ASUPRA UNEI TEOREME A LUI W. A. MARKOV*)

DE

OLEG ARAMĂ

(Cluj)

Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 12 iulie 1961 a Institutului de calcul al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj

1. Se cunoaşte următoarea teoremă stabilită de W. A. Markov [6]: *Dacă rădăcinile a două polinoame de acelaşi grad $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt toate reale şi se separă, atunci şi rădăcinile derivatelor acestor polinoame se separă.*

Demonstraţia dată de W. A. Markov acestei teoreme se bazează pe utilizarea polinomului de interpolare al lui Lagrange, precum şi a unei celebre inegalităţi a lui A. A. Markov.

În legătură cu această teoremă s-au scris numeroase lucrări.

Astfel citām rezultatele obţinute de P. Montel [8], cu ocazia studierii proprietăţilor funcţiilor de forma $\frac{P(z)}{Q(z)}$ în care $P(z)$ şi $Q(z)$ sînt polinoame de o variabilă complexă z, ale căror rădăcini sînt situate pe o curbă (C) şi se separă pe această curbă.

Într-o lucrare recentă [10], T. Popoviciu dă o generalizare teoremei lui W. A. Markov, utilizînd proprietatea care exprimă că rădăcinile derivatei unui polinom cu toate rădăcinile reale şi distincte, sînt funcţii crescătoare de rădăcinile polinomului considerat. Cu această ocazie T. Popoviciu obţine în lucrarea citată noi teoreme de tip W. A. Markov.

Alte demonstraţii ale teoremei lui W. A. Markov au fost date de F. Constantinescu în lucrările [3, 4]. În prima dintre acestea se dă o nouă demonstraţie a teoremei lui W. A. Markov cu ajutorul teoremei lui Sturm referitoare la separarea rădăcinilor integralelor unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene de ordinul al doilea.

Citām de asemenea rezultatele obţinute de I. Rusu [11], privind extinderea teoremei lui W. A. Markov la polinoame generalizate, care se

*) Această lucrare apare şi în limba franceză în revista „Mathematica", vol. 3(26), fasc. 2, 1961.

obţin prin combinaţii liniare cu coeficienţi constanţi ai unor funcţii formînd un sistem Cebîşev. I. Rusu stabileşte în lucrarea citată o astfel de extindere în ipoteza suplimentară că spaţiul vectorial al polinoamelor considerate se transformă în el însuşi, dacă asupra variabilei independente se aplică translaţii. Ca aplicaţii se tratează cazul polinoamelor trigonometrice.

În sfîrşit ţinem să relevăm remarcabila generalizare a teoremei lui W. A. Markov, obţinută de E. M o l d o v a n în lucrarea [7], cu ocazia unor cercetări privind noţiunea de funcţie convexă. Această generalizare constă în înlocuirea mulţimii polinoamelor de grad cel mult n cu o altă mulţime de funcţii nu neapărat liniară, avînd proprietăţi de interpolaţie asemănătoare. Teorema obţinută de E. Moldovan conţine ca şi cazuri particulare majoritatea teoremelor de tip W. A. Markov cunoscute în prezent şi totodată furnizează noi teoreme de acest fel pentru integralele ecuaţiilor diferenţiale. Astfel în cazul particular al ecuaţiilor diferenţiale liniare şi omogene de ordinul n, folosind unele rezultate suplimentare, din lucrarea [2] se poate obţine teorema 1, enunţată în expunerea de faţă.

În prezenta lucrare, folosindu-ne de unele rezultate pe care le-am obţinut în lucrarea anterioară [2], dăm o altă demonstraţie teoremei lui W. A. Markov (teorema 1 din această lucrare), proprie cazului particular al ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul n. Cu această ocazie obţinem şi unele completări ale teoremei 1, demonstrînd teoremele 2 şi 3 din lucrarea de faţă.

2. Dăm la început cîteva definiţii şi rezultate preliminare, de care ne vom servi în cursul acestei expuneri.

Fie o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă de ordinul n

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y = 0 \qquad (n > 2), \tag{1}$$

avînd coeficienţii continui într-un interval $[a, b)$ şi fie $\mathcal{Y}_n$ mulţimea integralelor acestei ecuaţii în intervalul considerat.

DEFINIŢIA 1. Vom spune că integralele ecuaţiei (1) sînt neoscilatorii *în sens larg* în intervalul $[a, b)$, respectiv în (a, b), dacă oricare ar fi integrala neidentic nulă $y(x) \in \mathcal{Y}_n$, ea nu poate avea în intervalul $[a, b)$, respectiv (a, b) mai mult de $n - 1$ rădăcini *distincte*.

Păstrînd notaţiile din lucrarea [2], vom nota în cele ce urmează această proprietate a mulţimii $\mathcal{Y}_n$ prin simbolul $I_n[a, b)$, respectiv $I_n(a, b)$.

DEFINIŢIA 2. Vom spune că integralele ecuaţiei (1) sînt neoscilatorii în *sens strict* în intervalul $[a, b]$, respectiv în (a, b), dacă oricare ar fi integrala neidentic nulă $y(x) \in \mathcal{Y}_n$ iar $x_1, x_2, \ldots, x_m$ eventualele ei rădăcini din intervalul $[a, b)$, respectiv $(a, b]$, avînd respectiv ordinele de multiplicitate $p_1, p_2, \ldots, p_m$, are loc inegalitatea $p_1 + p_2 + \cdots + p_m \leqq n - 1$.

Vom nota această proprietate a mulţimii $\mathcal{Y}_n$ cu simbolul $I_n^*[a, b)$, respectiv cu $I_n^*(a, b)$.

După cum se ştie proprietatea de neoscilaţie exprimată în definiţia 2, a mulţimii $\mathcal{Y}_n$, este echivalentă cu următoarea proprietate de interpolaţie a mulţimii $\mathcal{Y}_n$:

Oricare ar fi nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ din intervalul $[a, b]$, respectiv (a, b), $(m \leqq n)$ şi oricare ar fi sistemele de numere $\{y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(p_i-1)}\}$,

$i = 1, 2, \ldots, m$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt numere naturale satisfăcînd condiţia $p_1 + p_2 + \cdots, p_m = n$, ecuaţia (1) admite o integrală $y(x)$ şi una singură pentru alegerea făcută, satisfăcînd condiţiile

$$y(x_i) = y_i^{(0)}, \quad y'(x_i) = y_i^{(1)}, \quad \ldots, \quad y_i^{(p_i-1)}(x_i) = y_i^{(p_i-1)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

În cele ce urmează ne vom servi de asemenea de următoarele 4 teoreme, primele două fiind stabilite în lucrarea [2], iar ultimele două aparţinînd lui G. P ó l y a [9][1]:

TEOREMA (*). *Dacă mulţimea $\mathcal{Y}_n$ a integralelor ecuaţiei* (1) *are proprietatea $I_n(a, b)$, atunci acea mulţime are şi proprietatea $I_n^*(a, b)$.*

TEOREMA (**). *Dacă coeficienţii ecuaţiei* (1) *sînt continui în intervalul semiînchis* $[a, b)$, *atunci din proprietatea $I_n^*(a, b)$ a mulţimii $\mathcal{Y}_n$ rezultă proprietatea $I_n^*[a, b)$.*

TEOREMA (***). *Dacă mulţimea $\mathcal{Y}_n$ are proprietatea $I_n^*[a, b)$, atunci ecuaţia* (1) *admite cel puţin un sistem de $n-1$ integrale $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$, satisfăcînd în intervalul deschis* (a, b), *relaţiile*

$$h_1(x) \neq 0, \quad W[h_1(x), h_2(x)] \neq 0, \; \ldots, \; W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)] \neq 0. \tag{3}$$

Aici prin $W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_i(x)]$ s-a notat wronskianul funcţiilor $h_1(x)$, $h_2(x), \ldots, h_i(x)$. Un astfel de sistem este dat de exemplu de un sistem de integrale ale ecuaţiei (1), care satisfac condiţiile

$$\begin{aligned} &h_1(x) = h_1'(a) = \ldots\ldots = h_1^{(n-2)}(a) = 0, \quad h_1^{(n-1)}(a) = 1, \\ &h_2(a) = h_2'(a) = \ldots = h_2^{(n-3)}(a) = 0, \quad h_2^{(n-2)}(a) = 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &h_{n-1}(a) = 0, \; h_{n-1}'(a) = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

TEOREMA (****). *Dacă o ecuaţie* (1) *avînd coeficienţii continui într-un interval* (a, b), *admite un sistem de $n - 1$ integrale $h_1(x)$, $h(_2x), \ldots, h_{n-1}(x)$ satisfăcînd în intervalul (a, b) relaţiile* (3), *atunci mulţimea $\mathcal{Y}_n$ a integralelor ei are proprietatea $I_n^*(a, b)$.*

În sfîrşit vom demonstra următoarea lemă, de care ne vom folosi de asemenea în cursul acestei expuneri.

LEMA 1. *Fie m funcţii $h_1(x), \ldots, h_m(x)$ $(m \geqq 2)$, avînd derivate de ordinul $m-1$ continue într-un interval (a, b) şi satisfăcînd în acest interval relaţiile*

$$h_1(x) \neq 0, \quad W[h_1(x), h_2(x)] \neq 0, \; \ldots, \; W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x)] \neq 0,$$
$$x \in (a, b). \tag{5}$$

[1]) A se consulta de asemenea lucrarea [5] a lui G. M a m m a n a.

Fie k un număr natural astfel încît $k \leqq m-1$. Atunci funcțiile

$$H_1(x) = W[h_1(x), \ldots, h_k(x), h_{k+1}(x)], \; H_2(x) = W[h_1(x), \ldots, h_k(x), h_{k+2}(x)],$$
$$H_{m-k}(x) = W[h_1(x), \ldots, h_k(x), h_m(x)] \tag{6}$$

satisfac în intervalul (a, b) relațiile

$$H_1(x) \neq 0, \; W[H_1(x), H_2(x)] \neq 0, \ldots, W[H_1(x), H_2(x), \ldots, H_{m-k}(x)] \neq 0. \tag{7}$$

Demonstrația acestei leme o facem prin inducție relativ la numărul k. Astfel pentru $k = 1$, afirmația lemei rezultă din următoarea identitate (a se consulta lucrarea [9]) :

$$W\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)', \left(\frac{h_3}{h_1}\right)', \ldots, \left(\frac{h_m}{h_1}\right)'\right] \equiv \frac{1}{h_1^m} W(h_1, h_2, \ldots, h_m), \; x \in (a, b),$$

valabilă în ipoteza că funcțiile $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x)$ aparțin clasei $C^{m-1}(a, b)$ și că $h_1(x) \neq 0$ în intervalul (a, b). Aceste condiții sînt asigurate de altfel de ipotezele lemei. Din această identitate rezultă îndată identitatea

$$W[W(h_1, h_2), \; W(h_1, h_3), \ldots, W(h_1, h_m)] \equiv h_1^{m-2} W(h_1, h_2, \ldots, h_m). \tag{8}$$

În continuare, notînd cu $H_1^{(1)}(x) = W[h_1(x), h_2(x)], \ldots, H_{m-1}^{(1)}(x) = W[h_1(x), h_m(x)]$ și ținînd seamă că prin ipoteză $H_1^{(1)}(x) \neq 0$ pentru $x \in (a, b)$, putem aplica din nou identitatea (8) funcțiilor $H_1^{(1)}(x), \ldots, H_{m-1}^{(1)}(x)$. Obținem

$$W[W(H_1^{(1)}, H_2^{(1)}), W(H_1^{(1)}, H_3^{(1)}), \ldots, W(H_1^{(1)}, H_{m-1}^{(1)})] \equiv$$
$$\equiv (H_1^{(1)})^{m-3} W(H_1^{(1)}, H_2^{(1)}, \ldots, H_{m-1}^{(1)}). \tag{9}$$

Ținînd seamă de identitatea (8) în care considerăm $m = 3$, obținem

$$W(H_1^{(1)}, H_i^{(1)}) = h_1 W(h_1, h_2, h_{i+1}) \quad (i = 2, 3, \ldots, m-1). \tag{10}$$

Ținînd seamă tot de identitatea (8), membrul al doilea al identității (9) este egal cu $h_1^{m-2} W^{m-3}(h_1, h_2) \, W(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ și astfel identitatea (9) devine :

$$W[h_1 W(h_1, h_2, h_3), \; h_1 W(h_1, h_2, h_4), \ldots, h_1 W(h_1, h_2, h_m)] \equiv$$
$$\equiv h_1^{m-2} W^{m-3}(h_1, h_2) \, W(h_1, h_2, \ldots, h_m). \tag{11}$$

Se verifică cu ușurință că dacă funcțiile $u(x)$ și $f_1(x), \ldots, f_\nu(x)$ sînt de $\nu - 1$ ori derivabile în intervalul (a, b), atunci are loc identitatea

$$W(uf_1, uf_2, \ldots, uf_\nu) \equiv u^\nu W(f_1, f_2, \ldots, f_\nu). \tag{12}$$

Ținînd seamă de (12), identitatea (11) se transcrie

$$W[W(h_1, h_2, h_3), \; W(h_1, h_2, h_4), \ldots, W(h_1, h_2, h_m)] \equiv$$
$$\equiv W^{m-3}(h_1, h_2) W(h_1, h_2, \ldots, h_m). \tag{13}$$

În continuare, notînd

$$H_1^{(2)}(x) = W[h_1(x), h_2(x), h_3(x)], \ldots, H_{m-2}^{(2)}(x) = W[h_1(x), h_2(x), h_m(x)]$$

și folosind succesiv identitățile (8) și (13), obținem :

$$W[W(H_1^{(2)}, H_2^{(2)}), \; W(H_1^{(2)}, H_3^{(2)}), \ldots, W(H_1^{(2)}, H_{m-2}^{(2)})] \equiv$$
$$\equiv (H_1^{(2)})^{m-4} W(H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, \ldots, H_{m-2}^{(2)}) \equiv W^{m-3}(h_1, h_2) \, W^{m-4}(h_1, h_2, h_3) \times$$
$$\times W(h_1, h_2, \ldots, h_m). \tag{14}$$

Dar, ținînd seamă de identitatea (13) în care considerăm $m = 4$, obținem :

$$W(H_1^{(2)}, H_i^{(2)}) \equiv W(h_1, h_2) \, W(h_1, h_2, h_3, h_{2+i}) \quad (i = 2, 3, \ldots, m-2)$$

și ținînd seamă de (12), identitatea (14) se transcrie astfel :

$$W[W(h_1, h_2, h_3, h_4), \; W(h_1, h_2, h_3, h_5), \ldots, W(h_1, h_2, h_3, h_m) \equiv$$
$$\equiv W^{m-4}(h_1, h_2, h_3) \, W(h_1, h_2, \ldots, h_m),$$

adică identitatea

$$W(H_1^{(3)}, H_2^{(3)}, \ldots, H_{m-3}^{(3)}) \equiv W^{m-4}(h_1, h_2, h_3) \, W(h_1, h_2, \ldots, h_m),$$

unde s-a notat $H_i^{(3)} \equiv W(h_1, h_2, h_3, h_{3+i}), \quad i = 1, 2, \ldots, m-3$.

Din aproape în aproape se obține următoarea identitate stabilită de L. Aramă în lucrarea [1] :

$$W(H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, \ldots, H_{m-k}^{(k)}) \equiv W^{m-k-1}(h_1, h_2, \ldots, h_k) \, W(h_1, h_2, \ldots, h_m), \tag{15}$$

unde s-a notat

$$H_i^{(k)}(x) \equiv W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+i}(x)], \; i = 1, 2, \ldots, m-k.$$

Aici evident s-a presupus $1 \leqq k \leqq m-1$ (a se vedea enunțul lemei).

Din această identitate rezultă îndată lema.

Observație. După cum s-a arătat în lucrarea [1] citată anterior, identitatea (15) este valabilă și în cazul cînd relațiile (3) nu sînt verificate. Această afirmație rezultă din proprietatea de continuitate a funcțiilor care intervin în identitatea (15).

3. În cele ce urmează vom presupune că $n \geqq 3$ și vom ține seamă de următoarea ipoteză :

IPOTEZĂ. *Mulțimea $\mathcal{Y}_n$ a integralelor ecuației* (1) *are proprietatea $I_n(a, b)$.*

Atunci din teorema (*) rezultă că mulțimea $\mathcal{Y}_n$ are proprietatea $I_n^*(a, b)$, iar din teorema (**) rezultă că ea are și proprietatea $I_n^*[a, b)$ și în consecință, în baza teoremei (***), ecuația (1) va admite cel puțin un sistem de $n-1$ integrale $h_1(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ satisfăcînd în intervalul (a, b) relațiile (3). Alegem unul dintre aceste sisteme și-l fixăm în cele ce urmează.

Vom demonstra întîi următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *În ipotezele de mai sus, fie $f(x)$ şi $g(x)$ două integrale neidentic nule ale ecuaţiei* (1), *avînd fiecare cîte $n - 1$ rădăcini distincte în intervalul (a, b)* [2]. *Atunci*:

1°. *Funcţia $F(x) = W[h_1(x), f(x)]$ are în intervalul (a, b) exact $n - 2$ rădăcini distincte. Toate aceste rădăcini sînt simple şi în consecinţă reprezintă punctele de extremum ale funcţiei $\frac{f(x)}{h_1(x)}$ în intervalul (a, b). Afirmaţii analoage sînt valabile şi pentru funcţia $G(x) = W[h_1(x), g(x)]$. Aici $h_1(x)$ reprezintă funcţia lui Cauchy asociată ecuaţiei* (1) *şi nodului $x = a$, adică integrala ecuaţiei* (1), *care satisface prima condiţie din* (4).

2°. *Dacă rădăcinile funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ se separă în (a, b), atunci şi rădăcinile funcţiilor $F(x)$ şi $G(x)$ se separă în (a, b).*

Demonstraţie. 1°. În primul rînd se observă că funcţia lui Cauchy $h_1(x)$ nu se poate anula în nici un punct al intervalului (a, b), după cum rezultă din ipoteza că mulţimea $\mathcal{Y}_n$ are proprietatea $I_n(a, b)$ şi din teoremele (*), (**), (***). Astfel, funcţiile $F(x)$ şi $G(x)$ sînt definite şi continue în întreg intervalul (a, b).

Faptul că funcţiile $F(x)$ şi $G(x)$ au în intervalul (a, b) cel puţin $n - 2$ rădăcini distincte, rezultă îndată aplicînd teorema lui Rolle funcţiilor $\frac{f(x)}{h_1(x)}$ respectiv $\frac{g(x)}{h_1(x)}$, care prin ipoteză au cîte $n - 1$ rădăcini distincte în intervalul (a, b). Să arătăm acum că funcţiile $F(x)$ şi $G(x)$ nu au mai mult de $n - 2$ rădăcini în intervalul (a, b). În adevăr, efectuînd asupra ecuaţiei (1) schimbarea de funcţie $y = h_1(x)\, z(x)$, se obţine

$$L_n[y] \equiv h_1(x)\,[z^{(n)} + q_1(x) z^{(n-1)} + \dots + q_{n-1}(x) z' + q_n(x) z], \tag{16}$$

unde $q_1(x), \dots, q_{n-1}(x)$ sînt funcţii continue în (a, b), iar $q_n(x) \equiv L_n[h_1(x)] \equiv 0$ în (a, b), întrucît $h_1(x)$ este o integrală a ecuaţiei (1). Notînd $z' = v$, din (16) obţinem

$$L_n[y] \equiv h_1(x)\,[v^{(n-1)} + q_1(x) v^{(n-2)} + \dots + q_{n-1}(x) v]. \tag{17}$$

Efectuînd în sfîrşit schimbarea de variabilă $v(x) = \frac{1}{h_1^2(x)}\, Y(x)$ se obţine din (17)

$$L_n[y] \equiv \frac{1}{h_1(x)}\,[Y^{(n-1)} + P_1(x) Y^{(n-2)} + \dots + P_{n-1}(x) Y] \equiv \frac{1}{h_1(x)} L_{n-1}[Y] \tag{18}$$

Legătura dintre variabilele y şi Y este următoarea:

$$Y = W(h_1, y). \tag{19}$$

Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$L_{n-1}[Y] = Y^{(n-1)} + P_1(x)\, Y^{(n-2)} + \dots + P_{n-1}(x)\, Y = 0. \tag{20}$$

[2]) Existenţa unor astfel de integrale rezultă din proprietatea $I_n^*[a, b)$ a mulţimii $\mathcal{Y}_n$.

Ţinînd seamă de relaţia (19), se constată că ecuaţia (20) admite ca integrale funcţiile

$$H_1(x) = W[h_1(x), h_2(x)],\ H_2(x) = W[h_1(x), h_3(x)], \dots, H_{n-2}(x) = W[h_1(x), h_{n-1}(x)]. \tag{21}$$

Din relaţiile (3) presupuse adevărate prin ipoteză, ţinînd seamă de identitatea (8) în care se ia succesiv $m = 2, 3, \dots, n - 1$, rezultă că integralele $H_i(x)$ satisfac în intervalul (a, b) relaţiile

$$H_1(x) \neq 0,\ W[H_1(x), H_2(x)] \neq 0, \dots, W[H_1(x), H_2(x), \dots, H_{n-2}(x)] \neq 0. \tag{22}$$

Astfel, ecuaţia (20) verifică în intervalul (a, b) condiţiile teoremei (****) şi în baza ei, rezultă că mulţimea $\mathcal{Y}_{n-1}$ a integralelor ecuaţiei (20) are proprietatea $I_{n-1}^*(a, b)$, ceea ce înseamnă că oricare ar fi integrala neidentic nulă $Y(x)$ a ecuaţiei (20), această integrală nu poate avea mai mult de $n - 2$ rădăcini în (a, b), fiecare rădăcină fiind considerată de atîtea ori cît indică ordinul ei de multiplicitate. Dar şi funcţiile $F(x) = W[h_1(x), f(x)]$ şi $G(x) = W[h_1(x), g(x)]$ constituie integrale ale ecuaţiei (20). Aceste integrale nu pot fi identic nule întrucît dacă de exemplu $F(x) \equiv W[h_1(x), f(x)] \equiv 0$, ar rezulta de aici identitatea $h_1(x) \equiv C f(x)$, unde C este o constantă. Dar prin ipoteză $f(x)$ se anulează în $n - 1$ puncte distincte din $[a, b)$ şi deci, în intervalul (a, b), cel puţin în $n - 2$ puncte ($n - 2 > 1$, întrucît în ipotezele teoremei s-a presupus $n > 2$). Din identitatea precedentă ar rezulta că şi funcţia $h_1(x)$ se anulează în intervalul (a, b), ceea ce ar contrazice prima relaţie din (3). Deci integrala $F(x)$ nu poate fi identic nulă în intervalul (a, b). În baza proprietăţii $I_{n-1}^*(a, b)$ a familiei $\mathcal{Y}_{n-1}$ a integralelor ecuaţiei (20), rezultă că $F(x)$ nu poate avea mai mult de $n - 2$ rădăcini în (a, b), fiecare rădăcină fiind considerată de atîtea ori cît este ordinul ei de multiplicitate. S-a arătat anterior însă că $F(x)$ are cel puţin $n - 2$ rădăcini distincte în (a, b). Rezultă în definitiv concluzia că $F(x)$ are în intervalul (a, b) exact $n - 2$ rădăcini distincte şi că fiecare dintre ele este simplă (de ordinul 1). De aici, ţinînd seamă şi de identitatea evidentă $F(x) \equiv h_1^2(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{h_1(x)}\right)$, rezultă că rădăcinile din (a, b) ale funcţiei $F(x)$ reprezintă puncte de extremum ale funcţiei $\frac{f(x)}{h_1(x)}$.

Concluzii analoage se obţin şi pentru funcţia $G(x)$.

2°. Vom presupune acum că $n \geq 3$ şi că rădăcinile integralelor $f(x)$ şi $g(x)$ ale ecuaţiei (1) se separă în intervalul (a, b). Să arătăm că şi rădăcinile funcţiilor $F(x)$ şi $G(x)$ se separă în intervalul (a, b). Demonstraţia acestei afirmaţii o facem pentru $n \geq 4$, rămînînd să examinăm cazul $n = 3$ la sfîrşit. Să notăm în acest scop cu $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ rădăcinile funcţiei $f(x)$ şi cu $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ rădăcinile funcţiei $g(x)$ din intervalul (a, b). Întrucît prin ipoteză aceste rădăcini se separă, rezultă că va avea loc una din următoarele situaţii:

$$a \leq r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \dots < r_{n-1} < s_{n-1} < b,$$

sau

$$a \leq s_1 < r_1 < s_2 < r_2 < \cdots < s_{n-1} < r_{n-1} < b.$$

Vom face în prealabil cîteva observaţii de care ne vom servi în cele ce urmează.

α) Funcţia $f(x)$ nu are în intervalul $[a, b)$ alte rădăcini decît r_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ şi toate aceste rădăcini sînt simple. De aici rezultă că funcţia $f(x)$ îşi schimbă semnul în fiecare din punctele r_i. O concluzie analoagă rezultă şi pentru funcţia $g(x)$. Această afirmaţie rezultă din ipoteza că familia $\mathcal{Y}_n$ a integralelor ecuaţiei (1) are proprietatea $I_n[a, b)$.

β) Oricare ar fi numerele reale λ şi μ astfel încît $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, funcţia $\varphi(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ nu este identic nulă în intervalul (a, b) şi are cel puţin $n - 2$ rădăcini distincte în acest interval.

Într-adevăr, să presupunem că de exemplu $\lambda \neq 0$. Atunci ţinînd seamă de observaţia α), precum şi de faptul că rădăcinile r_i şi s_i se separă, rezultă că şirul de numere

$$\varphi(s_1) = \lambda f(s_1), \quad \varphi(s_2) = \lambda f(s_2), \ldots, \varphi(s_{n-1}) = \lambda f(s_{n-1})$$

prezintă $n - 2$ variaţii de semn. De aici rezultă că funcţia $\varphi(x)$ are în (a,b) cel puţin $n-2$ rădăcini, în fiecare din intervalele (s_i, s_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-2$, aflîndu-se cel puţin o rădăcină a funcţiei $\varphi(x)$. Dacă $\mu \neq 0$, atunci funcţia $\varphi(x)$ va avea cel puţin cîte o rădăcină în fiecare din intervalele (r_i, r_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

γ) Oricare ar fi constantele reale λ şi μ satisfăcînd condiţia $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, funcţia $\Phi(x) = W[h_1(x), \varphi(x)] = W[h_1(x), \lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda F(x) + \mu G(x)$ are în intervalul (a, b) cel puţin $n - 3$ rădăcini distincte în care ea îşi *schimbă semnul*.

Demonstraţie. Faptul că funcţia $\Phi(x)$ are în intervalul (a, b) cel puţin $n - 3$ rădăcini distincte se constată îndată ţinînd seamă de proprietatea β) şi aplicînd funcţiei $\frac{\varphi}{h_1}$ teorema lui Rolle. Aici se are în vedere de asemenea identitatea $W(h_1, \varphi) \equiv h_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi}{h_1}\right)$.

Să arătăm mai mult, anume că funcţia $\Phi(x)$ are cel puţin $n-3$ rădăcini distincte în care îşi schimbă semnul.

Aplicînd teorema lui Rolle funcţiei $\frac{\varphi}{h_1}$ şi ţinînd seamă că derivata ei, adică funcţia $\frac{1}{h_1^2} W(h_1, \varphi)$ nu se anulează identic în nici un subinterval, se obţine afirmaţia γ).

Anularea identic a funcţiei $\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi}{h_1}\right)$ într-un subinterval (α, β) al intervalului (a, b), ne-ar conduce la identitatea $\frac{\varphi(x)}{h_1(x)} \equiv C$ (C fiind o constantă), valabilă în (α, β) şi deci la identitatea $\varphi(x) \equiv C\, h_1(x)$ în (α, β). Deoarece însă ambii membri ai acestei identităţi reprezintă integrale ale ecuaţiei

diferenţiale (1), în baza unicităţii problemei lui Cauchy rezultă că identitatea precedentă va avea loc în întreg intervalul (a, b). Cum însă funcţia $\varphi(x)$ nu este identic nulă în (a, b) (conform observaţiei β)), rezultă că $C \neq 0$. Dar în baza observaţiei β), funcţia $\varphi(x)$ se anulează în cel puţin $n - 2$ puncte distincte din (a, b). Ţinînd seamă de identitatea precedentă, ar rezulta de aici că funcţia $h_1(x)$ se anulează în cel puţin $n - 2$ puncte distincte din (a, b) şi cum prin ipoteză $n \geq 4$, această afirmaţie ar fi în contradicţie cu ipoteza că $h_1(x) > 0$ în intervalul (a, b). Cu aceasta, afirmaţia γ) este complet demonstrată.

δ) *În ipotezele teoremei* 1, *are loc relaţia* $W[h(x), f(x), g(x)] \neq 0$ *pentru orice* $x \in (a, b)$.

Demonstraţie. Să presupunem prin absurd că într-un punct $x_0 \in (a, b)$ ar avea loc egalitatea $W(h, f, g)|_{x=x_0} = 0$. De aici, ţinînd seamă de identitatea

$$W[W(h_1, f), W(h_1, g)] \equiv h_1 W(h, f, g), \tag{23}$$

care rezultă din (15) luînd $m = 3$, $k = 1$, s-ar obţine că

$$W[F, G]|_{x=x_0} = 0, \quad x_0 \in (a, b),$$

funcţiile $F(x)$ şi $G(x)$ avînd aceeaşi semnificaţie ca în enunţul teoremei 1.

Din egalitatea precedentă rezultă existenţa a două constante λ şi μ $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$, astfel încît

$$\begin{cases} \lambda F(x_0) + \mu G(x_0) = 0, \\ \lambda F'(x_0) + \mu G'(x_0) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Egalităţile (24) exprimă faptul că funcţia $\Phi(x) = \lambda F(x) + \mu G(x)$ are în punctul $x_0 \in (a, b)$ o rădăcină de ordin p_0 satisfăcînd inegalitatea $p_0 \geq 2$. Această funcţie nu poate fi identic nulă în (a, b) întrucît în caz contrar ar rezulta că

$$\lambda\, h_1^2(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{h_1(x)}\right) \equiv -\mu\, h_1^2(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h_1(x)}\right),$$

de unde ar rezulta că $\lambda f(x) \equiv -\mu\, g(x) + C\, h_1(x)$, C fiind o constantă. Se vede de aici că nici una dintre constantele λ şi μ nu pot fi nule, întrucît dacă de exemplu $\mu = 0$ şi $\lambda \neq 0$, s-ar deduce din identitatea precedentă că :

sau $f(x)$ nu are în (a, b) nici o rădăcină,

sau $f(x)$ este identic nulă.

Ambele aceste situaţii sînt contradictorii cu ipotezele teoremei 1. Deci $\lambda \cdot \mu \neq 0$.

În continuare, din identitatea precedentă s-ar obţine egalităţile

$$f(s_1) = \frac{C}{\lambda} h_1(s_1), \quad f(s_2) = \frac{C}{\lambda} h_1(s_2), \ldots, f(s_{n-1}) = \frac{C}{\lambda} h_1(s_{n-1}). \tag{25}$$

Pentru fixarea ideilor să presupunem că $r_1 < s_1$. De aici şi din (25) ar rezulta că valorile funcţiei $f(x)$ în punctele s_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ au acelaşi semn, diferit de zero, întrucît $h_1(x)$ prin ipoteză păstrează un semn constant în (a, b). De aici ar rezulta că în fiecare interval (s_i, s_{i+1}) cuprins între două rădăcini consecutive ale funcţiei $g(x)$, funcţia $f(x)$ are un număr par de rădăcini, sau nici una. Această concluzie ar contrazice faptul că rădăcinile funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ sînt simple şi că ele se separă în (a, b). Rezultă în definitiv că $\Phi(x) \not\equiv 0$ în intervalul (a, b).

În continuare, conform observaţiei γ), funcţia $\Phi(x)$ are în intervalul (a, b) cel puţin $n - 3$ rădăcini distincte în care îşi schimbă semnul. Printre rădăcinile funcţiei $\Phi(x)$ se va afla şi rădăcina x_0 al cărei ordin de multiplicitate p_0 satisface inegalitatea $p_0 \geqq 2$. Distingem următoarele două cazuri, după cum numărul N al rădăcinilor distincte ale funcţiei $\Phi(x)$ din intervalul (a, b) este egal cu $n - 3$, sau este mai mare decît $n - 3$. Vom arăta că în ambele cazuri, suma ordinelor de multiplicitate ale rădăcinilor funcţiei $\Phi(x)$ este mai mare sau cel puţin egală cu numărul $n - 1$.

Cazul 1. $N = n - 3$. Conform observaţiei γ), în fiecare din rădăcinile sale, funcţia $\Phi(x)$ îşi schimbă semnul. De aici rezultă că numărul p_0 care reprezintă ordinul de multiplicitate al rădăcinei x_0 a funcţiei $\Phi(x)$ este impar şi în baza relaţiilor (24) rezultă că $p_0 \geqq 3$. Considerăm cazul cel mai nefavorabil cînd cele $n - 4$ rădăcini rămase sînt simple. Făcînd suma ordinelor acestor rădăcini şi ţinînd seamă şi de ordinul rădăcinii x_0, se obţine că suma totală este mai mare sau cel puţin egală cu $n - 1$.

Cazul 2. $N > n - 3$. În acest caz, ţinînd seamă că ordinul p_0 al rădăcinii x_0 satisface inegalitatea $p_0 \geqq 2$, rezultă că suma ordinelor de multiplicitate ale tuturor rădăcinilor din (a, b) ale funcţiei $\Phi(x)$ este de asemenea mai mare sau cel puţin egală cu $n - 1$.

Astfel, în ambele cazuri numărul rădăcinilor din (a, b) ale funcţiei $\Phi(x)$ (fiecare rădăcină fiind considerată de atîtea ori cît indică ordinul ei de multiplicitate) este mai mare sau cel puţin egal cu $n - 1$.

Pe de altă parte, funcţia considerată $\Phi(x)$ este o combinaţie liniară cu coeficienţi constanţi a funcţiilor $F(x)$ şi $G(x)$ care, după cum s-a arătat anterior, sînt integrale ale ecuaţiei (20). Rezultă de aici că şi funcţia $\Phi(x)$ este de asemenea o integrală a ecuaţiei (20). Dar s-a arătat anterior că mulţimea $\mathcal{Y}_{n-1}$ a integralelor acestei ecuaţii are proprietatea $I^*_{n-1}(a, b)$. De aici rezultă că integrala neidentic nulă $\Phi(x)$ nu poate avea în intervalul (a, b) mai mult de $n - 2$ rădăcini, fiecare rădăcină fiind considerată de atîtea ori cît indică ordinul ei de multiplicitate. Această afirmaţie este în contradicţie cu rezultatul stabilit anterior că suma ordinelor de multiplicitate ale rădăcinilor din (a, b) ale funcţiei $\Phi(x)$ este mai mare sau cel puţin egală cu $n - 1$. Din această contradicţie rezultă afirmaţia δ).

*

Revenind la demonstraţia teoremei 1, să arătăm că dacă în ipotezele teoremei, rădăcinile funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ se separă în intervalul (a, b), atunci şi rădăcinile funcţiilor $F(x)$ şi $G(x)$ se separă în intervalul (a, b). În acest scop vom demonstra întîi următoarea proprietate :

ε) *În intervalul deschis, cuprins între două rădăcini consecutive ale uneia din funcţiile $F(x)$ sau $G(x)$, nu se pot afla două (sau mai multe) rădăcini ale celeilalte.*

În acest scop să presupunem prin absurd contrariul, că de exemplu între două rădăcini consecutive ρ_i şi ρ_{i+1} ale funcţiei $F(x)$, s-ar afla două (sau mai mult de două) rădăcini ale funcţiei $G(x)$.

Fie σ_j şi σ_{j+1} două dintre aceste rădăcini, presupuse consecutive. Considerăm intervalul (σ_j, σ_{j+1}). În acest interval funcţia $F(x)$ nu se anulează. În baza teoremei lui Rolle funcţia $\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{F}\right)$ se va anula cel puţin într-un punct intermediar $x_0 \in (\sigma_j, \sigma_{j+1})$. De aici, ţinînd seamă de identitatea

$$F^2(x)\,\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{F}\right) \equiv W(F, G),$$

rezultă egalitatea $W(F, G)|_{x=x_0} = 0$ şi în baza identităţii (23), rezultă egalitatea $W(h_1, f, g)|_{x=x_0} = 0$. Această egalitate contrazice însă afirmaţia δ). Din această contradicţie rezultă afirmaţia ε).

În continuare vom demonstra proprietatea :

φ) *Funcţiile $F(x)$ şi $G(x)$ nu au nici o rădăcină comună în intervalul (a, b).*

În adevăr, să presupunem că $F(x_0) = G(x_0) = 0$, unde $x_0 \in (a, b)$. Atunci evident $W(F, G)|_{x=x_0} = 0$ şi în baza identităţii (23) rezultă egalitatea $W(h, f, g)|_{x=x_0} = 0$, ceea ce contrazice afirmaţia δ). Din această contradicţie rezultă afirmaţia φ).

Din afirmaţiile ε) şi φ) rezultă îndată proprietatea :

ψ) *În intervalul deschis cuprins între două rădăcini consecutive din intervalul (a, b) ale uneia din funcţiile $F(x)$ sau $G(x)$, se află o rădăcină şi numai una a celeilalte funcţii.*

Să arătăm în sfîrşit următoarea proprietate de monotonie :

χ) *Dacă rădăcinile minime r_1 şi s_1 ale funcţiilor $f(x)$ respectiv $g(x)$ din intervalul (a, b) se află în relaţia $r_1 < s_1$, atunci în aceeaşi relaţie se află şi rădăcinile minime ρ_1 şi σ_1 ale funcţiilor $F(x)$ respectiv $G(x)$ din intervalul (a, b).* [3])

Demonstraţia acestei afirmaţii se face prin reducere la absurd. Să presupunem deci că ar avea loc simultan relaţiile $r_1 < s_1$ şi $\sigma_1 < \rho_1$. Fără a restrînge generalitatea problemei, putem presupune că $f(x) > 0$ în intervalul (r_1, r_2) şi că $g(x) > 0$ în intervalul (s_1, s_2). În aceste ipoteze să considerăm funcţiile $y = \frac{f(x)}{h_1(x)}$ şi $y = \frac{g(x)}{h_1(x)}$. Conform observaţiei 1° a teoremei 1, funcţia $y = \frac{f(x)}{h_1(x)}$ va avea un singur punct de extremum în intervalul (r_1, r_2), anume punctul $x = \rho_1$, care evident va fi un punct de maxim (figura 1). La fel funcţia $y = \frac{g(x)}{h_1(x)}$ va avea în intervalul (s_1, s_2) un singur punct de extremum, anume

[3]) Un studiu amănunţit al unor astfel de proprietăţi de monotonie în cazul polinoamelor a fost făcut de T. P o p o v i c i u în lucrarea citată [10].

punctul $x = \sigma_1$, care va fi un punct de maxim al ei. Au loc deci relațiile :

$$\begin{aligned} \frac{f(\rho_1)}{h_1(\rho_1)} &\geq \frac{f(x)}{h_1(x)} \quad \text{pentru } x \in [r_1, r_2], \\ \frac{g(\sigma_1)}{h_1(\sigma_1)} &\geq \frac{g(x)}{h_1(x)} \quad \text{pentru } x \in [s_1, s_2]. \end{aligned} \tag{26}$$

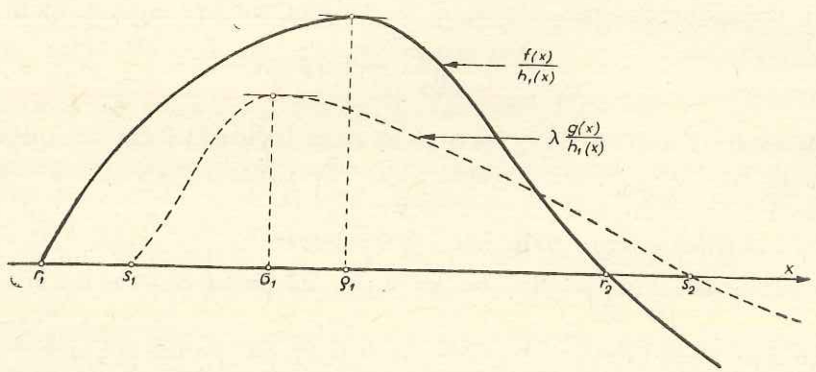

Fig. 1

Considerăm funcția $\theta(x) = f(x) - \lambda g(x)$, unde $\lambda = \frac{h_1(\sigma_1)}{h_1(\rho_1)} \cdot \frac{f(\rho_1)}{g(\sigma_1)}$. Ținînd seamă de valoarea constantei λ precum și de inegalitățile (26), se constată că

$$\theta(s_1) = f(s_1) > 0,$$

$$\theta(\sigma_1) = f(\sigma_1) - \frac{h_1(\sigma_1)}{h_1(\rho_1)} f(\rho_1) = h_1(\sigma_1) \left[\frac{f(\sigma_1)}{h_1(\sigma_1)} - \frac{f(\rho_1)}{h_1(\rho_1)} \right] < 0,$$

$$\theta(\rho_1) = f(\rho_1) - \frac{h_1(\sigma_1)}{h_1(\rho_1)} \cdot \frac{f(\rho_1)}{g(\sigma_1)} g(\rho_1) = \frac{f(\rho_1)\, h_1(\sigma_1)}{g_1(\sigma_1)} \cdot \left[\frac{g(\sigma_1)}{h_1(\sigma_1)} - \frac{g(\rho_1)}{h_1(\rho_1)} \right] > 0,$$

$$\theta(r_2) = -\lambda g(r_2) < 0.$$

Din aceste inegalități rezultă că funcția $\theta(x)$ are în intervalul (s_1, r_2), deci și în (r_1, r_2) cel puțin 3 rădăcini distincte. Dar funcția $\theta(x)$ mai are în fiecare din intervalele $(r_2, r_3), \ldots, (r_{n-2}, r_{n-1})$ cel puțin cîte o rădăcină, întrucît prin ipoteză rădăcinile funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$ se separă în (a, b). Rezultă în definitiv că funcția $\theta(x)$ are în intervalul (a, b) cel puțin $n-3+3 = n$ rădăcini distincte. Cum însă $\theta(x)$ este o integrală neidentic nulă a ecuației (1), rezultatul de mai sus este în contradicție cu proprietatea $I_n[a, b)$ a familiei $\mathcal{Y}_n$. Din această contradicție rezultă afirmația χ).

Cu aceasta, afirmația 2° a teoremei 1 este demonstrată pentru cazul $n \geq 4$.

În cazul $n = 3$, această afirmație este banală. Proprietatea χ) stabilită anterior, rămîne totuși valabilă și în acest caz.

Astfel, teorema 1 este complet demonstrată.

4. Să presupunem că ecuația (1) se reduce la ecuația

$$y^{(n+1)} = 0. \tag{27}$$

Mulțimea integralelor acestei ecuații este formată din polinome de grad cel mult n. Putem considera ca sistem fundamental, sistemul de funcții

$$h_1(x) = 1,\ h_2(x) = x, \ldots, h_n(x) = x^{n-1},\ h_{n+1}(x) = x^n. \tag{28}$$

Se observă că aceste funcții verifică următoarele relații analoage cu relațiile (3) :

$$h_1(x) = 0,\ W[h_1(x), h_2(x)] \neq 0, \ldots, W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n+1}(x)] \neq 0 \tag{29}$$

pentru $x \in (-\infty, +\infty)$. Teorema 1 enunțată pentru acest caz particular ne dă tocmai teorema lui W. A. Markov, referitor la separarea rădăcinilor polinoamelor :

Dacă $f_n(x)$ și $g_n(x)$ sînt două polinoame de grad n, avînd toate rădăcinile reale și distincte, și dacă rădăcinile acestor polinoame se separă, atunci și rădăcinile derivatelor lor, de asemenea se separă.

Considerînd funcțiile din (28) scrise în ordine inversă, adică

$$h_1(x) = x^n,\ h_2(x) = x^{n-1}, \ldots, h_{n-1}(x) = x,\ h_n(x) = 1, \tag{30}$$

se observă că și aceste funcții satisfac relațiile (29), dar nu pe toată axa, ci numai în intervalele $(0, \infty)$ sau $(-\infty, 0)$. Aplicînd teorema 1, se obține în acest caz următoarea proprietate :

Dacă $f_n(x)$ și $g_n(x)$ sînt două polinoame de grad n, avînd toate rădăcinile reale și distincte în intervalul $(0, \infty)$, sau $(-\infty, 0)$, și dacă rădăcinile acestor polinoame se separă, atunci de o proprietate analoagă se vor bucura și următoarele polinoame de grad $n-1$

$$F_{n-1}(x) = n f(x) - x f'(x) \quad \text{și} \quad G_{n-1}(x) = n g(x) - x g'(x)$$

în intervalul deschis $(0, \infty)$, respectiv $(-\infty, 0)$.

5. În cele ce urmează vom da o generalizare a teoremei 1, demonstrînd următoarea teoremă :

TEOREMA 2. *În ipotezele teoremei 1, oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, n-1$ rezultă:*

1°. *Funcția $F_k(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x), f(x)]$, are în intervalul (a, b), $n-k-1$ rădăcini distincte. Toate aceste rădăcini sînt simple și reprezintă puncte de extremum ale funcției*

$$\frac{F_{k-1}(x)}{W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)]} = \frac{W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x), f(x)]}{W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)]}$$

O afirmație analoagă are loc și pentru funcția

$$G_k(x) = W[h_1(x), hx_2(x) \ldots, h_k(x), f(x)].$$

2°. *Dacă rădăcinile funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$ se separă în intervalul (a, b), atunci și rădăcinile funcțiilor $F_k(x)$ și $G_k(x)$ se separă în (a, b).*

Demonstrația acestei teoreme se face prin metoda inducției relativ la numărul natural k, care intervine în enunțul ei. Pentru $k = 1$, teorema 2 este adevărată în baza afirmației teoremei 1, demonstrată anterior. Să presupunem că afirmația teoremei 2 este adevărată pentru numărul $k-1$ și să demonstrăm că ea este adevărată pentru numărul următor k.

Vom presupune deci că în afară de ipotezele teoremei 1, sînt satisfăcute următoarele ipoteze :

I. Funcția $F_{k-1}(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x), f(x)]$, are in intervalul (a, b), $n-k$ rădăcini distincte. Toate aceste rădăcini sînt simple și reprezintă puncte de extremum ale funcției

$$\frac{F_{k-1}(x)}{W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x)]} = \frac{W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x), f(x)]}{W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)]}.$$

O ipoteză similară o facem referitor la funcția

$$G_{k-1}(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x), g(x)].$$

II. Rădăcinile funcțiilor $F_{k-1}(x)$ și $G_{k-1}(x)$ se separă în intervalul (a, b).

Vom arăta că în aceste ipoteze au loc afirmațiile teoremei 1. În acest scop, să considerăm funcțiile

$$\begin{aligned} H_1(x) &= W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x), h_k(x)], \\ H_2(x) &= W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x), h_{k+1}(x)], \qquad (31) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_{n-k+1}(x) &= W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x), h_n(x)]. \end{aligned}$$

Aici $h_1(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ reprezintă integrale ale ecuației (1), satisfăcînd relațiile (3), iar $h_n(x)$ este o integrală, formînd un sistem fundamental cu celelalte $n-1$ integrale considerate anterior.

În baza lemei stabilite anterior, aceste funcții satisfac în intervalul (a, b) relațiile

$$H_1(x) \neq 0,\ W[H_1(x), H_2(x)] \neq 0, \ldots, W[H_1(x), H_2(x), \ldots, H_{n-k+1}(x)] \neq 0. \quad (32)$$

Ultima dintre aceste relații ne arată că funcțiile (31) formează un sistem fundamental al unei ecuații diferențiale liniare și omogene de ordinul $n-k-1$ de tip normal. Celelalte relații din (32) exprimă, conform teoremei (****), faptul că mulțimea $\mathcal{Y}_{n-k+1}$ formată din toate combinațiile liniare ale funcțiilor (31), are proprietatea $I^*_{n-k+1}(a, b)$. Întrucît prin ipoteză funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ reprezintă integrale ale ecuației (1), rezultă în dată că funcțiile $F_{k-1}(x)$ și $G_{k-1}(x)$ considerate anterior, aparțin mulțimii $\mathcal{Y}_{n-k-1}$. Astfel, condițiile teoremei 1 sînt îndeplinite dacă se consideră în locul numărului n, numărul $n-k+1$, apoi în locul funcțiilor $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ care verifică relațiile (3), funcțiile $H_1(x), H_2(x), \ldots, H_{n-k}(x)$ din (31), și în sfîrșit în locul funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$, funcțiile $F_{k-1}(x)$ respectiv $G_{k-1}(x)$.

Aplicînd teorema 1, presupusă adevărată pentru $k = 1$, se obține că :

1°. Funcția $\mathcal{F}_k(x) = W[H_1(x), F_{k-1}(x)]$ are în intervalul (a, b), $n-k-1$ rădăcini distincte. Toate aceste rădăcini sînt simple și reprezintă puncte de extremum ale funcției

$$\frac{F_{k-1}(x)}{H_1(x)} = \frac{F_{k-1}(x)}{W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)]}.$$

O afirmație analoagă are loc și pentru funcția $\mathcal{G}_k(x) = W[H_1(x), G_{k-1}(x)]$.

2°. Întrucît prin ipoteză, rădăcinile funcțiilor $F_{k-1}(x)$ și $G_{k-1}(x)$ se separă în (a, b), rezultă că și rădăcinile funcțiilor $\mathcal{F}_k(x)$ și $\mathcal{G}_k(x)$ se separă în (a, b).

Se observă însă că are loc identitatea

$$\mathcal{F}_k(x) \equiv W[H_1(x), F_{k-1}(x)] \equiv W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x)] \times \\ \times W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), f(x)],$$

care rezultă din (15) dacă se ia în locul numărului m, numărul $k+1$, iar în locul numărului k, numărul $k-1$.

La fel, are loc identitatea

$$\mathcal{G}_k(x) \equiv W[H_1(x), G_{k-1}(x)] \equiv W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x)] \times \\ \times W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), g(x)].$$

Ținînd seamă de expresiile funcțiilor $F_k(x)$ și $G_k(x)$, rezultă identitățile

$$\mathcal{F}_k(x) \equiv W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x)] F_k(x),$$
$$\mathcal{G}_k(x) \equiv W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x)] G_k(x).$$

Ținînd seamă de aceste identități, precum și de faptul că în baza relațiilor (3), $W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x)] \neq 0$ în (a, b), rezultă din cele de mai sus valabilitatea teoremei 1 și pentru numărul natural k.

Astfel teorema 2 este demonstrată.

6. În cele ce urmează vom presupune că operatorul diferențial $L_n[y]$ care intervine în membrul stîng al ecuației (1) are coeficienți continui în (a, b) și admite o descompunere în factori de forma

$$L_n[y] \equiv L_{n-k}\{L_k[y]\}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \qquad (33)$$

unde $L_k[y]$ și $L_{n-k}[Y]$ sînt operatori diferențiali liniari și omogeni de forma normală, primul fiind de ordinul k și avînd coeficienții din clasa $C^{n-k}(a, b)$, iar al doilea de ordinul $n-k$, avînd coeficienții continui în (a, b).

Condiția necesară și suficientă ca operatorul $L_n[y]$ să admită o descompunere de forma (33) a fost dată de G. M a m m a n a în lucrarea [5], iar expresia efectivă a acestor operatori-factori, în cazul cînd este posibilă o descompunere de forma (33), a fost stabilită de L. A r a m ă în lucrarea [1].

În cele ce urmează ne vom servi de următoarea definiție :

Definiția 3. Se spune că un operator diferențial $L_p[y]$, liniar și omogen, de ordinul p, avînd coeficienții continui într-un interval $\mathcal{J}$ are proprietatea $I_p(\mathcal{J})$, respectiv $I^*_p(\mathcal{J})$, dacă mulțimea integralelor ecuației diferențiale corespunzătoare $L_p[y] = 0$ are proprietatea $I_p(\mathcal{J})$ respectiv $I^*_p(\mathcal{J})$.

Folosind această definiție, putem enunța următoarea teoremă :

Teorema 3. *În ipoteza că operatorii diferențiali* L_k *respectiv* L_{n-k} *care intervin în* (33) *au proprietățile* $I_k(a, b)$ *respectiv* $I_{n-k}(a, b)$, *fie* $f(x)$ *și* $g(x)$ *două integrale neidentic nule ale ecuației* $L_n[y] = 0$, *avînd fiecare cîte* $n-1$ *rădăcini distincte în intervalul* (a, b). *Atunci*

1°. *Funcțiile $L_k[f]$ și $L_k[g]$ au în intervalul (a, b) cîte $n-k-1$ rădăcini distincte, ele fiind toate de ordinul întîi.*

2°. *Dacă rădăcinile funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$ se separă în intervalul (a, b), atunci rădăcinile funcțiilor $L_k[f]$ și $L_k[g]$ se separă în intervalul (a, b).*

Demonstrație. Fie α un număr astfel ales încît $a < \alpha < \min\limits_{i,j} \{r_i, s_j\}$, unde prin r_i respectiv s_j s-au notat rădăcinile din intervalul (a, b) ale integralei $f(x)$, respectiv $g(x)$.

Considerăm ecuația diferențială $L_k[y] = 0$. Fie $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)$ un sistem de integrale ale ei, satisfăcînd în punctul $x = \alpha$ următoarele condiții ale lui Cauchy:

$$
\begin{aligned}
&h_1(\alpha) = h_1'(\alpha) = \ldots\ldots, = h_1^{(k-2)}(\alpha) = 0,\ h_1^{(k-1)}(\alpha) = 1,\\
&h_2(\alpha) = h_2'(\alpha) = \ldots = h_2^{(k-3)}(\alpha) = 0,\ h_1^{(k-2)}(\alpha) = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&h_{k-1}(\alpha) = 0,\ h_{k-1}'(\alpha) = 1,\\
&h_k(\alpha) = 1.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Întrucît prin ipoteză operatorul $L_k[y]$ are proprietatea $I_k(a, b)$, deci și proprietatea $I_k(\alpha, b)$, rezultă în baza teoremei (***), următoarele relații în intervalul (α, b):

$$
h_1(x) \neq 0,\ W[h_1(x), h_2(x)] \neq 0,\ \ldots, W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)] \neq 0. \tag{35}
$$

Fie în continuare $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-k}(x)$ un sistem de integrale ale ecuației $L_{n-k}[Y] = 0$, satisfăcînd condițiile:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(\alpha) = \varphi_1'(\alpha) = \ldots\ldots = \varphi_1^{(n-k-2)}(\alpha) = 0,\ \varphi_1^{(n-k-1)}(\alpha) = 1,\\
&\varphi_2(\alpha) = \varphi_2'(\alpha) = \ldots = \varphi_2^{(n-k-3)}(\alpha) = 0,\ \varphi^{(n-k-2)}(\alpha) = 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{n-k-1}(\alpha) = 0,\ \varphi_{n-k-1}'(\alpha) = 1,\\
&\varphi_{n-k}(\alpha) = 1.
\end{aligned}
$$

Întrucît operatorul $L_{n-k}[Y]$ are proprietatea $I_{n-k}(\alpha, b)$, rezultă în baza teoremei (***) că au loc în intervalul (α, b) relațiile

$$
\varphi_1(x) \neq 0,\ W[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \neq 0,\ \ldots,\ W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-k}(x)] \neq 0. \tag{36}
$$

Considerăm ecuațiile diferențiale

$$
W(h_1, h_2, \ldots, h_k, y) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k). \tag{37}
$$

Notăm cu $h_{k+i}(x)$ o integrală oarecare a ecuației de rang i din (37). Evident că și funcțiile $h_{k+i}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k)$ sînt integrale ale ecuației $L_n[y] = L_{n-k}\{L_k[y]\} = 0$.

Vom demonstra că funcțiile $h_{k+i}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k)$ satisfac în intervalul (α, b) următoarele relații, care completează relațiile (35):

$$
\begin{aligned}
&W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+1}(x)] \neq 0, \ldots\ldots\\
&\ldots, W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+1}(x), \ldots, h_n(x)] \neq 0.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

În adevăr, înlocuind în identitatea (15) pe m cu numărul $k+i$, obținem identitatea

$$
W(H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, \ldots, H_i^{(k)}) \equiv W_{i-1}(h_1, h_2, \ldots, h_k)\, W(h_1, h_2, \ldots, h_{k+i}), \tag{39}
$$

unde s-a notat

$$
H_i^{(k)}(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+i}(x)].
$$

Dar prin definiție avem

$$
W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+i}(x)] \equiv \varphi_i(x).
$$

Astfel, relația (39) se transcrie

$$
W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i) = W^{i-1}(h_1, h_2, \ldots, h_k)\, W(h_1, h_2, \ldots, h_{k+i}).
$$

Din această identitate, ținînd seamă de relațiile (36) precum și de ultima relație din (35), rezultă că

$$
W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k+i}(x)] \neq 0 \quad \text{pentru} \quad x \in (\alpha, b),
$$

oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, n-k$, ceea ce demonstrează relațiile (38).

Relațiile (35) și (38) ne arată că funcțiile $h_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, n)$, care de altfel formează un sistem fundamental, pentru ecuația $L_n[y] = 0$, satisfac în intervalul (α, b) relațiile (3). De aici rezultă în baza teoremei (****) că operatorul diferențial $L_n[y] = L_{n-k}\{L_k[y]\}$ are proprietatea $I_n^*(\alpha, b)$, și cum α este un număr arbitrar din intervalul (a, b), rezultă că operatorul $L_n[y]$ are proprietatea $I_n^*(a, b)$.

În sfîrșit, se observă că are loc în intervalul (α, b) identitatea

$$
L_k[y] \equiv \frac{W(h_1, h_2, \ldots, h_k, y)}{W(h_1, h_2, \ldots, h_k)}. \tag{40}
$$

Aplicînd în cazul ecuației diferențiale considerate $L_n[y] = 0$, teorema 2, și ținînd seamă de relațiile (35), (38) și (40), se obține teorema 3.

Observație. Din demonstrația dată mai sus rezultă și următoarea proprietate:

TEOREMA 4. *Fie $L_p[y]$ și $L_q[Y]$ doi operatori diferențiali liniari și omogeni de formă normală, operatorul L_q avînd coeficienții continui într-un interval (a, b), iar operatorul L_p avînd coeficienții din clasa $C^q(a, b)$. În ipoteza că operatorul $L_p[y]$ are proprietatea $I_p(a, b)$ iar operatorul $L_q[y]$ are proprietatea $I_q(a, b)$, rezultă că operatorul produs $L_{p+q}[y] \equiv L_q\{L_p[y]\}$ are proprietatea $I_{p+q}(a, b)$.*

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ В. А. МАРКОВА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде устанавливается следующая теорема:

При предположении, что дифференциальное уравнение (1), *с непрерывными на интервале* (a, b) *коэффициентами, допускает* $n-1$ *решений* $h_1(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ *удовлетворяющих на открытом интервале* (a, b) *соотношениям* (3), *пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *два нетождественных нулевых решения уравнения* (1), *имеющих, каждое, по* $n-1$ *различных корней на интервале* (a, b). *Тогда, при любом* $k = 1, 2, \ldots, n-1$, *имеют место утверждения:*

1°. *Функции* $F_k(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), f(x)]$ *и* $G_k(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), g(x)]$ *на интервале* (a, b) *имеют по* $n-k-1$ *различных корней и все эти корни простые.*

2°. *Если корни функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *разделяются на интервале* (a, b), *то и корни функций* $F_k(x)$ *и* $G_k(x)$ *разделяются на* (a, b).

В частом случае, когда $L_n = \frac{d^n}{dx^n}$ и когда $k = 1$, вышеизложенная теорема сводится к известной теореме В. А. Маркова [6].

SUR UN THÉORÈME DE W. A. MARKOV

RÉSUMÉ

Dans ce travail on établit le théorème suivant :

Dans l'hypothèse que l'équation différentielle (1) *aux coeficients continus dans un intervalle* $[a, b)$ *admet* $n-1$ *solutions* $h_1(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ *satisfaisant dans l'intervalle ouvert* (a, b) *aux relations* (3), *soient* $f(x)$ *et* $g(x)$ *deux solutions non identiquement nulles de l'équation* (1), *ayant chacune* $n-1$ *racine distinctes dans l'intervalle* (a, b) *Alors, quel que soit* $k = 1, 2, \ldots, n-1$, *les affirmations suivantes ont lieu* :

1°. *Les fonctions* $F_k(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), f(x)]$ et $G_k(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), g(x)]$ *ont chacune, dans l'intervalle* (a, b), $n-k-1$ *racine distinctes, toutes étant simples.*

2°. *Si les racines des fonctions* $f(x)$ *et* $g(x)$ *se séparent dans l'intervalle* (a, b), *alors les racines des fonctions* $F_k(x)$ *et* $G_k(x)$ *se séparent aussi dans* (a, b).

Dans le cas particulier où $L_n = \frac{d^n}{dx^n}$ et quand $k = 1$, le théorème ci-dessus se réduit à un théorème connu de W. A. Markov [6].

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă L., *Asupra unei teoreme a lui G. Mammana.* Analele Universității C. I. Parhon, București (1961).
2. Aramă O., *Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuații diferențiale liniare.* Studii și cercet. de mat. (Cluj), **X**, 207—257 (1959).
3. Константинеску Ф., *Новое доказательство теоремы В. А. Маркова при помощи теоремы Штурма.* Успехи Мат. Наук, **XII**, *6* (*78*), 147—148 (1957).
4. Constantinescu F., *Sur un théorème de W. A. Markov.* Mathematica, **2**(**25**), 211—216 (1960).
5. Mammana G., *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotto di fattori e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali liniari.* Math. Zeitschr., **33**, 186—231 (1931).
6. Markov W. A., *Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen.* Mathematische Annalen, **77**, 213—258 (1916).
7. Moldovan E., *Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime de funcții interpolatoare.* Studii și cercet. de mat. (Cluj), **IX**, 161—224 (1958).
8. Montel P., *Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés.* Mathematica, **5**, 110—129 (1931).
9. Pólya G., *On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation.* Amer. Math. S. Bull., **24**, 312—324 (1922).
10. Popoviciu T., *Sur un théorème de W. A. Markov.* Mathematica, **2**(**25**), 299—321 (1960).
11. Rusu I., *Asupra teoremei lui W. A. Markov.* Buletinul cercurilor științifice studențești, Universitatea ,,Babeș-Bolyai'' Cluj, 1955—1956, p. 3—6.

Primit la 19. VI. 1961.