aceasta înseamnează că există o matrice (a_{ij}), cu n linii şi n coloane, cu elementele nenegative, cu suma elementelor pe fiecare linie şi pe fiecare coloană egală cu 1,

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i,\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu,j} = 1, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

şi astfel ca să avem

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

În cele ce urmează nu ne vom folosi direct de această proprietate.

Relaţia considerată este (reflexivă şi) transitivă şi avem următoarea teoremă, analoagă cu aceea a lui W. A. Markov :

TEOREMA 5. *Dacă P, Q sînt două polinoame de gradul $n > 1$, din $P \overset{m}{\to} Q$ rezultă $P' \overset{m}{\to} Q'$.*

Introducem de asemenea relaţia $P \overset{mm}{\longrightarrow} Q$ între două polinoame, care are loc dacă şi numai dacă :

1°. Polinoamele P, Q sînt de acelaşi grad $n \geqq 1$ şi ambele au toate rădăcinile lor simple.

2°. Rădăcinile respective (1′) ale acestor polinoame verifică inegalităţile

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_i < y_1 + y_2 + \cdots + y_i, \; i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (12')$$

precum şi egalitatea (13).

Pentru $n=1$ păstrăm ca definiţie numai egalitatea (13) şi atunci relaţia $P \overset{mm}{\longrightarrow} Q$ este echivalentă cu $P \overset{m}{\to} Q$.

Relaţia $\overset{mm}{\longrightarrow}$ este transitivă. Avem şi aici nişte proprietăţi de transitivitate mixtă între cele două relaţii considerate. Dacă $P \overset{mm}{\longrightarrow} R$, $R \overset{m}{\to} Q$ şi dacă Q are toate rădăcinile sale simple, avem $P \overset{mm}{\longrightarrow} Q$. Din $P \overset{mm}{\longrightarrow} R$, $R \overset{m}{\to} S$, $S \overset{mm}{\longrightarrow} Q$ rezultă $P \overset{mm}{\longrightarrow} Q$.

În fine, avem următorul caz particular al teoremei 5 :

TEOREMA 6. *Dacă P, Q sînt două polinoame de gradul $n > 1$, din $P \overset{mm}{\longrightarrow} Q$ rezultă $P' \overset{mm}{\longrightarrow} Q'$.*

Pentru $n = 2$ teoremele 5, 6 rezultă imediat deoarece rădăcina derivatei unui polinom de gradul al doilea este egală cu semi-suma rădăcinilor polinomului. În acest caz teoremele 5, 6 rezultă din egalitatea (13).

11. Există două cazuri în care demonstraţia teoremei 5 nu prezintă nici o dificultate. Aceste cazuri au loc dacă unul dintre polinoamele P, Q are toate rădăcinile confundate.

Întîi vom face cîteva observaţii. Dacă

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n, \qquad (14)$$

sînt rădăcinile polinomului P, avem şi

$$x_1 \leqq \frac{x_1 + x_2}{2} \leqq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \leqq \cdots \leqq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \qquad (15)$$

Dacă (1) sînt rădăcinile polinoamelor P, Q şi dacă $P \overset{m}{\to} Q$, avem $x_1 \leqq y_1$, $y_n \leqq x_n$ şi deci

$$x_n - x_1 \geqq y_n - y_1 \geqq 0. \qquad (16)$$

Dacă $n > 1$ şi $P \overset{mm}{\longrightarrow} Q$, avem inegalităţile mai precise,

$$x_n - x_1 > y_n - y_1 > 0. \qquad (16')$$

Să demonstrăm acum teorema 5 în cele două cazuri particulare semnalate.

Cazul 1. Polinomul P are toate rădăcinile sale confundate. Din $P \overset{m}{\to} Q$ şi (16) rezultă atunci că şi Q are toate rădăcinile sale confundate şi anume cu unica rădăcină distinctă a lui P. În acest caz P', Q' au de asemenea rădăcinile lor confundate cu unica rădăcină distinctă a lui P şi teorema 5 rezultă.

Cazul 2. Polinomul Q are toate rădăcinile sale confundate. Fie (3) rădăcinile polinoamelor P', Q' şi să ţinem seamă de inegalităţile (15) corespunzătoare acestor rădăcini. Atunci, dacă $P \overset{m}{\to} Q$, avem

$$\xi_1 \leq \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \leq \cdots \leq \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n-1}}{n-1} = \eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_{n-1},$$

de unde rezultă imediat că $P' \overset{m}{\to} Q'$ şi teorema 5 este demonstrată.

12. Pentru a merge mai departe ne vom folosi de nişte operaţii la care vom supune rădăcinile unui polinom. Aceste operaţii, pe care le vom numi de *dilatare* şi de *contractare* a două rădăcini, au fost folosite în cartea citată a lui G. H. Hardy, J. E. Littlewood şi G. Pólya.

O dilatare a două $x' \leq x''$ dintre rădăcinile unui polinom constă în înlocuirea acestor rădăcini prin $x' - \rho$, $x'' + \rho$ respectiv, unde $\rho > 0$ şi lăsînd celelalte rădăcini ale polinomului neschimbate.

O contractare a două $x' < x''$ dintre rădăcinile unui polinom constă în înlocuirea acestor rădăcini prin $x' + \rho$, $x'' - \rho$ respectiv, unde $\rho > 0$ şi lăsînd celelalte rădăcini ale polinomului neschimbate.

Numărul ρ se poate numi *coeficientul* de dilatare, respectiv de contractare, corespunzător perechii de rădăcini considerate.

În ceea ce urmează, numai dacă nu se specifică în mod expres contrarul, vom considera numai dilatări şi contractări care nu deranjază ordinea rădăcinilor polinomului. Aceasta însemnează că coeficientul ρ este supus la restricţia, în primul caz, ca intervalele $[x' - \rho, x')$, $(x'', x'' + \rho]$, iar, în al doilea caz, ca intervalele $(x', x' + \rho]$, $[x'' - \rho, x'')$ să nu conţină nici o rădăcină a polinomului iniţial sau a polinomului transformat. Dacă (14) sînt rădăcinile polinomului iniţial şi $n > 1$, cu restricţia de mai sus, operaţia de dilatare este aplicabilă rădăcinilor x_r, x_s, $r < s$ numai în următoarele cazuri :

$r = 1$, $s = n$, pentru $0 < \rho$ oarecare,

$r = 1$, $s < n$, dacă $x_1 \leq x_s < x_{s+1}$, pentru $0 < \rho < x_{s+1} - x_s$,

$r > 1$, $s = n$, dacă $x_{r-1} < x_r \leq x_n$, pentru $0 < \rho < x_r - x_{r-1}$,

$r > 1$, $s < n$, dacă $x_{r-1} < x_r \leq x_s < x_{s+1}$, pentru

$$0 < \rho < \min(x_r - x_{r-1}, x_{s+1} - x_s).$$

Operaţia de contractare, cu restricţia de mai sus, este aplicabilă rădăcinilor x_r, x_s, $r < s$ numai în următoarele cazuri :

$s - r = 1$, dacă $x_r < x_{r+1}$, pentru $0 < \rho < \frac{x_{r+1} - x_r}{2}$,

$s - r > 1$, dacă $x_r < x_{r+1} \leq x_{s-1} < x_s$, pentru

$$0 < \rho < \min(x_{r+1} - x_r, x_s - x_{s-1}).$$

Operaţiile de dilatare şi de contractare fiind astfel precizate, se vede că o astfel de operaţie este perfect caracterizată de perechea de rădăcini căreia i se aplică şi de coeficientul ρ respectiv. În particular, dacă putem aplica o operaţie de dilatare sau de contractare de coeficient ρ, putem aplica, aceloraşi rădăcini, o dilatare respectiv o contractare de orice coeficient $< \rho$.

De aici rezultă că dacă supunem două din rădăcinile x_r, x_s, $r < s$ ale polinomului la o dilatare sau o contractare, rădăcinile polinomului sînt funcţii continue de coeficientul ρ. Tot astfel sînt şi sumele $x_1 + x_2 + \cdots + x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Aceste sume se transformă în $x_1 + x_2 + \cdots + x_i - \rho$ respectiv în $x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \rho$, pentru $i = r, r+1, \ldots, s-1$, după cum este vorba despre o dilatare respectiv o contractare de coeficient ρ a rădăcinilor x_r, x_s, $r < s$. Sumele $x_1 + x_2 + \cdots + x_i$ pentru celelalte valori ale lui i rămîn neschimbate. Să se reţină faptul că prin o dilatare sau o contractare a două rădăcini suma rădăcinilor nu se schimbă.

Dacă P^* este un polinom care se deduce din polinomul P prin aplicarea unei dilatări sau contractări de coeficient ρ, rădăcinile lui P^* tind, pentru $\rho \to 0$, către rădăcinile corespunzătoare ale lui P. În acelaşi timp rădăcinile lui $P^{*\prime}$, care sînt de asemenea funcţii continue de ρ, tind către rădăcinile corespunzătoare ale lui P'.

Este important să extindem aceste proprietăţi la limită la cazul cînd P^* se deduce din P prin aplicarea succesivă a unui număr finit de dilatări sau de contractări relative la diferite perechi de rădăcini ale polinomului. Această extindere trebuie făcută cu oarecare precauţiune deoarece aplicarea succesivă a mai multor operaţii depinde de ordinea lor. Cu alte cuvinte, operaţiile de dilatare şi de contractare nu sînt comutative, cînd ele se aplică la perechi de rădăcini diferite.

Exemplu. Fie $n = 3$ şi $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 2$. Prin urmare prima rădăcină este egală cu 0 iar a doua şi a treia cu 2. Dacă aplicăm întîi rădăcinilor x_1, x_3 (primei şi celei de a treia) o dilatare de coeficient 3, rădăcinile devin -3, 2, 5. Aplicînd apoi o contractare de coeficient 1 rădăcinilor x_2, x_3 (celei de a doua şi celei de a treia), obţinem rădăcinile $-3, 3, 4$. Ordinea operaţiilor nu se poate interverti deoarece operaţia de contractare nu se poate aplica rădăcinilor $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, dacă ţinem seamă de restricţia de a nu deranja ordinea rădăcinilor.

Rămînînd tot la acest exemplu, să presupunem că întîi aplicăm rădăcinilor x_2, x_3 (a doua şi a treia) o contractare de coeficient 1. Rădăcinile devin atunci 0, 1, 3. Aplicăm apoi rădăcinilor 0, 1 (prima şi a doua) o dilatare de coeficient 3 şi găsim rădăcinile -3, 3, 4. Trebuie însă să observăm că de fiecare dată am deranjat ordinea rădăcinilor.

Pe acest exemplu se vede precizarea pe care o aduce restricţia de a nu deranja ordinea rădăcinilor. Se mai vede de asemenea felul cum trebuie urmărite rădăcinile polinomului cînd aplicăm succesiv mai multe dilatări şi contractări de două rădăcini.

Nu vom examina mai amănunţit această problemă de permutabilitate deoarece proprietatea la limită de mai sus se va aplica în cele ce urmează, numai la anumite cazuri particulare care vor fi precizate la timpul lor.

13. Vom demonstra acum că teorema 5 rezultă din teorema 6.

Dacă polinomul P^* se deduce din P prin aplicarea unei operaţii de dilatare a două rădăcini, rezultă, din cele de mai sus, că avem $P^* \overset{m}{\to} P$. Această relaţie este adevărată şi dacă P^* se deduce din P prin aplicarea succesivă a unui număr oarecare de dilatări.

Fie (14) rădăcinile polinomului P şi fie $n > 1$. Să notăm cu P_ρ un polinom cu rădăcinile

$$x_i' = x_i - (n-i)\rho,\quad i = 1, 2, \ldots, n-1,\quad x_n' = x_n + \frac{n(n-1)}{2}\rho,$$

unde ρ este un număr pozitiv. Polinomul P_ρ se deduce din P aplicînd succesiv operaţia de dilatare de coeficient $(n-i)\rho$ rădăcinilor x_i, x_n, pentru $i=1, 2, \ldots, n-1$ (în această ordine). Avem $P_\rho \overset{m}{\to} P$. Să se observe că P_ρ are toate rădăcinile sale simple care, pentru $\rho \to 0$, tind către rădăcinile corespunzătoare ale lui P. În acelaşi timp rădăcinile lui P_ρ' tind către rădăcinile corespunzătoare ale lui P'.

Fie P, Q două polinoame de gradul $n > 1$, (1) rădăcinile acestor polinoame şi să presupunem că avem $P \overset{m}{\to} Q$. Fie

$$x_1' < x_2' < \cdots < x_n', \quad y_1' < y_2' < \cdots < y_n'$$

rădăcinile polinoamelor $P_{2\rho}$, Q_ρ, unde ρ este un număr pozitiv şi care se obţin din P, Q aşa cum P_ρ s-a obţinut mai sus din P. Avem atunci

$$y_1' + y_2' + \cdots + y_i' - (x_1' + x_2' + \cdots + x_i') =$$

$$= y_1 + y_2 + \cdots + y_i - (x_1 + x_2 + \cdots + x_i) + \frac{i(2n-i-1)}{2}\rho > 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$x_1' + x_2' + \cdots + x_n' = y_1' + y_2' + \cdots + y_n'.$$

Avem deci $P_{2\rho} \overset{mm}{\longrightarrow} Q_\rho$. Presupunînd că teorema 6 este adevărată, rezultă de aici că $P_{2\rho}' \overset{mm}{\longrightarrow} Q_\rho'$. Dar, dacă $\rho \to 0$, rădăcinile lui $P_{2\rho}'$, Q_ρ' tind către rădăcinile lui P', Q' respectiv. Făcînd deci $\rho \to 0$, deducem $P' \overset{m}{\to} Q'$.

Am demonstrat deci că teorema 5 rezultă din teorema 6.

Observare. Relaţia $P^* \overset{m}{\to} P$ este adevărată dacă P^* se deduce din P prin o dilatare a două rădăcini, *fără restricţia păstrării ordinei rădăcinilor*. Acest lucru se vede uşor observînd că dacă aplicăm o dilatare la două rădăcini $x' \leqq x''$ şi dacă presupunem că coeficientul ρ al acestei dilatări creşte, putem înlocui pe $x' - \rho$ sau pe $x'' + \rho$ cu o rădăcină pe care o traversează. Dacă convenim a zice că o dilatare a rădăcinilor $x' \leqq x''$ *nu deranjează în mod larg* ordinea rădăcinilor dacă intervalele $(x' - \rho, x')$, $(x'', x'' + \rho)$ nu conţin nici o rădăcină a polinomului, atunci proprietatea precedentă rezultă din faptul că orice dilatare, fără restricţia păstrării ordinei rădăcinilor, se poate obţine prin aplicarea succesivă a unui număr finit de dilatări care nu deranjează în mod larg ordinea rădăcinilor.

Se vede de asemenea că relaţia $P^* \overset{m}{\to} P$ este adevărată cînd P^* se deduce din P prin aplicarea succesivă a unui număr oarecare (finit sau nu) de dilatări cu sau fără restricţia păstrării ordinei rădăcinilor.

14. Vom deduce teorema 6 din o serie de leme pregătitoare.

Dacă polinomul P^* se deduce din P prin aplicarea unei contractări a două rădăcini, avem $P \overset{m}{\to} P^*$. Această relaţie rămîne adevărată şi dacă P^* se deduce din P prin aplicarea succesivă a unui număr finit de contractări. Dacă polinomul P are toate rădăcinile simple, şi P^* are toate rădăcinile simple.

LEMA 2. *Fiind dat un polinom P de gradul $n > 1$ şi un număr pozitiv ε oarecare, se poate găsi un polinom de gradul n astfel încît :*

1°. *Acest polinom să se deducă din P prin aplicarea succesivă a unui număr finit de contractări a două rădăcini* **consecutive,**

2°. *Rădăcinile acestui polinom să fie toate cuprinse într-un interval de lungime $< \varepsilon$.*

Bineînţeles că dacă toate rădăcinile lui P sînt confundate, nu avem nimic de demonstrat. Aici ne interesează însă cazul contrar şi anume în special cazul cînd P are toate rădăcinile sale distincte. În enunţ s-a subliniat că este vorba numai de contractări aplicate la perechi de rădăcini *consecutive*. Dacă deci (14) sînt rădăcinile polinomului, numai la perechi de forma x_i, x_{i+1}.

Vom demonstra lema prin inducţie completă.

Pentru $n=2$ proprietatea este adevărată, căci dacă $x_1 < x_2$ sînt rădăcinile polinomului P, este suficient să aplicăm acestor rădăcini o contractare de coeficient ρ care verifică inegalităţile $\max\left(0, \frac{x_2 - x_1 - \varepsilon}{2}\right) < \rho < \frac{x_2 - x_1}{2}$.

Să presupunem acum că $n > 2$ şi că proprietatea este adevărată pentru polinoamele de gradul $n-1$. Să demonstrăm că ea este adevărată şi pentru polinoamele de gradul n.

Vom arăta întîi că dacă P este un polinom de gradul n cu rădăcinile (14) $(x_1 < x_n)$, prin aplicarea succesivă a unui număr finit de contractări de rădăcini consecutive putem deduce un polinom ale cărui rădăcini să fie toate cuprinse într-un interval de lungime $< \frac{x_n - x_1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$. Pentru aceasta observăm că, prin ipoteză, aplicînd un număr finit de contractări de rădăcini consecutive, putem deduce din P un polinom P_1 cu rădăcinile $x_1' < x_2' < \dots < x_n'$ astfel ca $x_1' = x_1$, $x_n - x_2' < \frac{\varepsilon}{4}$. Contractările sînt aplicate numai perechilor de rădăcini x_i, x_{i+1}, unde $i > 1$. Aplicăm apoi polinomului P_1 o contractare a rădăcinilor x_1', x_2' de coeficient ρ, unde $\max\left(0, \frac{x_2' - x_1'}{2} - \frac{\varepsilon}{8}\right) < \rho < \frac{x_2' - x_1'}{2}$. Rădăcinile polinomului astfel obținut sînt atunci cuprinse într-un interval de lungime $< x_n' - (x_1' + \rho) < x_n' - x_1' - \frac{x_2' - x_1'}{2} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{x_n' - x_1'}{2} + \frac{x_n' - x_2'}{2} + \frac{\varepsilon}{8} < \frac{x_n - x_1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$, adică tocmai ceea ce trebuia arătat.

Rezultă de aici că dacă un polinom de gradul n are toate rădăcinile sale cuprinse într-un interval de lungime $< l$, prin aplicarea unui număr finit de contractări a două rădăcini consecutive se poate deduce un polinom ale cărui rădăcini să fie curinse într-un interval de lungime $< \frac{l}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$. Repetînd acest procedeu se vede că pentru orice număr natural k se poate deduce, prin aplicarea unui număr finit de contractări de două rădăcini consecutive, un polinom de gradul n ale cărui rădăcini sînt toate cuprinse într-un interval de lungime mai mică decît

$$\frac{l}{2^k} + \varepsilon\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) < \frac{l}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Este destul să alegem numărul k astfel ca $\frac{l}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$ și lema este demonstrată.

Observare. O observație analoagă cu aceea făcută la nr. **13**, se poate face și aici. Relația $P \overset{\mathrm{m}}{\to} P^*$ este adevărată și dacă P^* se deduce din P prin o contractare a două rădăcini $x' < x''$, *fără restricția păstrării ordinei rădăcinilor* ci numai cu condiția ca coeficientul ρ să fie $< x'' - x'$. Demonstrația se face în mod analog, înlocuind pe $x' + \rho$ sau $x'' - \rho$ cu o rădăcină pe care o traversează, și în particular schimbînd între ele aceste rădăcini cînd ele se traversează, în timp ce ρ crește. Și aici se poate zice că o contractare a rădăcinilor $x' < x''$ *nu deranjează în mod larg* ordinea rădăcinilor dacă intervalele $(x', x' + \rho)$, $(x'' - \rho, x'')$ nu conțin nici o rădăcină a polinomului trasformat și cînd $0 < \rho < x'' - x'$. Atunci proprietatea precedentă rezultă din faptul că orice contractare de două rădăcini, supusă numai la restricția $0 < \rho < x'' - x'$, se poate obține prin aplicarea succesivă a unui număr finit de contractări care nu deranjează în mod larg ordinea rădăcinilor.

Se vede de asemenea că relația $P \overset{\mathrm{m}}{\to} P^*$ este adevărată cînd P^* se deduce din P prin aplicarea succesivă a unui număr oarecare (finit sau nu) de contractări cu păstrarea ordinei rădăcinilor sau numai cu restricția impusă sus coeficientului de contractare.

15. Din lema precedentă deducem :

LEMA 3. *Dacă P, Q sînt două polinoame de gradul $n > 2$ și dacă $P \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q$, putem găsi un polinom R de gradul n, care se deduce din P prin aplicarea succesivă a unui număr finit de contractări de două rădăcini consecutive, astfel ca să avem $R \overset{\mathrm{m}}{\to} Q$, fără ca relația $R \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q$ să fie verificată.*

Fie (1') rădăcinile lui P, Q și $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ rădăcinile lui R. Avem $P \overset{\mathrm{m}}{\to} R$ și, pe baza condiției la care este supus R, avem inegalitățile

$$z_1 + z_2 + \dots + z_i \leq y_1 + y_2 + \dots + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{17}$$

în cel puțin una din aceste relații egalitatea fiind adevărată. Bineînțeles este verificată și egalitatea

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Pentru a demonstra lema, să luăm un număr pozitiv ε astfel ca

$$\varepsilon < y_n - y_1. \tag{18}$$

Putem găsi, pe baza lemei 2, un șir finit de polinoame de gradul n,

$$P_0, P_1, \dots, P_k$$

astfel încît :

1°. Fiecare termen P_i se deduce din termenul precedent P_{i-1} printr-o contractare a două rădăcini consecutive.

2°. Primul termen P_0 este egal cu P iar ultimul P_k are toate rădăcinile sale cuprinse într-un interval de lungime $< \varepsilon$.

Prin ipoteză $P_0 \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q$. Există deci un cel mai mare indice r astfel ca $P_r \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q$. Nu putem avea $r = k$, căci atunci inegalitatea (18) ar fi în contradicție cu inegalitățile (16'). Avem deci $r < k$. Prin urmare $r + 1 \leq k$ și polinomul P_{r+1} *nu* verifică relația $P_{r+1} \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q$.

Fie ρ_1 coeficientul contractării prin care P_{r+1} se deduce din P_r. Fie P^* un polinom care se deduce din P_r aplicînd *aceleiași* perechi de rădăcini (consecutive) o contractare de coeficient $\rho \leq \rho_1$. Cînd $\rho \to 0$ rădăcinile lui P^* tind către rădăcinile corespunzătoare ale lui P_r, iar cînd $\rho \to \rho_1$ ele tind către rădăcinile corespunzătoare ale lui P_{r+1}. Pe baza continuității în raport cu ρ a rădăcinilor, există un număr pozitiv $\rho \leq \rho_1$ astfel ca să avem $P^* \overset{\mathrm{m}}{\to} Q$ dar ca relația $P^* \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q$ să nu fie verificată. Luînd polinomul R egal cu polinomul P^* corespunzător acestui ρ, lema 3 este demonstrată.

16. Avem și

LEMA 4. *Dacă P, Q sînt două polinoame de gradul $n > 1$ și dacă $P \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q$, putem găsi un șir finit de polinoame de gradul n,*

$$P_0, P_1, \dots, P_k \tag{19}$$

astfel că :

1°. *Fiecare termen P_i se deduce din termenul precedent P_{i-1} printr-o contractare a două rădăcini consecutive.*

2°. *Primul termen P_0 este egal cu P, iar ultimul termen P_k este egal cu Q.*

Demonstrația o facem prin inducție completă.

Pentru $n = 2$ este destul să luăm $k = 1$, deci $P_0 = P$, $P_1 = Q$ și lema este demonstrată.

Fie $n > 2$ și să presupunem că proprietatea este adevărată pentru polinoamele de gradul $2, 3, \ldots, n-1$. Să demonstrăm că ea va fi adevărată și pentru polinoamele de gradul n.

Să considerăm deci două polinoame P, Q de gradul n și să presupunem că $P \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q$. Pe baza lemei 3, putem construi un șir finit

$$P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_r,\ R \tag{20}$$

de polinoame de gradul n în care P_0 este egal cu P iar termenii verifică condiția 1° din lema 4. În plus ultimul termen R, determinat de lema 3, verifică relația $R \overset{\mathrm{m}}{\rightarrow} Q$ dar nu verifică relația $R \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q$. Vom continua să notăm cu $z_1 < z_2 < \ldots < z_n$ rădăcinile lui R.

Dacă R este egal cu Q, șirul (20) verifică toate condițiile impuse șirului (19) și lema 4 este demonstrată.

În cazul contrar, deci dacă R nu este egal cu Q, numai j (unde $1 \leqq j < < n-1$) dintre relațiile (17) se reduc la egalități. Fie $i_1, i_2, \ldots, i_j$ valorile lui i pentru care în (17) avem egalitate, pentru celelalte valori ale lui i fiind valabilă inegalitatea strictă. Putem presupune $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \ldots \ldots < i_j < i_{j+1} = n$. Să considerăm acum perechile de indici consecutivi i_s, i_{s+1}. Aceste perechi sînt de două categorii :

1°. Dacă $i_{s+1} - i_s = 1$, atunci ele sînt de prima categorie și avem $z_{i_{s+1}} = y_{i_{s+1}}$.

2°. Dacă $i_{s+1} - i_s > 1$, perechile sînt de a doua categorie. În acest caz avem

$$z_{i_{s+1}} + z_{i_{s+2}} + \cdots + z_{i_{s+\nu}} < y_{i_{s+1}} + y_{i+2} + \cdots + y_{i_{s+\nu}}$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, i_{s+1} - i_s - 1,$$
$$z_{i_{s+1}} + z_{i_{s+2}} + \cdots + z_{i_{s+1}} = y_{i_{s+1}} + y_{i_{s+2}} + \cdots + y_{i_{s+1}}.$$

Avem însă $i_{s+1} - i_s < n$ iar, în baza ipotezei făcute, lema 4 este adevărată pentru polinoamele de gradul $< n$. Rezultă că putem aplica succesiv lui R un număr finit de contractări de două rădăcini consecutive z_i, z_{i+1}, în care $i_s+1 \leqq i \leqq i_{s+1}-1$, astfel încît rădăcinile $z_{i_{s+1}}, z_{i_{s+2}}, \ldots, z_{i_{s+1}}$ să devină respectiv egale cu $y_{i_{s+1}}, y_{i_{s+2}}, \ldots, y_{i_{s+1}}$, lăsînd celelalte rădăcini nemodificate. Rezultă dar că putem prelungi șirul (20) astfel,

$$P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_r,\ R,\ R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_{r'}$$

unde termenii verifică aceleași condiții ca și șirul (20), numai că ultimul termen $R_{r'}$ are *cu o unitate mai puține* perechi de indici consecutivi de categoria a doua.

Deoarece există, evident, numai un număr finit de perechi de indici consecutivi i_s, i_{s+1} de categoria a doua, se vede imediat că, repetînd eventual cel mult de un număr finit de ori procedeul de mai sus, ajungem să construim șirul (19), prin o prelungire convenabilă a șirului (20) și care verifică toate condițiile lemei 4.

Cu aceasta lema 4 este demonstrată.

17. În fine avem următoarea

LEMA 5. *Dacă P este un polinom de gradul $n > 1$ cu toate rădăcinile sale simple și dacă polinomul Q se deduce din P prin o contractare a două rădăcini consecutive, avem $P' \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q'$.*

Înainte de a demonstra această lemă, vom arăta că din ea rezultă teorema 6. Într-adevăr, fie P, Q două polinoame de gradul $n > 1$ și să presupunem că $P \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q$. Aplicăm lema 4 formînd șirul (19) care verifică proprietățile 1°, 2°. Avem atunci, pe baza lemei 5, $P'_{i-1} \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} P'_i$ $i = 1, \ldots, k$, de unde, pe baza transitivității relației $\overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow}$, deducem $P'_0 \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} P'_k$, deci $P' \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} Q'$, adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 6 este deci demonstrată.

18. A rămas să demonstrăm lema 5. Din cele ce preced rezultă că este suficient să facem demonstrația pentru $n > 2$. Se vede ușor că lema 5 este atunci echivalentă cu următoarea :

LEMA 6. *Dacă $a < b$, $0 < \rho < \frac{b-a}{2}$ și dacă $f = (x-a)(x-b)h$, $g = (x-a-\rho)(x-b+\rho)h$, unde h este un polinom de gradul $n > 0$ cu toate rădăcinile reale, simple și situate în afară de intervalul închis $[a, b]$, avem $f' \overset{\mathrm{mm}}{\longrightarrow} g'$.*

Polinomul g se deduce din f aplicînd o contractare a rădăcinilor consecutive a și b.

Să notăm cu

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n, \quad y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1}$$

rădăcinile lui h și h' (dacă $n > 1$) și să notăm cu

$$z_1 < z_2 < \ldots < z_{n+1}, \quad z'_1 < z'_2 < \ldots < z'_{n+1}$$

rădăcinile polinoamelor f', g'. Fie indicele k determinat de faptul că

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < a < b < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n$$

dacă $1 < k < n+1$ şi să punem $k = 1$ dacă toate rădăcinile x_i sînt la dreapta lui b şi $k = n+1$ dacă toate rădăcinile x_i sînt la stînga lui a. Astfel numărul natural k este bine determinat şi ia valorile $1, 2, \ldots, n+1$.

Atunci z_k este rădăcina lui f' cuprinsă între a şi b iar z'_k rădăcina lui g' cuprinsă între $a+\rho$ şi $b-\rho$. Celelalte perechi de rădăcini z_i, z'_i sînt respectiv cuprinse în intervalele deschise :

$$\begin{aligned}
&(x_i, x_{i+1}), && \text{pentru } i = 1, 2, \ldots, k-2,\\
&\left(x_{k-1}, \frac{a+b}{2}\right), && \text{,,} \quad i = k-1,\\
&\left(\frac{a+b}{2}, x_k\right), && \text{,,} \quad i = k+1,\\
&(x_{i-2}, x_{i-1}), && \text{,,} \quad i = k+2, k+3, \ldots, n+1.
\end{aligned}$$

În acest tablou se suprimă primele două linii dacă $k = 1$, prima linie dacă $k = 2$, ultima linia dacă $k = n$ şi ultimele două linii dacă $k = n+1$. În fine se vede că pentru $n = 1$ şi $n = 2$ se păstrează una sau ambele dintre liniile a doua şi a treia.

Formulele

$$\begin{aligned}
f' &= (x-a)(x-b)\,h' + (2x-a-b)\,h\\
g' &= (x-a-\rho)(x-b+\rho)\,h' + (2x-a-b)\,h
\end{aligned} \tag{21}$$

ne arată, deoarece h, h' nu pot avea nici o rădăcină comună, că polinoamele f', g' nu pot avea decît pe $\frac{a+b}{2}$ ca rădăcină comună şi aceasta dacă şi numai dacă $h'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. Atunci $z_k = z'_k = \frac{a+b}{2}$. Dacă $i \neq k$ avem $z_i \neq z'_i$ şi nici una dintre rădăcinile z_i, z'_i, pentru o astfel de valoare a lui i, nu poate anula pe h'. De altfel din (21) rezultă formula

$$f' = g' - \rho\,(b-a-\rho)\,h'. \tag{22}$$

Ca să putem studia mai departe perechile z_i, z'_i pentru $i \neq k$, vom distinge două cazuri :

Cazul 1. Să presupunem că $k > 1$ şi să examinăm perechile de rădăcini z_i, z'_i pentru $i < k$. Din a doua formulă (21) deducem, pentru aceste valori ale lui i,

$$h(z'_i)\,h'(z'_i) > 0 \tag{23}$$

iar din prima formulă (21) şi din (22) deducem

$$\operatorname{sg} f'(x_i) = \operatorname{sg} h'(x_i), \quad \operatorname{sg} f'(z'_i) = -\operatorname{sg} h'(z'_i), \tag{24}$$

folosind funcţia $\operatorname{sg} x$ egală, prin definiţie, cu -1, 0 respectiv 1, după cum x este $<$, $=$, respectiv > 0.

Din (23) rezultă că z'_i este în vecinătatea dreaptă a punctului x_i, mai exact este în intervalul (x_i, y_i). Avem atunci

$$h'(x_i)\,h'(z'_i) > 0 \tag{25}$$

şi din (24) deducem

$$\operatorname{sg} f'(x_i)\,f'(z'_i) = -1, \tag{26}$$

care ne arată că f' are cel puţin o rădăcină cuprinsă în (x_i, z'_i). Nu putem însă avea decît o singură astfel de rădăcină şi aceasta este evident z_i. Rezultă prin urmare că avem

$$z_i < z'_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{27}$$

Dacă $k = n+1$, putem lua, în consideraţiile precedente, pentru y_n numărul impropriu ∞ şi rezultatele rămîn valabile.

Cazul 2. Să presupunem că $k < n+1$ şi să examinăm perechile de rădăcini z_i, z'_i pentru $i > k$. Procedînd ca mai sus vedem că, pentru aceste valori ale lui i, în loc de (23) avem

$$h(z'_i)\,h'(z'_i) < 0, \tag{23'}$$

care ne arată că z'_i este în vecinătatea stîngă a punctului x_{i-1}, mai exact în intervalul (y_{i-2}, x_{i-1}).

În loc de (24), (25) şi (26) avem respectiv

$$\operatorname{sg} f'(x_{i-1}) = \operatorname{sg} h'(x_{i-1}), \quad \operatorname{sg} f'(z'_i) = -\operatorname{sg} h'(z'_i), \tag{24'}$$

$$h'(x_{i-1})\,h'(z'_i) < 0, \tag{25'}$$

$$\operatorname{sg} f'(x_{i-1})\,f'(z'_i) = -1 \tag{26'}$$

şi se deduce, ca mai sus, că z_i este cuprins în intervalul (z'_i, x_{i-1}). Avem prin urmare

$$z'_i < z_i, \quad i = k+1, k+2, \ldots, n+1. \tag{27'}$$

Dacă $k = 1$, pentru y_0 putem lua numărul impropriu $-\infty$ şi rezultatele rămîn valabile.

Inegalităţile (27), (27') împreună cu egalitatea

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_{n+1} = z'_1 + z'_2 + \cdots + z'_{n+1}$$

demonstrează lema 6. Într-adevăr, pe baza acestei egalităţi, inegalităţile

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_i < z'_1 + z'_2 + \cdots + z'_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

sînt echivalente cu

$$\begin{gathered}
z_1 + z_2 \cdots + z_i < z'_1 + z'_2 + \cdots + z'_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,\\
z'_{i+1} + z'_{i+2} + \cdots + z'_{n+1} < z_{i+1} + z_{i+2} + \cdots + z_{n+1},\\
i = k, k+1, \ldots, n,
\end{gathered} \tag{28}$$

care sînt nişte consecinţe imediate ale inegalităţilor (27), (27').

Dacă $k = 1$ inegalitățile (27) și primele inegalități (28) se suprimă, iar dacă $k = n + 1$ inegalitățile (27') și ultimele inegalități (28) se suprimă, raționamentele rămînînd valabile și în aceste cazuri.

Cu aceasta teorema 6 este complet demonstrată.

Observare. Cazul 2 se poate deduce din cazul 1 pe baza faptului că dacă rădăcinile unui polinom sînt supuse la o transformare liniară, aceeași transformare liniară o suferă și rădăcinile derivatei. Tot pentru acest motiv este suficient să demonstrăm lema 6 numai pentru niște valori particulare oarecare ale lui a și b (de exemplu pentru $a = 0, b = 1$ sau $a = -1$, $b = 1$ etc.).

19. Din teoremele precedente se pot deduce niște consecințe referitoare la cazul cînd avem (12) sau (12'), dar și egalitatea (13) este înlocuită cu o inegalitate.

Relația $P \overset{\mathrm{mc}}{\rightarrow} Q$ înseamnă că rădăcinile (1) ale polinoamelor P, Q de gradul $n \geqq 1$ verifică inegalitățile

$$x_1 + x_2 + \dots + x_i \leqq y_1 + y_2 + \dots + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

iar relația $P \xrightarrow{\mathrm{mcmc}} Q$ că rădăcinile (1') ale polinoamelor P, Q de gradul $n \geqq 1$ verifică inegalitățile

$$x_1 + x_2 + \dots + x_i < y_1 + y_2 + \dots + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Relația $\overset{\mathrm{mc}}{\rightarrow}$ este (reflexivă și) transitivă iar relația $\xrightarrow{\mathrm{mcmc}}$ este de asemenea transitivă. Din $P \overset{\mathrm{c}}{\rightarrow} Q$ respectiv $P \overset{\mathrm{cc}}{\rightarrow} Q$ rezultă $P \overset{\mathrm{mc}}{\rightarrow} Q$ respectiv $P \xrightarrow{\mathrm{mcmc}} Q$, iar din $P \overset{\mathrm{m}}{\rightarrow} Q$ rezultă $P \overset{\mathrm{mc}}{\rightarrow} Q$ etc.

Avem atunci:

CONSECINȚA 4. *Dacă P, Q sînt două polinoame de gradul $n > 1$, din $P \overset{\mathrm{mc}}{\rightarrow} Q$ rezultă $P' \xrightarrow{\mathrm{mc}} Q'$.*

Într-adevăr, dacă R este un polinom de gradul n cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1 + y_2 + \dots + y_n - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$, avem $P \overset{\mathrm{c}}{\rightarrow} R$, $R \overset{\mathrm{m}}{\rightarrow} Q$. Avem deci și $P' \overset{\mathrm{c}}{\rightarrow} R'$, $R' \overset{\mathrm{m}}{\rightarrow} Q'$, prin urmare $P' \overset{\mathrm{mc}}{\rightarrow} R'$, $R' \overset{\mathrm{mc}}{\rightarrow} Q'$, de unde $P' \overset{\mathrm{mc}}{\rightarrow} Q'$, tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Avem și

CONSECINȚA 5. *Dacă P, Q sînt două polinoame de gradul $n > 1$, din $P \xrightarrow{\mathrm{mcmc}} Q$ rezultă $P' \xrightarrow{\mathrm{mcmc}} Q'$.*

Fie R polinomul de mai sus. Avem în acest caz $P' \overset{\mathrm{m}}{\rightarrow} R'$, fără ca egalitatea (13) corespunzătoare să fie verificată și $R' \overset{\mathrm{mm}}{\rightarrow} Q'$. Se vede ușor că de aici rezultă că $P' \xrightarrow{\mathrm{mcmc}} Q'$.

Consecința 4 se poate deduce din consecința 5. Să notăm cu (14) rădăcinile polinomului P de gradul n și fie P_ρ un polinom de gradul n cu rădăcinile $x_i - (n - i)\rho$, unde ρ este un număr pozitiv. P_ρ are toate rădăcinile sale simple și dacă $\rho \to 0$ rădăcinile lui P_ρ respectiv ale lui P'_ρ tind către rădăcinile lui P respectiv ale lui P'. Un calcul simplu ne arată, ca la nr. **13**, că dacă $P \overset{\mathrm{mc}}{\rightarrow} Q$, avem $P_{2\rho} \xrightarrow{\mathrm{mcmc}} Q_\rho$. Presupunînd deci consecința 5 demonstrată, deducem de aici că $P'_{2\rho} \xrightarrow{\mathrm{mcmc}} Q'_\rho$, de unde, făcînd $\rho \to 0$, rezultă $P' \overset{\mathrm{mc}}{\rightarrow} Q'$, adică tocmai consecința 4.

În fine consecința 5 se mai poate demonstra ținînd seamă de lema 1, de teorema 6 și făcînd să crească ultima rădăcină x_n a polinomului P. Lăsăm pe seama cititorului să facă această demonstrație.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ В. А. МАРКОВА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть (1) корни, предположенные все действительные, многочленов P, Q одной переменной, и n-ой степени. Пусть также (3) корни производных P', Q' этих многочленов.

Третья часть настоящего труда содержит доказательство следующего свойства:

Если имеем неравенства (12) и равенство (13) или неравенство $x_1+x_2+\dots+x_n \leqq y_1+y_2+\dots+y_n$ то корни многочленов P', Q' обладают тем же свойством, следовательно

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i \leqq \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

и

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1} = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1}$$

или

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1} \leqq \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1}$$

Сначала показываем, что достаточно предполагать, что P, Q имеют все корни различные и что тогда достаточно доказывать, что из (12') и из (13) или из $x_1+x_2+\dots+x_n<y_1+y_2+\dots+y_n$ вытекает, что то же самое свойство верно и для P', Q'.

Это свойство аналогично теореме В. А. Маркова [2], согласно которой если у двух многочленов n-ой степени со всеми корнями действительными корни различаются, то то же самое свойство верно и для производных этих многочленов.

В второй части труда делаем некоторые замечания относительно теоремы В. А. Маркова. В частности, даём для этой теоремы доказательства отличающееся от доказательства В. А. Маркова или П. Монтеля [3].

В доказательствах пользуемся непрерыностью и монотонностью корней производной относительно корней многочлена. В первой части делаем некоторые замечания относительно этой монотонности.

Во первой и второй частях, как и в третьей, трактуем сначала те случаи, когда рассматриваемые многочлены имеют все их корни различные, а разделение корней двух многочленов той же степени происходит в строгом смысле.

SUR UN THÉORÈME DE W. A. MARKOV

RÉSUMÉ

Désignons par (1) les racines, supposés toutes réelles, des polynomes P, Q d'une variable et de degré n. Désignons aussi par (3) les racines des dérivées P', Q' de ces polynomes.

La troisième partie de ce travail contient la démonstration de la propriété suivante :

Si nous avons les inégalités (12) *et l'égalité* (13), *ou l'inégalité* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, *les racines des polynomes* P', Q' *jouissent de la même propriété, donc que*

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i \leq \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_i,\ i = 1, 2, \ldots n-2,$$

et

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n-1} = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{n-1}$$

ou

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n-1} \leq \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{n-1}$$

Nous montrons d'abord qu'il suffit de supposer que P, Q ont leurs racines toutes distinctes et de démontrer qu'alors de (12′) et de (13) ou de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n < y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, il en résulte la même propriété pour les racines des dérivées P', Q'.

Cette propriété est analogue au théorème de W. A. Markov [2], d'après lequel si les racines de deux polynomes de degré n, ayant toutes les racines réelles, se séparent, il en est de même pour les racines des dérivées de ces polynomes.

Dans la seconde partie de ce travail nous faisons quelques considérations sur ce théorème de W. A. Markov et nous lui donnons, en particulier, une démonstration qui diffère un peu de celle donnée par W. A. Markov et P. Montel [3].

Dans les démonstrations nous faisons usage de la continuité et de la monotonie des racines de la derivée par rapport aux racines du polynome. Dans la première partie nous faisons quelques considérations sur cette monotonie.

Dans les parties I et II, comme dans la partie III, nous revenons d'abord au cas où les polynomes considérés ont leurs racines distinctes et la séparation des racines de deux polynomes du même degré est au sens strict.

BIBLIOGRAFIE

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, 1934.
2. W. A. Markov, *Über polynome die in einen gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen.* Mathematische Annalen, **77**, 213–258 (1916).
3. P. Montel, *Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés.* Mathematica, **5**, 110–129 (1931).

Primit la 10. IX. 1961.