ASUPRA POLINOAMELOR ABSTRACTE DEFINITE PE GRUPURI CICLICE DE ORDIN FINIT ŞI CU VALORILE ÎN GRUPURI CICLICE DE ORDIN FINIT

DE

CORNEL TARŢIA

Comunicare prezentată în şedinţa din 24 septembrie 1956 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

Fie G şi G' două grupuri abeliene. Operaţia de compunere a elementelor grupului o vom nota atît în cazul grupului G, cît şi în cazul grupului G', prin simbolul $+$ al adunării. Dacă $a \in G$ sau $a \in G'$, elementul opus lui a o să-l notăm cu $-a$. În cele ce urmează, pentru simplificarea scrierii, vom nota

$$\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{\text{de } n \text{ ori}} = n \times a.$$

Evident avem

$$n \times (-a) = -(n \times a)$$

şi vom lua prin definiţie

$$(-n) \times a = n \times (-a).$$

Tot prin definiţie

$$0 \times a = \theta$$

unde θ este elementul nul al grupului căruia îi aparţine a.

Fie acum o funcţie abstractă $f(x)$ definită pe G şi cu valorile în G'. Vom numi diferenţă de ordinul n cu pas ω, a funcţiei $f(x)$ în punctul x, elementul $\Delta^n_\omega f(x)$ al grupului G' definit prin formulele

$$\Delta_\omega f(x) = f(x+\omega) - f(x)\ ;\quad \Delta^n_\omega f(x) = \Delta_\omega \left[\Delta^{n-1}_\omega f(x)\right]\ ;\quad \Delta^1_\omega f(x) = \Delta_\omega f(x)$$
$$(n=2,\ 3,\ldots)$$

Prin inducţie completă se arată că

$$\Delta^n_\omega f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \times f(x+\overline{n-i}\times\omega) \tag{1}$$

Definiţie. O funcţie $f(x)$ definită pe G şi cu valorile în G' vom zice că este un polinom de grad $\leqq n$ dacă $\Delta^{n+1}_\omega f(x) = \theta$, oricare ar fi x şi $\omega \in G$.

Dacă funcţia $f(x)$ este un polinom de grad $\leqq n$ şi $\Delta_\omega^n f(x) \not\equiv \theta$ vom zice că n este gradul efectiv al polinomului.

Definiţia aci dată polinoamelor abstracte este bine cunoscută şi polinoamele abstracte definite astfel sînt mult studiate în cazul în care grupul de definiţie şi cel al valorilor funcţiei nu au elemente de ordin finit. În caz contrar se pare că problema a prezentat mai puţin interes. Dacă ordinul grupului G, respectiv G' este k, respectiv l, numărul tuturor funcţiilor definite pe G şi cu valorile în G' este evident l^k. Primele probleme ce se pun în cazul grupurilor G şi G' de ordin finit sînt acelea referitoare la existenţa unor polinoame printre cele l^k funcţii, mai precis referitoare la numărul şi gradul efectiv al polinoamelor ce există. În prezenta notă vom da răspuns la aceste probleme, pentru cazurile particulare în care grupurile G şi G' sînt ciclice, unul dintre ele avînd ordinul doi.

I. Fie G grupul de ordinul doi şi G' grupul ciclic de ordinul l. Vom nota cu a_0 şi a_1 elementele grupului G $(a_0=\theta)$ şi cu $b_0, b_1, \ldots b_{e-1}$ elementele grupului G' $(b_0=\theta,\ b_i=i\times b_1)$.

TEOREMĂ: *Dacă l este impar, printre cele l^2 funcţii definite pe G şi cu valorile în G' nu avem nici un polinom diferit de funcţiile constante.*

În adevăr, să presupunem că ar exista un polinom $f(x)$ de grad $\leqq n$, diferit de funcţiile constante, adică pentru care $f(a_0) \neq f(a_1)$. După definiţia polinomului de grad $\leqq n$ avem

$$\Delta_\omega^{n+1} f(x) = b_0 \tag{2}$$

oricare ar fi $x \in G$ şi $\omega \in G$ $(n \geqslant 1)$. Să luăm $x = a_0$ şi $\omega = a_1$. După (1), ţinînd seama de

$$f(a_0+\overline{n+1-i}\times a_1) = f(\overline{n+1-i}\times a_1) = \begin{cases} f(a_0) & \text{dacă } n+1 \equiv i \pmod 2 \\ f(a_1) & \text{dacă } n+1 \not\equiv i \pmod 2 \end{cases}$$

avem

$$\Delta_\omega^{n+1} f(a_0) = (-1)^n 2^n \times [f(a_1) - f(a_0)] \tag{3}$$

Cum însă funcţia $f(x)$ nu este constantă

$$f(a_1) - f(a_0) = b_m \quad \textit{unde} \quad 1 \leqq m \leqq l-1 \qquad (4$$

şi din (2), (3) şi (4) rezultă

$$2^n m \equiv 0 \pmod l$$

ceea ce este în contradicţie cu ipoteza teoremei (l impar). Contradicţia obţinută demonstrează teorema.

Cum funcţiile constante sînt evident polinoame de grad zero, putem spune că dacă l este impar singurele polinoame existente sînt cele de grad zero. Numărul lor este evident l.

TEOREMĂ: *Dacă $l = 2^\alpha p$ unde p este un număr impar, atunci printre cele $l^2 = 2^{2\alpha} p^2$ funcţii definite pe G şi cu valorile în G' există polinoame de toate gradele efective $\leq \alpha$, numărul polinoamelor de grad efectiv n $(1 \leqq n \leqq \alpha)$ fiind $N_n = 2^{\alpha+n-1} p$.*

Demonstraţia acestei teoreme o vom face construind polinoamele de grad efectiv n şi efectuînd numărarea lor.

Pentru ca funcţia $f(x)$ să fie un polinom de grad efectiv n, trebuie în primul rînd să avem

$$\Delta_\omega^{n+1} f(x) = (-1)^n 2^n \times [f(x+\omega) - f(x)] = b_0$$

oricare ar fi $x \in G$ şi $\omega \in G$. Pentru $\omega = a_0$ această condiţie este îndeplinită, oricare ar fi $x \in G$. Pentru ca să aibă loc şi pentru $\omega = a_1$, trebuie ca pentru orice x să avem

$$f(x+a_1) - f(x) = b_m \tag{5}$$

unde m este un întreg cuprins între 0 şi $2^\alpha p - 1$ $(0 \leqq m \leqq 2^\alpha p - 1)$, îndeplinind condiţia $2^n \times b_m = b_0$, acest întreg putînd de altfel varia o dată cu x. Numărul m este prin urmare o anumită funcţie reală de x; $m = m(x)$, ce are domeniul valorilor în mulţimea numerelor întregi cuprinse între 0 şi $2^\alpha p - 1$. Domeniul exact de variaţie a valorilor lui $m(x)$ este stabilit de congruenţa

$$2^n m \equiv 0 \pmod{2^\alpha p}$$

şi constă din mulţimea numerelor

$$2^{\alpha-n} pM, \text{ unde } M = 0,1,2,\ldots, 2^n-1.$$

Făcînd în (5) $x = a_0$, obţinem

$$f(a_1) - f(a_0) = b_{2^{\alpha-n}pM}$$

M fiind unul oarecare dintre numerele $0,1,2,\ldots, 2^n-1$.
Făcînd $x = a_1$, obţinem aceleaşi relaţii dar într-o altă ordine faţă de variaţia lui M. De aici se poate trage concluzia că orice polinom de grad $\leqq n$, în punctul a_1 are valoarea

$$f(a_1) = f(a_0) + b_{2^{\alpha-n}pM}$$

M fiind unul oarecare din numerele $0,1,2,\ldots,2^n-1$. Cu acestea, polinoamele de grad $\leqq n$ sînt funcţiile de forma

$$f(x) = \begin{cases} b_c & \text{pt. } x = a_0 \\ b_{2^{\alpha-n}pM} + b_c & \text{pt. } x = a_1. \end{cases}$$

unde c este un număr întreg arbitrar cuprins între 0 şi $l-1$, iar M unul din numerele $0,1,2,\ldots,2^n-1$ pentru care numărul $2^{\alpha-n} pM$ este întreg.

Pentru ca funcţia $f(x)$ să fie un polinom de grad efectiv n, trebuie în al doilea rînd ca $\Delta_\omega^n f(x)$ să nu fie identic egală cu θ. Funcţiile pentru care această condiţie nu are loc sînt, evident, polinoamele de grad $\leqq n-1$. Ele sînt funcţiile de forma

$$f(x) = \begin{cases} b_c & \text{pt. } x = a_0 \\ b_{2^{\alpha-n+1}pM} + b_c & \text{pt. } x = a_1 \end{cases}$$

unde c este ca mai sus un număr arbitrar cuprins între 0 şi $l-1$, iar M unul dintre numerele $0, 1, 2,\ldots,2^{n-1}-1$, pentru care $2^{\alpha-n+1} pM$ este întreg. Aceste polinoame sînt însă şi de gradul n şi anume le regăsim printre polinoamele de grad $\leqq n$, dacă dăm lui M succesiv numai valorile pare dintre cele posibile. Cu aceasta, evident, polinoamele de grad efectiv n sînt funcțiile

$$f(x)=\begin{cases} b_c & \text{pt. } x=a_0 \\ b_{(2q-1)2^{\alpha-n}p}+b_c & \text{pt. } x=a_1 \end{cases}$$

unde c este un număr oarecare dintre numerele $0,1,2,\ldots,l-1$, iar q unul oarecare dintre numerele $1, 2,\ldots,2^{n-1}$. Pentru ca polinoamele de grad efectiv n să aibă o existență reală, este evident necesar ca $n\leqq\alpha$. Cu aceasta, prima parte a teoremei este demonstrată. Din felul cum se prezintă scrise aceste polinoame, rezultă imediat și numărul lor. În adevăr, numărul polinoamelor de grad efectiv n $(1\leqq n\leqq\alpha)$ este

$$N_n=l\,2^{n-1}=2\,p\,2^{n-1}=2^{\alpha+n-1}\,p$$

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Pe baza acestei teoreme se poate calcula imediat și numărul tuturor polinoamelor existente printre cele l^2 funcții definite pe G și cu valorile în G'. El este

$$\sum_{i=0}^{\alpha} N_i=2^{\alpha}p+\sum_{i=1}^{\alpha} N_i=2^{\alpha}p+\sum_{i=1}^{\alpha} 2^{\alpha+i-1}p=2^{2\alpha}p.$$

Numărul funcțiilor definite pe G și cu valorile în G', care nu sînt polinoame este evident

$$l^2-\sum_{i=0}^{\alpha} N_i=2^{2\alpha}p^2-2^{2\alpha}p=2^{2\alpha}p(p-1)$$

de unde putem trage concluzie că, dacă $p=1$, adică $l=2$, atunci toate cele 4 funcții sînt polinoame.

Înainte de a trece la examinarea cazului în care grupul G' este de ordinul doi, vom arăta că putem face o clasificare a polinoamelor existente printre cele l^2 funcții. În adevăr, dacă prin suma a două fu... definite pe G și cu valorile în G' înțelegem funcția ce are ca valori suma valorilor funcțiilor date pe puncte, atunci polinomul de grad efectiv n poate fi scris sub forma

$$f(x)=P_q^n(x)+b_c$$

unde

$$P_q^n(x)=\begin{cases} b_0 & \text{pt. } x=a_0 \\ b_{(2q-1)2^{\alpha-n}p} & \text{pt. } x=a_1. \end{cases}$$

De aici rezultă că polinoamele de grad efectiv n se grupează în 2^{n-1} clase de polinoame U_n^q $(q=1, 2,\ldots,2^{n-1})$, fiecare clasă avînd ca polinom reprezentativ pe P_n^q și fiecare clasă conținînd $2^{\alpha}p$ polinoame, nediferind între ele decît printr-o constantă aditivă. Cu aceasta, un polinom de grad efectiv n este perfect determinat dacă i se dă clasa și valoarea lui într-un punct. Este de menționat că rolul clasei în determinarea unui polinom este mai slab decît rolul pe care-l joacă valoarea polinomului într-un punct, căci pe cînd valorile funcției în două puncte depășesc posibilitatea de a defini un polinom, valoarea funcției într-un punct și clasa definesc polinomul în mod unic.

II. Fie acum G grupul ciclic de ordin k și G' grupul de ordinul doi. Vom nota cu $a_0, a_1,\ldots,a_{k-1}$ elementele lui $G(a_0=\theta,\ a_i=i\times a_1)$ și cu b_0, b_1 elementele grupului $G'(b_0=\theta)$.

TEOREMĂ: *Dacă $k=2^{\alpha}$, atunci toate cele $2^{2^{\alpha}}$ funcții definite pe G și cu valorile în G' sînt polinoame de grad efectiv cel mult $2^{\alpha}-1$, numărul polinoamelor de grad efectiv $2^{\alpha}-1$ fiind $2^{2^{\alpha}-1}$.*

In adevăr. fie $f(x)$ o funcție oarecare definită pe G și cu valorile în G'; avem

$$\Delta_{\omega}^{2^{\alpha}} f(x)=\sum_{i=0}^{2^{\alpha}}(-1)^i\binom{2^{\alpha}}{i}\times f(x+\overline{2^{\alpha}-i}\times\omega)=f(x+2^{\alpha}\times\omega)+f(x)$$

căci $\binom{2^{\alpha}}{i}$ sînt numere pare dacă $1\leqq i\leqq 2^{\alpha}-1$. Dar ordinul grupului G este 2^{α} așa că $2^{\alpha}\times\omega=a_0$, orecare ar fi ω. Prin urmare

$$\Delta_{\omega}^{2^{\alpha}} f(x)=f(x)+f(x)=2\times f(x)=b_0$$

și prima parte a teoremei este demonstrată.

Pentru a vedea care este numărul polinoamel.. de grad efectiv $2^{\alpha}-1$, vom calcula mai întîi numărul polinoamelor de grad $\leqq 2^{\alpha}-2$. Fie $f(x)$ un astfel de polinom.

Avem

$$\Delta_{\omega}^{2^{\alpha}-1} f(x)=\sum_{i=0}^{2^{\alpha}-1}(-1)^i\binom{2^{\alpha}-1}{i}\times f(x+\overline{2^{\alpha}-1-i}\times\omega)=\sum_{i=0}^{2^{\alpha}-1} f(x+\overline{2^{\alpha}-1-i}\times\omega)$$

căci $\binom{2^{\alpha}-1}{i}$ este impar, oricare ar fi i. Prin urmare, $f(x)$ fiind un polinom de grad $\leqq 2^{\alpha}-2$

$$\sum_{i=0}^{2^{\alpha}-1} f(x+\overline{2^{\alpha}-1-i}\times\omega)=b_0$$

oricare ar fi $x\in G$ și $\omega\in G$. Cum însă oricare ar fi $x\in G$. $(2^{\alpha}-1-i)\times\omega$ parcurge toate elementele lui G cînd i parcurge valorile $0, 1, 2,\ldots,2^{\alpha}-1$, rezultă că $f(x)$ ia valoarea b_1 într-un număr par de puncte. Această proprietate se vede de altfel că și caracterizează polinoamele de grad $\leqq 2^{\alpha}-2$. Numărul funcțiilor definite pe G și cu valorile în G', care iau valoarea b_1 într-un număr par de puncte, este după cum ușor se stabilește

$$1+\binom{2^{\alpha}}{2}+\binom{2^{\alpha}}{4}+\cdots+\binom{2^{\alpha}}{2^{\alpha}}=2^{2^{\alpha}-1}$$

În consecință, numărul polinoamelor de grad efectiv $2^{\alpha}-1$ este

$$N_{2^{\alpha}-1}=2^{2^{\alpha}}-2^{2^{\alpha}-1}=2^{2^{\alpha}-1}.$$

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Este de remarcat faptul că polinoamele de grad efectiv $2^{\alpha}-1$ se recunosc după aceea că iau valoare b_1 într-un număr impar de puncte ale punctului G, ceea ce este evident, căci dacă ar lua-o într-un număr par de puncte gradul polinomului ar fi $\leqq 2^{\alpha}-2$.

Ca încheiere, vrem să semnalăm o interpretare geometrică convențională a funcțiilor abstracte definite pe G și cu valorile în G'. Să luăm în plan două axe de coordonate rectangulare OX și OY. Vom conveni ca punctele de pe axa OX, de abscisă $0, 1, 2, \ldots, k-1$, să reprezinte elementele $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ale grupului G, iar punctele de pe axa OY, de ordonată $0, 1, 2, \ldots, l-1$, să reprezinte elementele $b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}$ ale grupului G'. Punctul de coordonate (X, Y), unde $X \in (0, 1, \ldots, k-1)$ și $Y \in (0, 1, 2, \ldots, l-1)$ vom conveni să reprezinte punctul abstract (a_X, b_Y). Dată fiind funcția $f(x)$, totalitatea punctelor (X, Y) — unde Y este determinat în funcție de X prin relația $f(a_X)=b_Y$ — ne dau o idee despre felul de variație a funcției abstracte $f(x)$. Pentru ca această imagine a variației funcției să fie mai concretă vom uni, două cîte două, punctele de abscise consecutive, prin segmente de linii drepte. Linia frîntă astfel obținută o vom numi graficul funcției.

Să considerăm cazul I avut în vedere în prezenta notă. Graficul polinomului $P_n^q(x)$, ce determină clasa U_n^q, este segmentul ce unește punctele de coordonate $(0, 0)$ și $(1, \overline{2q-1}\, 2^{\alpha-n}p)$. În fig. 1 se pot vedea toate polinoamele $P_n^q(x)$ pentru cazul $l=12$. Punctat se pot vedea graficele funcțiilor pentru care $f(a_0)=b_0$ și care nu sînt polinoame.

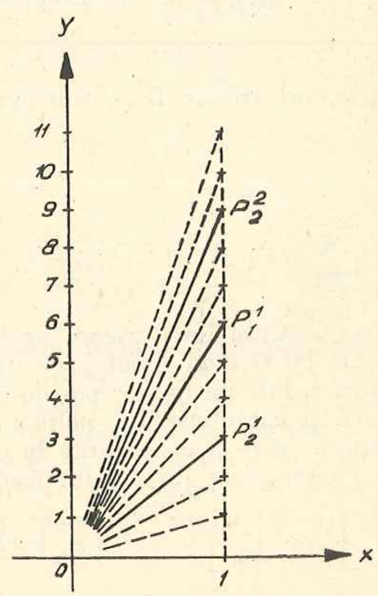

Fig 1

Să considerăm acum cazul II, avut în vedere în prezenta notă. In acest caz graficul este o linie poligonală cuprinsă între paralelele $Y=0$ și $Y=1$. In fig. 2 se pot vedea toate polinoamele pentru cazul $l=4$.

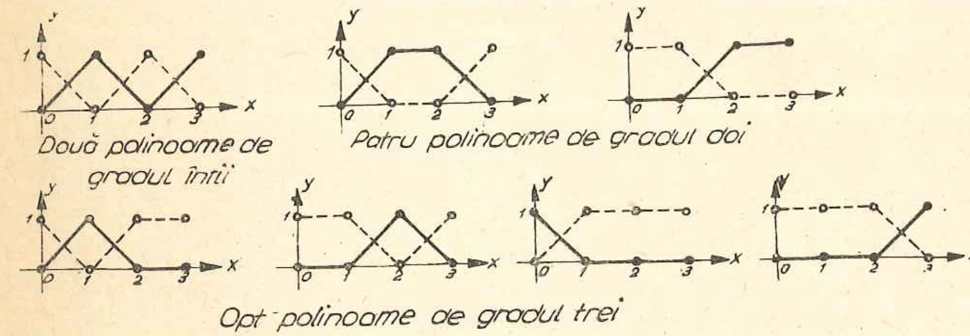

Fig. 2

Academia R.P.R. — Filiala Cluj
Institutul de calcul

ОБ АБСТРАКТНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ, ЗАДАННЫХ НА ГРУППАХ

(Краткое содержание)

В этой заметке даются первые результаты о существовании и о числе абстрактных многочленов, заданных на циклических группах конечного порядка. Рассматривается только случай, когда одна из групп G или G' является группой второго порядка.

SUR LES POLYNÔMES ABSTRAITS DÉFINIS PAR GROUPES CYCLIQUES D'ORDRE FINI ET AVEC LES VALEURS EN GROUPES CYCLIQUES D'ORDRE FINI

(Résumé)

Cette note présente les premiers résultats sur l'existence et le nombre des polynômes abstraits définis par groupes cycliques d'ordre fini et avec les valeurs en groupes cycliques d'ordre fini. On considère seulement le cas où l'un des groupes G ou G' est du deuxième ordre.