ASUPRA UNEI PERECHI DE CONGRUENȚE

DE

TEODOR RUS

(Cluj)

Lucrare prezentată la ședința de comunicări din 14 iulie 1961 a Institutului de calcul al Academiei R.P.R. – Filiala Cluj.

Să considerăm o suprafață S raportată la liniile ei asimptotice pe care le presupunem reale. $\vec{M}$ fiind vectorul director al acestei suprafețe, iar $\vec{N}$ vectorul unitar al normalei la suprafață, avem următoarele relații de definiție a suprafeței S :

$$\begin{aligned} \vec{M}_u &= \vec{N} \times \vec{N}_u, \\ M_v &= -(\vec{N} \times \vec{N}_v), \end{aligned} \tag{1}$$

unde parametrii directori ai vectorului unitar al normalei $\vec{N}$ sînt soluții ale unei ecuații cu derivate parțiale de forma

$$\theta_{uv} = h\theta. \tag{a}$$

Se poate atunci determina o suprafață S' astfel ca dreapta (M, M'), unde M, M' sînt două puncte corespondente, să fie o congruență W, iar S și S' suprafețele ei focale, ele fiind definite de relația

$$\vec{M}' = \vec{M} + (\vec{N} \times \vec{N}'), \tag{2}$$

unde prin $\vec{M}'$ și $\vec{N}'$ am notat respectiv vectorul director și vectorul unitar al normalei la suprafața S', $\vec{N}'$ fiind dat de sistemul :

$$\begin{aligned} (R\,\vec{N}')_u &= R_u\vec{N} - R\vec{N}_u, \\ (R\,\vec{N}')_v &= R\vec{N}_v - R_v\vec{N}, \end{aligned} \tag{3}$$

R fiind o soluţie particulară a ecuaţiei (a). În felul acesta se poate determina o familie de suprafeţe $\{S_i'\}$ astfel ca (MM_i') să fie congruenţe W iar S şi S_i' suprafeţele lor focale. Aceste congruenţe formează un snop de congruenţe, toate dreptele (MM_i') avînd un punct comun pe suprafaţa S.

Teorema de permutabilitate al lui L. Bianchi ne asigură existenţa unei familii de suprafeţe $\{S_i\}$ determinată prin acelaşi procedeu, astfel ca (M_i, M') să fie la fel un snop de congruenţe W care au un punct comun pe suprafaţa S'. Oricare suprafaţă S_i' am considera, congruenţa (M_i, M') este bine determinată. Cele două familii de suprafeţe $\{S_i\}$ şi $\{S'_i\}$ sînt determinate de relaţiile

$$\vec{M}_i' = \vec{M} + (\vec{N} \times \vec{N}_i'),$$

$$\vec{M}_i = \vec{M}' + (\vec{N}' \times \vec{N}_i). \tag{4}$$

Să interpretăm proprietăţile acestor suprafeţe ţinînd cont de proprietatea planelor tangente în două puncte corespunzătoare de pe suprafeţele focale ale unei congruenţe W. Fie pentru aceasta congruenţa (M, M'). Planul tangent la suprafaţa S în punctul M trece prin punctul corespunzător M' de pe suprafaţa S'. Considerăm acum congruenţa (M, M'') $(S'' \in \{S_i'\})$. În mod analog acelaşi plan tangent la S în M va trece prin punctul M'' corespunzător lui M pe suprafaţa S''. Atunci planul tangent în M la suprafaţa S trece prin dreapta $d' = M'M''$. Operînd în sens invers, ajungem la concluzia că planele tangente la S' şi S'' în M' respectiv M'' trec prin punctul M, prin urmare se taie după o dreaptă d care are un punct comun cu suprafaţa S, punctul M. Cînd facem parametrii u şi v să varieze, dreptele d şi d' vor descrie două congruenţe pe care le notăm cu (d) şi (d'). Dacă parcurgem într-un sens sau altul cele două familii de suprafeţe $\{S_i\}$ şi $\{S_i'\}$, vom observa că congruenţele generate de dreptele d şi d' sînt în relaţie de dublu-stratificabilitate. În această lucrare se pune problema existenţei unei perechi (d) şi (d') care să verifice următoarea proprietate :

Între razele congruenţelor (d) şi (d') să fie o corespondenţă biunivocă astfel ca prin oricare dreaptă d' să treacă un plan al cărui punct caracteristic să fie situat pe dreapta d corespunzătoare lui d' şi care formează cu d un unghi α constant. Astfel de congruenţe, dacă există, le numim α-stratificabile.

Pentru a determina asemenea pereche de congruenţe, ne vom referi la figura descrisă mai sus, figură care ne generează cea mai generală configuraţie de congruenţe dublu-stratificabile. Ne vom limita la cazul cînd avem două congruenţe W care au suprafaţa S comună, (M, M') şi (M, M''). Dreptele d şi d' pe care le punem aici în evidenţă aşa cum am spus mai sus, vor genera o pereche de congruenţe (d) şi (d') cînd parametrii u şi v variază. Dacă notăm cu (M, M', M'') planul tangent în M la S, atunci vom avea o pereche care verifică relaţiile din definiţie, atunci cînd unghiul α al acestui plan cu dreapta d este constant. Să observăm însă că în M avem trei plane concurente, respectiv planele tangente la cele trei suprafeţe

considerate, în punctele corespondente. Unghiurile acestor plane le notăm cu $\beta = (\vec{N}, \vec{N}')$, $\gamma = (\vec{N}, \vec{N}'')$ şi $\delta = (\vec{N}', \vec{N}'')$, unde $\vec{N}$, $\vec{N}'$ şi $\vec{N}''$ sînt vectorii unitari ai normalelor la cele trei suprafeţe în punctele corespondente. Dacă β, γ, δ sînt constante, atunci unghiul α este constant. Se vede imediat că această condiţie este şi suficientă pentru ca α să fie constant.

Să vedem acum cum trebuie să alegem pe S, S', S'' astfel ca unghiurile de mai sus β, γ, δ să fie constante. Pentru aceasta este suficient să aplicăm o teoremă care ne dă legătura între curburile totale în două puncte corespondente de pe suprafeţele focale ale unei congruenţe W şi unghiul planelor tangente în aceste puncte pe cele două suprafeţe. Dacă K, K' şi K'' sînt curburile totale ale suprafeţelor considerate mai sus, avem :

$$KK' = \frac{\sin^4 \beta}{d_1^4}$$
$$KK'' = \frac{\sin^4 \gamma}{d_2^4} \tag{5}$$

unde d_1 şi d_2 sînt respectiv distanţele MM' şi MM''. Dar S, S', S'' sînt suprafeţele de curbură totală negativă căci liniile lor asimptotice, prin ipoteză, trebuie să fie reale. Atunci prin anumite transformări putem reduce curburile lor totale la -1 şi prin urmare formulele (5) se scriu

$$1 = \frac{\sin^4 \beta}{d_1^4}$$
$$1 = \frac{\sin^4 \gamma}{d_2^4}. \tag{5'}$$

De aici rezultă că dacă d_1 şi d_2 sînt constante, atunci β şi γ sînt constante. Astfel am dat peste suprafeţele transformate Bäcklund care se definesc în felul următor :

Suprafaţa S va fi determinată de relaţiile

$$\vec{M}_u = \vec{N} \times \vec{N}_u,$$
$$\vec{M}_v = \vec{N}_v \times \vec{N},$$

unde $\vec{N}^2 = 1$ iar $\vec{N}(a, b, c)$, respectiv a, b, c sînt soluţii particulare ale sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\left.\begin{aligned} \theta_{uu} &= 2\,\omega_u\,\theta_u \operatorname{ctg}\omega + 2\,\frac{\omega_u}{\sin 2\omega}\,\theta_v - \theta, \\ \theta_{uv} &= \cos 2\omega \cdot \theta, \\ \theta_{vv} &= \frac{2\omega_v}{\sin 2\omega}\,\theta_u + 2\,\omega_v\,\theta_v \operatorname{ctg} 2\omega - \theta \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

condiţia de integrabilitate a acestui sistem fiind

$$\omega_{uv} = \sin\omega \cdot \cos\omega. \tag{7}$$

Sistemul (6) se obţine din condiţia impusă suprafeţelor S şi S' de a avea curburi totale negative. Să observăm că pentru fiecare soluţie ω a ecuaţiei (7), sistemul (6) ne determină o suprafaţă S. Punînd condiţia ca să avem două suprafeţe de aceeaşi natură S şi S' astfel ca în plus ele să fie suprafeţele focale ale unei congurenţe W, suprafaţa S' se obţine din S după formula obişnuită $\vec{M}' = \vec{M} + (\vec{N} \times \vec{N}')$ unde $\vec{N}'(a', b', c')$ se determină din sistemul

$$\begin{aligned} \vec{N}_u + \vec{N}'_u &= \frac{R_u}{R}(\vec{N} - \vec{N}'), \\ \vec{N}_v - \vec{N}'_v &= \frac{R_v}{R}(\vec{N} + \vec{N}'), \end{aligned} \tag{8}$$

$\vec{N}'$ fiind vectorul unitar al normalei la suprafaţa S' iar R o soluţie a ecuaţiei

$$R_{uv} = R \cos 2\,\omega. \tag{9}$$

În aceste condiţii R se determină din sistemul

$$\begin{aligned} \frac{R_u}{R}(1 - \cos \beta) &= \sin \beta \cos(\omega - \omega'), \\ \frac{R_v}{R}(1 + \cos \beta) &= \sin \beta \cos(\omega + \omega'), \end{aligned} \tag{10}$$

unde dacă ω este o soluţie a ecuaţiei $\omega_{uv} = \cos \omega \cdot \sin \omega$, o altă soluţie se obţine din sistemul

$$\begin{aligned} (\omega - \omega')_v &= \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} \sin(\omega + \omega'), \\ (\omega + \omega')_u &= \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} \sin(\omega - \omega'). \end{aligned} \tag{11}$$

Să considerăm acum două soluţii ale sistemului (10), R şi R', alese cu aceleaşi condiţii. Sistemul (8) pentru soluţia R' se scrie sub forma

$$\begin{aligned} \vec{N}_u + \vec{N}''_u &= \frac{R'_u}{R'}(\vec{N} - \vec{N}''), \\ \vec{N}_v - \vec{N}''_v &= \frac{R'_v}{R}(\vec{N} + \vec{N}''). \end{aligned} \tag{8'}$$

În acest fel vom determina pe $\vec{N}''$ şi prin urmare pe S'' astfel ca $\gamma = (\vec{N}, \vec{N}'')$ să fie constant.

Pentru a avea $\alpha =$ constant trebuie să mai punem condiţia ca $(\vec{N}', \vec{N}'') = \delta =$ constant. Deci R şi R' trebuie astfel alese ca $\vec{N}'$ şi $\vec{N}''$ să formeze un unghi constant. Pentru a găsi condiţiile pe care trebuie să le satisfacă R şi R', vom porni de la ipoteza că $\delta =$ constant şi prin urmare $(\vec{N}', \vec{N}'')_u = 0$, $(\vec{N}', \vec{N}'')_v = 0$.

Sistemul (10) scris pentru R' va primi forma

$$\begin{aligned} \frac{R'_u}{R'}(1 - \cos \gamma) &= \sin \gamma \cos(\omega - \omega''), \\ \frac{R'_v}{R'}(1 + \cos \gamma) &= \sin \gamma \cos(\omega + \omega''), \end{aligned} \tag{10'}$$

ω fiind soluţie a ecuaţiei $\omega_{uv} = \sin \omega \cos \omega$, ω'' este dat de sistemul (11′) dacă ω este dat:

$$\begin{aligned} (\omega - \omega'')_v &= \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma} \sin(\omega + \omega''), \\ (\omega + \omega'')_u &= \frac{1 + \cos \gamma}{\sin \gamma} \sin(\omega - \omega''). \end{aligned} \tag{11'}$$

Condiţia ca δ să fie constant se obţine înmulţind scalar cu $\vec{N}''$ sistemul (8); astfel vom avea:

$$\begin{aligned} \vec{N}''.\vec{N}_u + \vec{N}''.\vec{N}'_u &= \frac{R_u}{R}(\vec{N}.\vec{N}'' - \vec{N}'.\vec{N}''), \\ \vec{N}''.\vec{N}_v - \vec{N}''.\vec{N}'_v &= \frac{R_v}{R}(\vec{N}.\vec{N}'' + \vec{N}'.\vec{N}''). \end{aligned} \tag{12}$$

Înmulţim apoi scalar cu $\vec{N}'$ şi sistemul (8′) şi obţinem:

$$\begin{aligned} \vec{N}'.\vec{N}_u + \vec{N}'.\vec{N}'' &= \frac{R'_u}{R}(\vec{N}.\vec{N}' - \vec{N}'.\vec{N}''), \\ \vec{N}'.\vec{N}_v - \vec{N}'.\vec{N}'' &= \frac{R'_v}{R'}(\vec{N}.\vec{N}' + \vec{N}'.\vec{N}''). \end{aligned} \tag{12'}$$

Adunînd primele egalităţi ale sistemului (12) şi (12′) şi apoi ultimele, obţinem:

$$\begin{aligned} \vec{N}_u.(\vec{N}' + \vec{N}'') + (\vec{N}'.\vec{N}'')_u &= \frac{R_u}{R}(\vec{N}.\vec{N}'' - \vec{N}'.\vec{N}'') + \frac{R'_u}{R}(\vec{N}.\vec{N}' - \vec{N}'.\vec{N}''), \\ \vec{N}_v.(\vec{N}' + \vec{N}'') - (\vec{N}'.\vec{N}'')_v &= \frac{R_v}{R}(\vec{N}.\vec{N}'' + \vec{N}'.\vec{N}'') + \frac{R'_v}{R'}(\vec{N}.\vec{N}' + \vec{N}'.\vec{N}''). \end{aligned} \tag{13}$$

Ţinînd cont de $(\vec{N}'.\vec{N}'')_u = 0$, $(\vec{N}'.\vec{N}'')_v = 0$, precum şi de $(\vec{N}', \vec{N}'') = \cos \delta$, $(\vec{N}, \vec{N}'') = \cos \gamma$, şi $(\vec{N}, \vec{N}') = \cos \beta$, şi de faptul că toate sînt constante, vom avea:

$$\begin{aligned} \vec{N}_u.(\vec{N}' + \vec{N}'') &= \frac{R_u}{R}(\cos \gamma - \cos \delta) + \frac{R'_u}{R'}(\cos \beta - \cos \delta), \\ \vec{N}_v.(\vec{N}' + \vec{N}'') &= \frac{R_v}{R}(\cos \gamma + \cos \delta) + \frac{R'_v}{R'}(\cos \beta + \cos \delta). \end{aligned} \tag{13'}$$

Însă

$$\vec N_u.(\vec N' + \vec N'') + \vec N.(\vec N' + \vec N'')_u = 0,$$
$$\vec N_v.(\vec N' + \vec N'') + \vec N.(\vec N' + \vec N'')_v = 0. \qquad (14)$$

Din (8) şi (8') deducem că

$$\vec N'_u = \frac{R_u}{R}(\vec N - \vec N') - \vec N_u, \quad \vec N''_u = \frac{R'_u}{R'}(\vec N - \vec N'') - \vec N_u,$$
$$\vec N'_v = \frac{R_v}{R}(\vec N + \vec N') + \vec N_v, \quad \vec N''_v = -\frac{R'_v}{R}(\vec N + \vec N'') + \vec N_v. \qquad (15)$$

Din (14), ţinînd cont de (15), avem:

$$\vec N_u.(\vec N' + \vec N'') = -\vec N\left[\frac{R_u}{R}(\vec N - \vec N') + \frac{R'_u}{R'}(\vec N - \vec N'') - 2\vec N_u\right],$$
$$\vec N_v.(\vec N' + \vec N'') = -\vec N\left[2\vec N_v - \frac{R'}{R}(\vec N + \vec N') - \frac{R'_u}{R'}(\vec N - \vec N'')\right],$$

sau

$$\vec N_u.(\vec N' + \vec N'') = \frac{R_u}{R}(\cos\beta - 1) + \frac{R'_u}{R'}(\cos\gamma - 1),$$
$$\vec N_v.(\vec N + \vec N'') = \frac{R_v}{R}(\cos\beta + 1) + \frac{R'_v}{R'}(\cos\gamma + 1).$$

Cu acestea sistemul (15) se scrie:

$$\frac{R_u}{R}(\cos\beta - 1) + \frac{R'_u}{R'}(\cos\gamma - 1) = \frac{R_u}{R}(\cos\gamma - \cos\delta) + \frac{R'_u}{R'}(\cos\beta - \cos\delta),$$
$$\frac{R_v}{R}(\cos\beta + 1) + \frac{R'_v}{R'}(\cos\gamma + 1) = \frac{R_v}{R}(\cos\gamma + \cos\delta) + \frac{R'_u}{R'}(\cos\beta + \cos\gamma),$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$\frac{R_u}{R}(\cos\beta - \cos\gamma + \cos\delta - 1) + \frac{R'_u}{R'}(-\cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta - 1) = 0$$
$$\frac{R_v}{R}(\cos\beta - \cos\gamma - \cos\delta + 1) + \frac{R'_v}{R'}(-\cos\beta + \cos\gamma - \cos\delta + 1) = 0.$$

Dacă notăm cu

$$a = \cos\beta - \cos\gamma + \cos\delta - 1,$$
$$b = -\cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta - 1,$$

atunci ultimul sistem devine

$$a\frac{R_u}{R} + b\frac{R'_u}{R'} = 0$$
$$b\frac{R_v}{R} + a\frac{R'_v}{R'} = 0 \qquad (16)$$

unde a şi b sînt constante din cauza ipotezei făcute asupra unghiurilor β, γ, δ.

Două soluţii ale sistemelor (10) şi (10') care satisfac ecuaţiile (16), ne vor da suprafeţele S, S' şi S'' astfel ca unghiurile normalelor lor să fie constante şi prin urmare dreptele d şi d' vor genera perechea de congruenţe α-stratificabilă.

Să vedem acum ce relaţii trebuie să existe între funcţiile ω, ω' şi ω'' pentru ca sistemele (10) şi (10') să ne dea soluţiile R şi R' legate prin relaţiile (16). Pentru aceasta să observăm că din (16) avem:

$$\frac{R_u}{R} = -\frac{b}{a}\frac{R'_u}{R'}; \quad \frac{R_v}{R} = -\frac{a}{b}\frac{R'_v}{R'}.$$

Înlocuind în sistemul (10), vom obţine:

$$-\frac{b}{a}\frac{R'_u}{R'}(1 - \cos\beta) = \sin\beta\cos(\omega - \omega'),$$
$$-\frac{a}{b}\frac{R'_v}{R'}(1 + \cos\beta) = \sin\beta\cos(\omega + \omega'),$$

sau

$$\frac{R'_u}{R'} = \frac{\sin\gamma}{1 - \cos\gamma}\cos(\omega - \omega''),$$
$$\frac{R'_v}{R'} = \frac{\sin\gamma}{1 + \cos\gamma}\cos(\omega + \omega'').$$

Scriind egalitatea celor două expresii, vom obţine următoarea condiţie de compatibilitate, condiţie care ne arată cum trebuie să alegem funcţiile ω, ω' şi ω'' pentru ca R şi R' să satisfacă relaţiile (16):

$$\frac{\sin\gamma}{1 - \cos\gamma}\cos(\omega - \omega'') = -\frac{a}{b}\frac{\sin\beta}{1 - \cos\beta}\cos(\omega - \omega'),$$
$$\frac{\sin\gamma}{1 + \cos\gamma}\cos(\omega + \omega') = -\frac{b}{a}\frac{\sin\beta}{1 + \cos\beta}\cos(\omega + \omega').$$

Această condiţie se reduce la

$$\cos(\omega - \omega'')\cos(\omega + \omega'') = \cos(\omega - \omega')\cos(\omega + \omega'), \qquad (17)$$

sau

$$\mathrm{ctg}^2\,\omega = \frac{\sin^2\omega' - \sin^2\omega''}{\cos^2\omega' - \cos^2\omega''}. \qquad (17')$$

Dacă în sistemul (16) punem anumite condiții asupra coeficienților a și b, vom obține diferite cazuri particulare de suprafețe S, S' și S'' și prin urmare diferite cazuri particulare de congruențe α-stratificabile.

a) O primă particularizare este ca $a = -b$. Atunci evident $\cos\ \delta = 1$, de unde alegem valoarea $\delta = 0$ pentru δ. Se vede în acest caz că cele trei plane tangente coincid. Suprafețele S, S', S'' sînt obținute prin translație. Făcînd apel la formulele de definiție, avem:

$$\vec{M}' = \vec{M} + (\vec{N} \times \vec{N}'),$$

$$\vec{M}'' = \vec{M} + (\vec{N} \times \vec{N}'').$$

De aici rezultă că vom avea $|\vec{N}.\vec{N}'| = \text{const.}$ și $|\vec{N}.\vec{N}''| = \text{const.}$ Atunci $\vec{N}'$ se va obține din:

$$\vec{N}' \times \vec{N}_u = (\vec{N} \times \vec{N}_u) + c_1 \frac{R_u}{R},$$

$$\vec{N}' \times \vec{N}_v = -(\vec{N} \times \vec{N}_v) + c_1 \frac{R_v}{R},$$

fără nici o cuadratură. În mod analog $\vec{N}''$ se obține din:

$$\vec{N}'' \times \vec{N}_u = (\vec{N} \times \vec{N}_u) + c_2 \frac{R'_u}{R'},$$

$$\vec{N}'' \times \vec{N}_v = -(\vec{N} \times \vec{N}_v) + c_2 \frac{R'_v}{R'}.$$

Din sistemul (16) se vede că $R' = CR$, unde $C = C(v)$ și la fel din a doua ecuație a sistemului (16) $R' = C_1R$, unde $C_1 = C_1(u)$. Deoarece $C(v) = C_1(u)$, rezultă că $C = C_1 = \text{const.}$ Astfel avem $R' = CR$. Acest caz ne dă congruențele (d) și (d'), cu raze coplanare. În acest caz se poate observa că (d) și (d') sînt congruențe W, suprafețele focale a lui (d') fiind S' și S'', iar suprafețele focale a lui (d) fiind două suprafețe din familia (S_i). În acest caz congruențele (d) și (d') fac parte din familia congruențelor W definite înainte, care în plus au razele corespunzătoare coplanare.

b) Să considerăm cazul $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Avem de-a face cu acest caz cînd $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, iar planele tangente la S' și S'' nu coincid. Se vede că $a = b$, iar sistemul (16) ne dă soluția $R' = \frac{1}{R}$. Dreapta d descrie o congruență de normale. Condiția (17) în acest caz se scrie

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\cos\omega'' - \cos\omega'}{\sin\omega' - \sin\omega''}, \text{ iar } \omega'' = \omega' + \pi.$$

Cum (d) este o congruență de normale, este normal să ne întrebăm cînd este și (d') o congruență de normale. Obținem pentru aceasta condiția

$$(\vec{a}'_v, \vec{N}', \vec{N}'_u) = (\vec{a}'_u, \vec{N}', \vec{N}'_v), \tag{18}$$

unde $\vec{a}$ este vectorul director al congruenței (d'). Dacă (18) este satisfăcută, atunci perechea (d), (d') are proprietatea că este α-stratificabilă, razele ei omoloage fiind în plane perpendiculare, ele fiind în același timp congruențe W și prin urmare congruențele normale W.

Ținînd însă cont de faptul că $\vec{a}' = \vec{M}' + \lambda\vec{M}''$, condiția (18) ne va da

$$\vec{M}''_u \cdot \vec{M}'_u = \vec{M}''_v \cdot \vec{M}'_v. \tag{18'}$$

Folosind formulele de definiție a suprafețelor S' și S'' și ținînd cont de faptul că $\vec{N} \parallel \vec{N}'_u$ și $\vec{N}_u \parallel \vec{N}'$, vom obține următoarea condiție:

$$E = G. \tag{18''}$$

O condiție ca să putem determina suprafețele S' și S'' astfel ca congruențele (d) și (d') să fie cu raze perpendiculare și în același timp ele să fie normale W și α-stratificabile, este ca coeficienții E și G ai primei forme fundamentale a suprafeței S de la care pornim, să fie egali.

О ПАРЕ КОНГРУЕНЦИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде ставится вопрос существования пар стратификационных конгруенций, гомологичные радиусы которых образуют угол α постоянный. Доказывается, что такие конгруенции существуют и даётся метод их определения. Даётся также условие чтобы четыре заданных поверхности были фокусными поверхностями пары таких конгруенций.

Потом исследуются частные случай, когда угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = 0$.

SUR UNE PAIRE DE CONGRUENCES

RÉSUMÉ

On pose le problème de l'existence des paires de congruences stratifiables dont les rayons homologues forment un angle α constant. On démontre que de telles congruences existent et on donne une méthode permettant de les déterminer. On donne aussi une condition pour que quatre surfaces données soient les surfaces focales d'une paire de telles congruences.

On étudie ensuite les cas particuliers lorsque l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. Finikov S. P., *Sur les congruences stratificables.* C.R. — Paris, **105**, 379—381 (1927).
2. — *Sur les congruences stratificables.* Rend. Palermo, **53**, 313—384 (1929).
3. Kahane A., *Elemente din teoria congruențelor de drepte.* Edit. Tehnică, București, 1956.
4. Vincensini P., *Sur les congruences stratificables.* Journal de Mathématiques pure et appliquée, **9**, *8*, 419—499 (1934).

Primit la 23. VI. 1961.