

Se observă că și relației (3) îi putem da o altă formă, aplicând la ambii membri de asemenea funcționala F'_n , prin urmare

$$F_n + F'_n \Delta_n = 0. \quad (3')$$

Considerăm acum formula generalizată a lui Taylor pentru funcționala $F(x)$, astfel

$$\left| F_{n+1} - F_n - F'_n \delta_n - \frac{1}{2} F''_n \delta_n^2 \right| \leq \frac{1}{6} K \|\delta\|^3, \quad (4)$$

unde $\|F''(x)\| \leq K$ pentru orice $x \in S$. Din formulele (4) și (2) rezultă

$$\left| F_{n+1} - \frac{1}{2} F''_n \delta_n (\delta_n - \Delta_n) - \frac{1}{2} F''_n (\delta_n - \Delta_n) \Delta_n \right| \leq \frac{1}{6} K \|\delta_n\|^3$$

și de aici

$$|F_{n+1}| \leq \frac{1}{2} M (\|\delta_n\| + \|\Delta_n\|) \|\delta_n - \Delta_n\| + \frac{1}{6} K \|\delta_n\|^3, \quad (5)$$

unde avem $\|F''(x)\| \leq M$, pentru orice $x \in S$. În cele ce urmează ne vom folosi de notația

$$\frac{|F_n|}{\|F'_n\|} = \eta_n < +\infty,$$

apoi

$$\frac{1}{\|F'_n\|} \leq B_n$$

(unde B_n poate să tindă către infinit pentru $n \rightarrow \infty$). Astfel din (3), (1) și (A) se obține

$$\|\delta_n - \Delta_n\| \leq \frac{1}{2} M B_n \|\Delta_n\|^2 = \frac{1}{2} M B_n \eta_n^2 \quad (6)$$

și

$$\|\delta_n\| \leq (1 + M B_n \eta_n) \eta_n. \quad (I)$$

Apoi din (5), (I) și (6) găsim o altă delimitare

$$|F_{n+1}| \leq \frac{M}{2} \left(1 + \frac{h_n}{4}\right) h_n \eta_n^2 + \frac{1}{6} K \left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^3 \eta_n^3, \quad (II)$$

unde s-a notat

$$h_n = M B_n \eta_n.$$

TEOREMĂ. Presupunem că pentru aproximația inițială x_0 sînt îndeplinite următoarele condiții:

1°. Pentru derivata Fréchet $F'(x_0)$ există delimitarea

$$\frac{1}{\|F'_0\|} \leq B_0 < +\infty$$

și pe lângă aceasta mai este satisfăcută condiția (A);
2°. Are loc inegalitatea

$$\frac{|F_0|}{\|F'_0\|} = \eta_0 < +\infty;$$

3°. Există derivatele de tip Fréchet pînă la ordinul 3 și au loc delimitările

$$\|F''(x)\| \leq M, \quad \|F'''(x)\| \leq K$$

pentru orice $x \in S$, unde $S = S(x_0, r)$, $S_0(x, r)$, fiind o sferă în spațiul lui Banach X de rază $r = \frac{\eta_0}{h_0}$ și cu centrul în x_0 , care este definită de inegalitatea

$$\|x - x_0\| \leq r;$$

$$4°. 0 < h_0 = B_0 M \eta_0 \leq \frac{1}{2};$$

$$5°. \frac{3\left(1 + \frac{h_0}{4}\right) + \frac{K}{M^2 B_0} \left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3}{\left[1 - h_0 \left(1 + \frac{h_0}{2}\right)\right]^2} \leq 24.$$

În aceste condiții, pentru ecuația funcțională $F(x) = 0$ există în sfera $S(x_0, r)$ o soluție x^* la care tind aproximațiile x_n . Rapiditatea convergenței este caracterizată prin delimitarea

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{h_0} H_0^n (E_0 h_0)^{3^{n-1}} \eta_0,$$

unde s-a notat

$$H_0 = 1 - h_0 \left(1 + \frac{h_0}{2}\right)$$

și

$$E_0 = \frac{\left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_0}{4}\right) + \frac{K}{6M^2 B_0} \left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}}{1 - h_0 \left(1 + \frac{h_0}{2}\right)}$$

Demonstrație. Folosindu-ne de inegalitatea din [1]

$$\|F'_{n+1}\| \leq \|F'_n\| \left(1 - \frac{\|F'_n - F'_{n+1}\|}{\|F'_n\|}\right)$$

și de formula generalizată a lui Lagrange pentru $F'(x)$,

$$\|F'_n - F'_{n+1}\| \leq M \|\delta_n\|,$$

se obține

$$\|F'_{n+1}\| \geq \|F'_n\| (1 - B_n M \|\delta_n\|),$$

de unde

$$\frac{1}{\|F'_{n+1}\|} \leq \frac{B_n}{1 - B_n M \|\delta_n\|} \leq \frac{B_n}{1 - h_n \left(1 + \frac{h_n}{2}\right)} = B_{n+1}. \quad (7)$$

Se observă imediat că $B_{n+1} > B_n$. Din relațiile (II) și (7) se stabilește ușor inegalitatea

$$\eta_{n+1} = \frac{|F_{n+1}|}{\|F'_{n+1}\|} \leq \frac{h_n^2}{1 - h_n \left(1 + \frac{h_n}{h}\right)} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_n}{4}\right) + \frac{K}{6M^2 B_n} \left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^2 \right] \eta_n. \quad (8)$$

În continuare vom presupune că

$$\frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_n}{4}\right) + \frac{K}{6M^2 B_n} \left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^2}{\left[1 - h_n \left(1 + \frac{h_n}{2}\right)\right]^2} \leq E_0^2. \quad (9)$$

Vom arăta însă imediat că această inegalitate este satisfăcută pentru orice n .

Ținând seamă de (9), relația (8) poate fi scrisă mai simplu, sub forma

$$\eta_{n+1} \leq H_n E_0^2 h_n^2 \eta_n, \quad (8')$$

de unde rezultă formula de recurență

$$h_{n+1} = B_{n+1} \eta_{n+1} M \leq \frac{1}{E_0} (E_0 h_n)^3,$$

sau

$$h_n \leq \frac{1}{E_0} (E_0 h_0)^{3^n}. \quad (10)$$

Inegalitatea (9) este satisfăcută pentru $n = 0$. Dacă ținem seamă de faptul că $E_0 \leq 2$, atunci prin inducție completă se arată ușor că $h_{n+1} \leq h_n$. Apoi dacă ne mai folosim și de faptul că M și K sînt numere finite precum și de inegalitatea $B_n \leq B_{n+1}$, atunci se obține imediat că $E_{n+1} \leq E_n$.¹⁾

Din (8) și (10) rezultă

$$\eta_{n+1} \leq H_0 (E_0 h_0)^{2 \cdot 3^n} \eta_n,$$

de unde

$$\eta_n \leq H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0.$$

Înlocuind aceasta în (I) avem

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0.$$

¹⁾ În ce privește expresia lui E_n , ea este de aceeași structură ca E_0 , numai că în loc de h_0 se pune h_n .

Mai departe, pe baza acestei relații obținem

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \frac{1}{h_0} H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0. \quad (11)$$

X fiind un spațiu complet, din această inegalitate rezultă că există limita

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Trecînd la limită în (11) se obține delimitarea

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{h_0} H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0$$

dată în teoremă. Rămîne să mai arătăm că aproximațiile x_n nu ies din sfera $S(x_0, r)$. În adevăr

$$\|x_0 - x_n\| \leq \|\delta_0\| + \|\delta_1\| + \dots + \|\delta_{n-1}\| < \frac{\eta_0}{h_0}.$$

Pe lîngă aceasta mai trebuie arătat că limita x^* satisface ecuația $F(x) = 0$. Din inegalitatea (II) rezultă ușor că $|F(x_n)| \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$, și fiindcă $x_n \rightarrow x^*$ pe baza continuității funcționalei $F(x)$ rezultă că $F(x^*) = 0$.

Observație. Condiții analoge cu 1^o–5^o au fost date recent de M. Altman; însă expresia din condiția 5^o diferă puțin de cea dată în lucrarea [2], apoi condiția 4^o dată de noi este mai puțin restrictivă.

ОБ ОБОБЩЕННОМ МЕТОДЕ ЧЕБЫШЕВА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде даются новые условия для существования одного решения функционального уравнения $F(x) = 0$ и, одновременно, новые условия сходимости для процесса (1).

SUR UNE MÉTHODE GÉNÉRALISÉE DE TCHÉBYCHEFF

RÉSUMÉ

Dans ce travail on donne de nouvelles conditions pour l'existence d'une solution de l'équation fonctionnelle $F(x) = 0$, et en même temps de nouvelles conditions de convergence pour le procédé (1).

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Altman, Concerning approximate solutions of non-linear functional equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, 5, 461–465 (1957).
2. — An iterative method of solving functional equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 9, 2, 57–62 (1961).

Primit la 5. I. 1962.