ASUPRA METODEI GENERALIZATE A LUI CEBÎȘEV (I)

DE

BELA JANKÓ

(Cluj)

Fie dată ecuația funcțională $F(x) = 0$, unde $F(x)$ este o funcțională neliniară definită într-un domeniu S complet și convex din spațiul lui Banach X. Pe lîngă acestea mai presupunem că $F(x)$ este continuă și admite derivate de tip Fréchet pînă la ordinul 3.

Considerăm metoda de iterație

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\,y_n}\,y_n - \frac{1}{2}\,\frac{F''(x_n)y_n^2}{(F'(x_n)\,y_n)^3}\,F^2(x_n)y_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

unde $F'(x_n)$ respectiv $F''(x_n)$ reprezintă derivatele de tip Fréchet de ordinul 1 și 2, calculate pentru elementul $x_n \in S \subset X$. În continuare se presupune că funcționala $F(x)$ este de așa natură încît elementele $y_n \in X$ pot fi alese astfel ca să avem satisfăcută condiția lui M. Altman [1].

$$|F'(x_n)\,y_n| = \|F'(x_n)\|, \quad \|y_n\| = 1 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{A}$$

Elementul $x_0 \in S \subset X$ este aproximația inițială, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in X$ sînt aproximațiile calculate succesiv prin procedeul (1).

În cele ce urmează vom elabora o teoremă referitoare la existența soluției $F(x) = 0$, precum și pentru convergența metodei date prin formula (1).

Înainte de a enunța această teoremă vom stabili două delimitări necesare la demonstrația teoremei. Pentru aceasta, introducem notațiile $\delta_n = x_{n+1} - x_n$, apoi $F_n = F(x_n)$, $F' = F'(x_n)$ și $F'' = F''(x_n)$. În consecință formula (1) poate fi scrisă sub o altă formă aplicînd totodată la ambii membri ai egalității funcționala liniară F'_n. Astfel

$$F_n + F'_n\delta_n + \frac{1}{2}\,F''_n\,\Delta_n^2 = 0, \tag{2}$$

unde punem

$$\Delta_n = -\frac{F_n}{F'_n\,y_n}\,y_n. \tag{3}$$

Se observă că şi relaţiei (3) îi putem da o altă formă, aplicînd la ambii membri de asemenea funcţionala F'_n, prin urmare

$$F_n + F'_n \Delta_n = 0. \tag{3'}$$

Considerăm acum formula generalizată a lui Taylor pentru funcţionala $F(x)$, astfel

$$\left| F_{n+1} - F_n - F'_n \delta_n - \frac{1}{2} F''_n \delta_n^2 \right| \leqslant \frac{1}{6} K \| \delta \|^3, \tag{4}$$

unde $\|F'''(x)\| \leqslant K$ pentru orice $x \in S$. Din formulele (4) şi (2) rezultă

$$\left| F_{n+1} - \frac{1}{2} F''_n \delta_n(\delta_n - \Delta_n) - \frac{1}{2} F''_n (\delta_n - \Delta_n)\Delta_n \right| \leqslant \frac{1}{6} K \| \delta_n\|^3$$

şi de aici

$$|F_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2} M(\|\delta_n\| + \|\Delta_n\|)\|\delta_n - \Delta_n\| + \frac{1}{6} K \|\delta_n\|^3, \tag{5}$$

unde avem $\|F''(x)\| \leqslant M$, pentru orice $x \in S$. În cele ce urmează ne vom folosi de notaţia

$$\frac{|F_n|}{\|F'_n\|} = \eta_n < +\infty,$$

apoi

$$\frac{1}{\|F'_n\|} \leqslant B_n$$

(unde B_n poate să tindă către infinit pentru $n \to \infty$). Astfel din (3), (1) şi (A) se obţine

$$\|\delta_n - \Delta_n\| \leqslant \frac{1}{2} M B_n \|\Delta_n\|^2 = \frac{1}{2} M B_n \eta_n^2 \tag{6}$$

şi

$$\|\delta_n\| \leqslant (1 + M B_n \eta_n)\eta_n. \tag{I}$$

Apoi din (5), (I) şi (6) găsim o altă delimitare

$$|F_{n+1}| \leqslant \frac{M}{2}\left(1 + \frac{h_n}{4}\right) h_n \eta_n^2 + \frac{1}{6} K\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^3 \eta_n^3, \tag{II}$$

unde s-a notat

$$h_n = M B_n \eta_n .$$

TEOREMĂ. *Presupunem că pentru aproximaţia iniţială x_0 sînt îndeplinite următoarele condiţii:*

1°. *Pentru derivata Fréchet $F'(x_0)$ există delimitarea*

$$\frac{1}{\|F'_0\|} \leqslant B_0 < +\infty$$

şi pe lîngă aceasta mai este satisfăcută condiţia (A);

2°. *Are loc inegalitatea*

$$\frac{|F_0|}{\|F'_0\|} = \eta_0 < +\infty;$$

3°. *Există derivatele de tip Fréchet pînă la ordinul 3 şi au loc delimitările*

$$\|F''(x)\| \leqslant M, \quad \|F'''(x)\| \leqslant K$$

pentru orice $x \in S$, unde $S = S(x_0, r)$, $S_0(x, r)$, fiind o sferă în spaţiul lui Banach X de rază $r = \frac{\eta_0}{h_0}$ şi cu centrul în x_0, care este definită de inegalitatea $\|x - x_0\| \leqslant r$;

4°. $0 < h_0 = B_0 M \eta_0 \leqslant \frac{1}{2}$;

5°. $$\frac{3\left(1 + \frac{h_0}{4}\right) + \frac{K}{M^2 B_0}\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3}{\left[1 - h_0\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)\right]^2} \leqslant 24.$$

In aceste condiţii, pentru ecuaţia funcţională $F(x) = 0$ există în sfera $S(x_0, r)$ o soluţie x^* la care tind aproximaţiile x_n. Rapiditatea convergenţei este caracterizată prin delimitarea

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{h_0} H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0,$$

unde s-a notat

$$H_0 = 1 - h_0\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)$$

şi

$$E_0 = \frac{\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{h_0}{4}\right) + \frac{K}{6 M^2 B_0}\left(1 + \frac{h_0}{2}^3\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{1 - h_0\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)}.$$

Demonstraţie. Folosindu-ne de inegalitatea din [1]

$$\|F'_{n+1}\| \leqslant \|F'_n\| \left(1 - \frac{\|F'_n - F'_{n+1}\|}{\|F'_n\|}\right)$$

şi de formula generalizată a lui Lagrange pentru $F'(x)$,

$$\|F'_n - F'_{n+1}\| \leqslant M \|\delta_n\|,$$

se obţine

$$\|F'_{n+1}\| \geqslant \|F'_n\|(1 - B_n M \|\delta_n\|),$$

de unde

$$\frac{1}{\| F'_{n+1} \|} \leqslant \frac{B_n}{1 - B_n M \|\delta_n\|} \leqslant \frac{B_n}{1 - h_n\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)} = B_{n+1}. \tag{7}$$

Se observă imediat că $B_{n+1} > B_n$. Din relațiile (II) și (7) se stabilește ușor inegalitatea

$$\eta_{n+1} = \frac{|F_{n+1}|}{\| F'_{n+1} \|} \leqslant \frac{h_n^2}{1 - h_n\left(1 + \frac{h_n}{h}\right)} \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{h_n}{4}\right) + \frac{K}{6M^2 B_n}\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^2\right] \eta_n. \tag{8}$$

În continuare vom presupune că

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{h_n}{4}\right) + \frac{K}{6M^2 B_n}\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^3}{\left[1 - h_n\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)\right]^2} \leqslant E_0^2 . \tag{9}$$

Vom arăta însă imediat că această inegalitate este satisfăcută pentru orice n.

Ținînd seamă de (9), relația (8) poate fi scrisă mai simplu, sub forma

$$\eta_{n+1} \leqslant H_n E_0^2 h_n^2 \eta_n, \tag{8'}$$

de unde rezultă formula de recurență

$$h_{n+1} = B_{n+1} \eta_{n+1} M \leqslant \frac{1}{E_0} (E_0 h_n)^3,$$

sau

$$h_n \leqslant \frac{1}{E_0} (E_0 h_0)^{3^n}. \tag{10}$$

Inegalitatea (9) este satisfăcută pentru $n = 0$. Dacă ținem seamă de faptul că $E_0 \leqslant 2$, atunci prin inducție completă se arată ușor că $h_{n+1} \leqslant h_n$. Apoi dacă ne mai folosim și de faptul că M și K sînt numere finite precum și de inegalitatea $B_n \leqslant B_{n+1}$, atunci se obține imediat că $E_{n+1} \leqslant E_n$.[1)]

Din (8) și (10) rezultă

$$\eta_{n+1} \leqslant H_0 (E_0 h_0)^{2 \cdot 3^n} \eta_n,$$

de unde

$$\eta_n \leqslant H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0.$$

Înlocuind aceasta în (I) avem

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0.$$

1) În ce privește expresia lui E_n, ea este de aceeași structură ca E_0, numai că în loc de h_0 se pune h_n.

Mai departe, pe baza acestei relații obținem

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \frac{1}{h_0} H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0. \tag{11}$$

X fiind un spațiu complet, din această inegalitate rezultă că există limita

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Trecînd la limită în (11) se obține delimitarea

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{h_0} H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0$$

dată în teoremă. Rămîne să mai arătăm că aproximațiile x_n nu ies din sfera $S(x_0, r)$. În adevăr

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|\delta_0\| + \|\delta_1\| + \cdots + \|\delta_{n-1}\| < \frac{\eta_0}{h_0}.$$

Pe lîngă aceasta mai trebuie arătat că limita x^* satisface ecuația $F(x) = 0$. Din inegalitatea (II) rezultă ușor că $|F(x_n)| \to 0$ pentru $n \to \infty$, și fiindcă $x_n \to x^*$ pe baza continuității funcționalei $F(x)$ rezultă că $F(x^*) = 0$.

Observație. Condiții analoage cu 1^0—5^0 au fost date recent de M. Altman; însă expresia din condiția 5^0 diferă puțin de cea dată în lucrarea [2], apoi condiția 4^0 dată de noi este mai puțin restrictivă.

ОБ ОБОБЩЕННОМ МЕТОДЕ ЧЕБЫШЕВА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде даются новые условия для существования одного решения функционального уравнения $F(x) = 0$ и, одновременно, новые условия сходимости для процесса (1).

SUR UNE MÉTHODE GÉNÉRALISÉE DE TCHÉBYCHEFF

RÉSUMÉ

Dans ce travail on donne de nouvelles conditions pour l'existence d'une solution de l'équation fonctionnelle $F(x) = 0$, et en même temps de nouvelles conditions de convergence pour le procédé (1).

BIBLIOGRAFIE

1. M. Altman, *Concerning approximate solutions of non-linear functional equations*. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, 5, 461–465 (1957).
2. — *An interative method of solving functional equations*. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 9, 2, 57–62 (1961).

Primit la 5. I. 1962.