ASUPRA DIVIZIUNII BARICENTRICE A SIMPLEXELOR EUCLIDIENE n-DIMENSIONALE

DE

TEODOR A. RUS

(Cluj)

Lucrare prezentată la şedinţa de comunicări din 14 iulie 1961 a Institutului de calcul al Academiei R.P.R.—Filiala Cluj.

Fie simplexul euclidian n-dimensional A_n, format din $n+1$ vîrfuri $A_n = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. Putem forma următorul şir de simplexe:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_{n-1} \subset A_n. \tag{1}$$

Fiecare termen al şirului (1) e o faţă proprie a celui următor. Să notăm cu $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ baricentrele simplexelor şirului (1). Facem să corespundă fiecărui simplex din şirul (1) baricentrul său. În felul acesta obţinem un nou simplex $A'_n = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ n-dimensional, numit simplexul derivat sau simplexul subdivizat al simplexului A_n de dimensiunea n. De observat că în şirul (1) avem $n+1$ termeni în care A_0 coincide cu baricentrul său, fiind un vîrf al simplexului A_n. Dacă luăm pe rînd ca prim termen A_0, toate vîrfurile simplexului A_n, vom obţine în felul arătat mai sus un anumit număr de simplexe n-dimensionale derivate. Ele sînt disjuncte sau au o faţă comună, ceea ce se demonstrează destul de simplu [1]. Se poate de asemenea arăta simplu că aceste simplexe formează un complex K_1. Prima condiţie se vede uşor, deoarece dacă un simplex oarecare $A'_n \in K_1$, atunci din definiţia lui rezultă că oricare faţă a sa face parte din K_1. A doua condiţie rezultă din proprietăţile simplexelor definite mai sus de a fi disjuncte sau de a avea o faţă comună. Trebuie să subliniem că toate simplexele au vîrful a_n comun, el fiind baricentrul simplexului dat. Celelalte vîrfuri vor fi unul şi numai unul, un vîrf al simplexului A_n, restul baricentre ale feţelor simplexului A_n, după cum se vede din studiul şirului (1).

TEOREMA 1. *Numărul simplexelor diviziunii baricentrice n-dimensionale obţinute din simplexul A_n este $(n+1)!$*

Teorema se arată simplu prin inducție completă. Se verifică imediat pentru $n = 0, 1, 2, 3$. Să o presupunem adevărată pentru $n - 1$ și să o arătăm pentru n. Simplexul A_n se obține adăugînd unei fețe ale sale de dimensiune $n - 1$ un vîrf $A_n = (\alpha_n, A_{n-1})$. În felul acesta obținem $n + 1$ fețe ale simplexului pentru care teorema este adevărată. Deci pe fiecare față avem $n!$ simplexe de dimensiune $n - 1$ ale diviziunii baricentrice a feței respective. Pentru a obține diviziunea baricentrică a simplexului A_n trebuie să adăugăm fiecărui simplex al diviziunii fețelor, baricentrul a_n al simplexului A_n. Cum avem $n!\,(n+1)$ simplexe $(n - 1)$-dimensionale, prin adăugarea vîrfului a_n tuturor acestor simplexe, obținem $n!\,(n + 1) = (n + 1)!$ simplexe ale diviziunii baricentrice n-dimensionale ale simplexului A_n.

De altfel teorema rezultă și din definiția simplexelor A_n' avînd de-a face cu permutări de $n + 1$ obiecte în șirul (1).

Să demonstrăm acum următoarea proprietate:

Fiecărui vîrf α_i al simplexului A_n îi aparțin $n!$ simplexe definite mai sus ale complexului K_1. Această proprietate se verifică imediat în cazurile particulare $n = 0, 1, 2, 3$. De aceea o vom demonstra prin inducție completă. Presupunem proprietatea adevărată pentru $n - 1$ și s-o arătăm pentru n. Atunci pe toate fețele proprietatea fiind adevărată, rezultă că pe fiecare față unui vîrf α_i al simplexului, îi aparțin $(n - 1)!$ simplexe ale diviziunii feței respective de dimensiune $n - 1$. Dar trecînd la simplexul A_n, fiecărui vîrf α_i îi aparțin n fețe. Simplexele diviziunii simplexului A_n de dimensiune n se obțin din simplexele diviziunii fețelor adăugînd baricentrul a_n fiecăruia dintre ele. Cum avem n fețe și $(n - 1)!$ simplexe pe fiecare față care aparțin lui α_i, va rezulta că în total vom avea $n(n - 1)! = n!$ simplexe n-dimensionale aparținînd vîrfului α_i al simplexului A_n.

Proprietatea se deduce și din faptul că din motive de simetrie trebuie să avem un număr egal de simplexe ale complexului K_1 repartizate fiecărui vîrf α_i. Cum avem $(n + 1)!$ simplexe n-dimensionale și $n + 1$ vîrfuri, va rezulta că fiecăruia îi aparțin $(n + 1)!/n + 1 = n!$ simplexe n-dimensionale ale complexului K_1.

TEOREMA 2. *O diviziune baricentrică a unui simplex euclidian n-dimensional determină un complex K_1 care are toate simplexele n-dimensionale grupate în $n + 1$ stele corespunzătoare fiecărui vîrf al simplexului, cîte $n!$. Dacă notăm cu S_{α_i} steaua corespunzătoare unui vîrf, atunci avem următoarele proprietăți:*

$$\bigcap_{i=0}^{n} |S_{\alpha_i}| = a_n, \tag{2}$$

$$\bigcup_{i=0}^{n} |S_{\alpha_i}| = |K_1| = |A_n|. \tag{3}$$

Să considerăm simplexele n-dimensionale ale diviziunii, închise. Deoarece avem $(n + 1)!$ simplexe n-dimensionale în complexul K_1, ele au pe a_n ca vîrf comun așa cum au fost definite.

Să arătăm că nu pot avea un alt punct comun. Pentru aceasta, să observăm că fiecare simplex n-dimensional al complexului K_1 e format dintr-un vîrf al simplexului dat, celelalte vîrfuri fiind baricentre. Dacă $\bigcap_{i=0}^{n} |S_{\alpha_i}| = M$, unde $M \neq a_n$, înseamnă că toate stelele respective ar putea să aibă în comun cel puțin încă un punct în afară de a_n. Fie el a_n'. Cum însă simplexele fac parte dintr-un complex, înseamnă că vor avea comună fața (a_n, a_n''), unde a_n'' este un baricentru. Dar a_n baricentru al simplexului A este unic. Înseamnă că a_n'' trebuie să fie baricentrul unei fețe $(n-1)$-dimensionale. Atunci fața (a_n, a_n'') poate fi comună numai simplexelor ce au ca vîrfuri baricentrele feței care are pe a_n'' baricentru, celelalte simplexe n-dimensionale din K_1 neputîndu-o avea în comun, întrucît această față este determinată de a_n, de baricentrele celorlalte fețe și de un vîrf al simplexului A_n. De aici rezultă că $M = a_n$ și $\bigcap_{i=0}^{n} |S_{\alpha_i}| = a_n$. Pentru a arăta proprietatea (3), vom arăta că au loc incluziunile:

$$\bigcup_{i=0}^{n} |S_{\alpha_i}| \subseteq |K_1| \subseteq |A_n|; \tag{3'}$$

$$\bigcup_{i=0}^{n} |S_{\alpha_i}| \supseteq |K_1| \supseteq |A_n|, \tag{3''}$$

de unde va rezulta egalitatea. Incluziunile (3′) se arată simplu din faptul că simplexele de dimensiune n ale diviziunii baricentrice sînt conținute toate în K_1 și A_n și sînt distincte două cîte două, avînd cel mult o față comună. Rezultă relațiile (3′).

Incluziunile (3″) le vom arăta procedînd prin inducție completă. Ele se verifică ușor pentru $n = 0, 1, 2, 3$. Să presupunem proprietatea adevărată pentru $n - 1$ și să o arătăm pentru n. Să considerăm în acest scop un punct oarecare x din interiorul simplexului A_n. El face parte dintr-un simplex n-dimensional al diviziunii baricentrice a lui A_n sau se află situat pe o față a sa. Cum noi considerăm simplexele închise, rezultă că x va aparține cel puțin unui simplex n-dimensional al diviziunii. Dar toate simplexele n-dimensionale au pe a_n ca vîrf comun, rezultă că

$$x = \lambda a_n + \mu b_n; \quad \lambda + \mu = 1,$$

unde b_n este situat pe o față proprie a simplexului A_n. Dar pe această față, proprietatea este adevărată; a_n este baricentrul simplexului A_n, deci este conținut în simplexele diviziunii prin definiție. De aici rezultă că $x \in S_{\alpha_i}$, ceea ce ne arată că au loc incluziunile (3″).

Din (3′) și (3″) rezultă relațiile (3).

TEOREMA 3. *Baricentrele simplexelor n-dimensionale ale complexului K_1 sînt situate pe un hiperelipsoid n-dimensional.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme să considerăm simplexul A_n regulat, adică avînd toate fețele de aceeași dimensiune, egale. Să observăm și aici că simplexele n-dimensionale ale complexului K_1 au toate vîrful a_n comun și sînt egale din cauza ipotezei. Dacă spre exemplu două n-ar fi egale, s-ar contrazice ipoteza simplexului regulat. Deoarece ele au vîrful a_n comun, rezultă că numerele $\rho(a_n, b_j)$, $j = 1, 2, \ldots, (n+1)\,!$, unde prin b_j am notat baricentrele simplexelor n-dimensionale ale complexului K_1, sînt egale între ele :

$$\rho(a_n, b_j) = c, \quad j = 1, 2, \ldots, (n+1)!$$

Această proprietate ne spune că punctele b_j se găsesc pe o hipersferă n-dimensională de centru a_n. Să arătăm acum că ele nu se pot găsi pe o hipersferă $(n-1)$-dimensională. Pentru aceasta vom proceda prin inducție completă, proprietatea arătîndu-se simplu în cazul $n = 0, 1, 2, 3$. Să o presupunem adevărată pentru $n-1$ și să o arătăm pentru n. Cele $(n+1)\,!$ simplexe n-dimensionale ale complexului K_1 le putem grupa în $n+1$ subcomplexe ale complexului K_1, fiecare subcomplex fiind determinat de baricentrele și vîrfurile a cîte unei fețe proprii a simplexului dat precum și de punctul a_n (care va fi comun tuturor subcomplexelor). Dacă notăm cu $K^i_{a_n}$ subcomplexul complexului K_1 care are simplexele obținute din simplexele $(n-1)$-dimensionale ale feței i, precum și din vîrful a_n, atunci avem :

$$\bigcup_{i=0}^{n} |K^i_{a_n}| = |K_1|.$$

Știm însă că din cauza simetriei are loc relația

$$\rho(a_n, b^i_j) = c.$$

De asemenea

$$\rho(a_n, a'_{j_i}) = c_1, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,!,$$

unde am notat prin a'_{j_i} baricentrele simplexelor $(n-1)$-dimensionale ale diviziunii feței i. Deoarece teorema este adevărată pentru cazul $(n-1)$-dimensional, rezultă că a'_{j_i} se găsesc pe o hipersferă $(n-1)$-dimensională și nu se pot găsi pe una $(n-2)$-dimensională. Știm însă că

$$\frac{\rho(a_n, b^i_j)}{\rho(a_n, a'_{j_i})} = \frac{2}{3}; \quad i = 0, 1, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n\,!$$

Teorema lui Thales generalizată în spațiul cu n-dimensiuni, mai precis reciproca ei, ne spune că b^i_j se găsesc pe o hipersferă $(n-1)$-dimensională omotetică cu hipersfera $(n-1)$-dimensională a baricentrelor a'_{j_i}, aceasta din urmă fiind proiecția conică din vîrful a_n a punctelor b^i_j, i fiind fix. Raportul de omotetie este $2/3$. Să arătăm acum că cel puțin un punct b^i_j (cînd $i = 0, 1, \ldots, n$) nu se află pe aceeași hipersferă. Pentru aceasta,

este suficient să observăm că atunci cînd $i = 0,1, \ldots, n$, obținem pe rînd subcomplexele $K^0_{a_n}, K^1_{a_n}, \ldots, K^n_{a_n}$.

Din proprietatea (2) a teoremei 2 se poate vedea simplu că $\bigcap_{i=0}^{n} |K^i_{a_n}| = a_n$ atunci există cel puțin un subcomplex $K^j_{a_n}$ care are împreună cu subcomplexul $K^i_{a_n}$ doar pe a_n comun :

$$|K^j_{a_n}| \cap |K^i_{a_n}| = a_n.$$

De aici tragem concluzia că baricentrele simplexelor n-dimensionale ale complexului $K^j_{a_n}$ nu se vor găsi în subcomplexul $K^i_{a_n}$. Cum ele sînt situate pe hipersfera $(n-1)$-dimensională, a feței j, fețele i și j fiind liniar independente, rezultă că vom avea cel puțin un punct nesituat pe hipersfera baricentrelor subcomplexului $K^i_{a_n}$, ceea ce demonstrează afirmația. Pentru a arăta unicitatea hipersferei n-dimensionale, să observăm că avem nevoie de $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + 2n$ puncte pentru a defini o hipersferă n-dimensională. Cum însă avem $(n+1)\,!$ puncte în total, rezultă imediat unicitatea hipersferei.

Pentru a trece la cazul general al simplexului A_n oarecare, vom trece de la simplexul A_n regulat, la cel oarecare, printr-o afinitate. Hipersfera noastră se transformă într-un hiperelipsoid pe care-l numim hiperlipsoidul baricentrelor simplexelor n-dimensionale ale complexului K_1 sau hiperelipsoidul L^n_1. Astfel teorema 3 este complet demonstrată.

Vom introduce acum o nouă corespondență între simplexul A_n și baricentrele fețelor sale, obținînd un nou șir de simplexe ale unei diviziuni baricentrice pe care o notăm cu (1').

Fie

$$A_n = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

simplexul n-dimensional dat. Să considerăm vîrfurile $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a'_n)$ unde am notat prin a'_n baricentrul feței (α_{n-1}, α_n), $a'_n = \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n-1})$. În felul acesta am obținut un nou simplex B_n astfel ca $B_n \subset A_n$. Dacă permutăm pe rînd toate vîrfurile astfel ca să luăm $a'_i = \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i-1})$, $i = 0, 1, \ldots, n$, obținem permutări de $n+1$ obiecte. Evident că astfel se formează $(n+1)\,!$ simplexe noi. Notăm pri M mulțimea acestor simplexe. Să arătăm că ele au dimensiunea n. Pentru aceasta va fi suficient să arătăm că vîrfurile $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a'_n)$ sînt liniar independente. Prin ipoteză $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sînt liniar independente întrucît sînt vîrfurile unei fețe proprii a simplexului A_n. Vîrful a'_n nu se găsește în hiperplanul lor, deoarece el este baricentrul feței (α_{n-1}, α_n), iar α_n nu se găsește în hiperplanul simplexului $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ prin ipoteză. Rezultă că $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\, a'_n)$ sînt liniar independente, ele fiind vîrfurile unui simplex n-dimensional B_n

Proprietatea $B_n \subset A_n$ este imediată. Să mai observăm că fiecărui vîrf al simplexului A_n îi corespunde un număr de n ! simplexe definite mai sus, care se obțin pe rînd permutînd vîrfurile feței opuse vîrfului considerat în definiția simplexului. Toate acestea n ! simplexe au vîrful respectiv ca vîrf comun. Vom nota mulțimea acestor simplexe cu M_{α_i}, unde α_i este vîrful considerat. Se vede că $|M_{\alpha_i}| = |A_n|$. Mulțimea tuturor simplexelor n-dimensionale de mai sus o notăm cu M.

TEOREMA 4. *Baricentrele simplexelor n-dimensionale ale mulțimii M definite mai sus, formează un sistem de* $(n+1)$! *puncte situate pe un hiperelipsoid n-dimensional de centru* a_n, *baricentrul simplexului dat, omotetic cu hiperelipsoidul complexului* K_1, *centrul de omotetie fiind în* a_n.

Ca și în cazul teoremei 3, vom presupune că A_n este un simplex regulat. Dacă notăm cu c_j^i baricentrele simplexelor mulțimii M_{α_i} au loc relațiile :

$$c_j^i = \frac{1}{n+1}(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + a_i' + \alpha_{i-1} + \dots + \alpha_n),\quad a_i' = \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i-1}),$$

$$i = 0, 1, \dots n, \qquad j = 1, 2, \dots, n\,!$$

Să calculăm distanța $\rho(a_n, c_j^i)$. Obținem :

$$\rho(a_n, c_j^i) = \frac{1}{n+1}(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n) - \frac{1}{n+1}(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + a_i' + \\ + \alpha_i + \dots + \alpha_n).$$

Desfăcînd parantezele vom avea

$$\rho(a_n, c_j^i) = \frac{1}{n+1}\alpha_i - \frac{1}{2(n+1)}(\alpha_i + \alpha_{i-1}),$$

sau

$$\rho(a_n, c_j^i) = \frac{1}{2(n+1)}(\alpha_i - \alpha_{i-1}).$$

Deoarece $(\alpha_i - \alpha_{i-1})$ este lungimea unei fețe liniare, din ipoteza regularității simplexului rezultă că

$$\rho(a_n, c_j^i) = k, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n\,! \tag{4}$$

De aici se observă că cele $(n+1)$! puncte sînt situate pe o hipersferă n-dimensională de centru a_n. Revenind la demonstrarea teoremei 3, s-a văzut că

$$\rho(a_n, b_j^i) = c. \tag{5}$$

Din (4) și (5) rezultă :

$$\frac{\rho(a_n, b_j^i)}{\rho(a_n, c_j^i)} = \frac{c}{k} = k_2,$$

ceea ce demonstrează a doua parte a teoremei în cazul cînd simplexul A_n este regulat. În cazul A_2, $k_2 = \sqrt{\frac{3}{7}}$. Să arătăm acum că punctele c_j^i nu se pot găsi pe o hipersferă $(n-1)$-dimensională. Pentru aceasta vom proceda prin inducție, proprietatea verificîndu-se ușor pentru $n = 0, 1, 2, 3$. Să o presupunem adevărată pentru numărul $n - 1$ și să o arătăm pentru n. Pentru aceasta să observăm că :

$$\rho(\alpha_i, c_j^i) = k\,; \quad \rho(\alpha_i, a'_{j_i}) = k' \quad i = 0, 1, \dots n\,; \quad j = 1, 2, \dots n\,!,$$

unde am notat prin a'_{j_i} baricentrele simplexelor $(n-1)$-dimensionale ale mulțimii M^i definită pentru fața opusă vîrfului α_i. Pe această față proprietatea e adevărată, deci cele n ! puncte sînt efectiv pe o hipersferă $(n-1)$-dimensională, neputînd fi pe una $(n-2)$-dimensională. Din faptul că avem $\frac{k}{k'} = \frac{2}{3}$, rezultă că pentru i fixat, c_j^i se găsesc pe o hipersferă $(n-1)$-dimensională omotetică cu hipersfera $(n-1)$-dimensională a feței i, raportul de omotetie fiind $2/3$, iar centrul de omotetie fiind vîrful α_i. De altfel hipersfera $(n-1)$-dimensională a feței i poate fi considerată ca proiecție conică din vîrful α_i a hipersferei baricentrelor c_j^i. E suficient acum să arătăm că există cel puțin un baricentru al simplexelor mulțimilor M_{α_i}, $i = 0, 1, \dots, n$, care nu e situat pe hipersfera baricentrelor c_j^i, $j = 1, 2, \dots, n!$. Fie M_{α_i} și M_{α_k} două astfel de mulțimi ;

$$\rho(\alpha_i, c_j^i) = \frac{2}{3}\rho(\alpha_i, a'_{j_i})\,; \quad \rho(\alpha_k, c_j^k) = \frac{2}{3}\rho(\alpha_k, a'_{j_k}).$$

Din ipoteza simplexului regulat rezultă că :

$$\rho(\alpha_i, c_j^i) = \rho(\alpha_k, c_j^k).$$

Dar c_j^k se găsesc pe o hipersferă $(n-1)$-dimensională omotetică cu hipersfera baricentrelor feței k, centrul de omotetie fiind punctul α_k, ele neputînd fi pe o hipersferă $(n-2)$-dimensională. Dacă nu ar exista un punct dintre punctele c_j^i unde i este fixat iar $j = 1, 2, \dots, n\,!$, care să nu fie situat pe hipersfera baricentrelor c_j^k, unde k este fixat și $k \neq i$, iar $j = 1, 2, \dots, n\,!$, ar rezulta că cele două hipersfere coincid. Aceasta ne duce la o contradicție cu faptul că fața i și fața k sînt liniar independente. În felul acesta găsim cel puțin un punct din mulțimea c_j^i, $j = 1, 2, \dots, n\,!$, care nu este situat pe hipersfera mulțimii c_j^k, ceea ce arată că nu există o hipersferă $(n-1)$-dimensională pe care să fie situate toate cele $(n+1)$! puncte. Pentru stabilirea unicității hipersferei n-dimensionale definite mai sus, se procedează ca în teorema 3.

Transformînd acum printr-o afinitate, simplexul regulat în cel oarecare, obținem teorema în general. Hipersfera se transformă într-un hiperelipsoid pe care-l numim hiperelipsoidul baricentrelor simplexelor mulțimii M sau hiperelipsoidul L_n^1.

О БАРИЦЕНТРИЧЕСКОМ РАЗДЕЛЕНИИ ЕВКЛИДОВЫХ n-РАЗМЕРНЫХ СИМПЛЕКСОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде исследуются некоторые свойства барицентрического разделения евклидовых n-размерных симплексов. Таким образом доказываются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Число — размерных симплексов барицентрического разделения полученных из заданного симплекса A_n есть $(n+1)!$*

ТЕОРЕМА 2. *Барицентрическое разделение n-размерного евклидового симплекса определяет комплекс K_1 имеющий все n-размерные симплексы группированные в $n+1$ звездах, соответствующих каждой вершине заданного симплекса по n!. Если S_{α_i} есть соответствующая звезда вершины, то верны следующие свойства:*

$$\bigcap_{i=0}^{n} |S_{\alpha_i}| = a_n,$$

$$\bigcup_{i=0}^{n} |S_{\alpha_i}| = |K_1| = |A_n|.$$

ТЕОРЕМА 3. *Барицентры n-размерных симплексов барицентрического разделения заданного симплекса A_n расположены на n-размерном гиперэллипсоиде.*

Определяется потом множество M всех n-размерных эвклидовых симплексов, полученных из n вершин заданного симплекса, и барицентры плоскостей, прилегающих к $(n+1)$-ой вершине и доказывается следующая теорема:

ТЕОРЕМА 4. *Барицентры n-размерных симплексов множества M образуют систему $(n+1)!$ точек, расположенных на n-размерном гиперэллипсоиде, с центром a_n, барицентр заданного симплекса гомотетичен с гиперэллипсоидом комплекса K_1, а центр гомотетии находится в a_n.*

SUR LA DIVISION DES BARYCENTRES DES SIMPLEXES EUCLIDIENS n-DIMENSIONNELS

RÉSUMÉ

Nous étudions quelques propriétés de la division barycentrique des simplexes euclidiens n-dimensionnels. Ainsi nous démontrons les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. *Le nombre des simplexes de la divison barycentrique n-dimensionnelle obtenue dun simplexe donné A_n est $(n+1)!$*

THÉORÈME 2. *Une division barycentrique d'un simplexe euclidien n-dimensionnel détermine un complexe K_1 qui a tous les simplexes n-dimensionnels groupés dans $n+1$ étoiles correspondantes à chaque sommet du simplexe donné, à raison de n ! Si S_{α_i} est l'étoile correspondante au sommet, les propriétés suivantes sont vraies*

$$\bigcap_{i=0}^{n} |S_{\alpha_i}| = a_n ; \qquad \bigcup_{i=0}^{n} |S_{\alpha_i}| = |K_1| = |A_n|.$$

THÉORÈME 3. *Les barycentres des simplexes n-dimensionnels de la division barycentrique du simplexe donné A_n sont situés sur un barycentre ellipsoide n-dimensionnel.*

Nous définissons ensuite un ensemble M de tous les simplexes euclidiens n-dimensionnels obtenus de n sommets du simplexe donné et les barycentres des faces adjacentes au $n+1^{ème}$ sommet, et nous démontrons le

THÉORÈME 4. *Les barycentres des simplexes n-dimensionnels de l'ensemble M forment un système de $(n+1)!$ points situés sur un hyperellipsoide n-dimensionnel, ayant pour centre a_n la barycentre du simplexe donné, homothétique avec l'hyperellipsoide du complexe K_1, le centre d'homothétie étant en a_n.*

BIBLIOGRAFIE

1. Александров П. С., *Комбинаторная топология*, Москва—Лонинград, 1947.
2. Fiedler M. *Geometrie du simplex dans E_n, I – III*, Casopis pro pest. mat., **79**, 27 bis – 320 (1954) ; **80**, 462 – 476 (1955) ; **81**, 182 – 222 (1956).
3. — *Über qualitative Winkeleigenschaften der Simplexe*. Czech. mat. journal, 7 (82), 463–478 (1957).
4. Pontreaghin L. S. *Introducere în topologia conbinatorie*. Moscova—Leningrad, 1947 (traducere din l. rusă).
5. Rus T. *Asupra distribuției centrelor de greutate a triunghiurilor determinate de medianele unui triunghi*, G.M.F., Seria A, nr. 6 (1960).