DESPRE RAZA DE STELARITATE ŞI RAZA DE CONVEXITATE A FUNCŢIILOR OLOMORFE*)

DE

PETRU T. MOCANU

(Cluj)

1. Fie $F(z)$ o funcţie olomorfă în discul $|z| < R$ şi să presupunem că $\mathcal{R}[F(0)] > 0$. (Notăm cu $\mathcal{R}(\alpha)$ şi $\mathcal{J}(\alpha)$ partea reală, respectiv partea imaginară a numărului complex α.) Din cauza olomorfiei funcţiei $F(z)$, va exista un disc $|z| < \delta$ în care

$$\mathcal{R}[F(z)] > 0. \tag{1}$$

Presupunînd că această inegalitate nu este verificată în întreg discul $|z| < R$, ne punem problema de a determina discul maxim $|z| < r < R$ în care inegalitatea (1) are loc. Pentru aceasta să considerăm curba

$$\mathcal{R}[F(z)] = 0$$

sau, altfel scrisă,

$$F(z) + \bar{F}(z) = 0. \tag{2}$$

Această curbă, evident, nu trece prin origine. Problema pusă revine la a determina minimul distanţei de la origine, $z = 0$, pînă la această curbă. Va trebui deci să determinăm minimul expresiei $z\bar{z}$, ştiind că între z şi $\bar{z}$ există relaţia (2).

Să considerăm funcţia

$$\Phi(z, \bar{z}) = z\bar{z} + \lambda[F + \bar{F}].$$

Eliminînd pe λ între ecuaţiile

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{şi} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}} = 0$$

se obţine că z şi $\bar{z}$ trebuie să mai verifice condiţia

$$\mathcal{J}(zF') = 0.$$

---

*) Această lucrare apare şi în limba franceză în revista ,,Mathematica'', vol 4 (27), 1962.

Deoarece $\mathcal{R}(F) = 0$, rezultă că această condiţie mai poate fi scrisă şi sub forma

$$\mathcal{R}\left(\frac{zF'}{F}\right) = 0.$$

Am obţinut deci următorul rezultat :

Raza maximă r a discului $|z| > r$ în care $\mathcal{R}[F(z)] > 0$ este dată de minimul expresiei $\sqrt{z\bar{z}}$, unde z şi $\bar{z}$ sînt soluţiile sistemului

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{R}[F(z)] &= 0 \\ \mathcal{I}[zF'(z)] &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

sau ale sistemului echivalent

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{R}[F(z)] &= 0 \\ \mathcal{R}\left[\frac{zF'(z)}{F(z)}\right] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

2. Ca o primă aplicaţie, să considerăm o funcţie $f(z)$ olomorfă într-un disc $|z| > R$ şi $f(0) = 0$. Să punem

$$F(z) = \frac{z\,f'(z)}{f(z)}.$$

Atunci

$$\frac{zF'}{F} = \frac{z\,f''}{f'} + 1 - \frac{zf'}{f}.$$

Se ştie că pentru ca $f(z)$ să transforme discul $|z| < r$ $(r \leq R)$ într-un domeniu stelat în raport cu originea, este necesar şi suficient ca

$$\mathcal{R}\left(\frac{z\,f'}{f}\right) > 0, \text{ pentru } |z| > r.$$

În acest caz, funcţia se va numi *stelată* în discul $|z| < r$. Numim *rază de stelaritate* a funcţiei $f(z)$ raza discului maxim cu centrul în origine, în care $f(z)$ este stelată. Dacă $f(z)$ nu este stelată în discul $|z| < R$, atunci aplicînd rezultatul anterior deducem imediat că *raza de stelaritate a funcţiei $f(z)$ va fi dată de minimul expresiei $\sqrt{z\bar{z}}$, unde $\bar{z}$ şi z sînt soluţiile sistemului* (vezi [1]) :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{R}\left(\frac{z\,f'}{f}\right) &= 0 \\ \mathcal{R}\left(\frac{z\,f''}{f'}\right) + 1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

3. Fie $f(z)$ şi $g(z)$ două funcţii olomorfe în $|z| < R$ şi $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 1$. Vom spune că funcţia f este g-stelată în discul $|z| < r$ $(r \leqslant R)$ dacă

$$\mathcal{R}\left(\frac{z\,f'}{g}\right) > 0, \text{ pentru } |z| < r.$$

Numim *rază de g-stelaritate* a funcţiei f, raza discului maxim cu centrul în origine în care f este g-stelată.

Luînd

$$F = \frac{z\,f'}{g},$$

atunci

$$\frac{zF'}{F} = \frac{z\,f''}{f'} + 1 - \frac{zg'}{g}.$$

Presupunînd că $f(z)$ nu este g-stelată în discul $|z| < R$, atunci *raza de g-stelaritate a funcţiei $f(z)$ va fi dată de minimul expresiei $\sqrt{z\bar{z}}$, unde z şi $\bar{z}$ sînt soluţiile sistemului* (vezi [2]):

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{R}\left(\frac{z\,f'}{g}\right) &= 0 \\ \mathcal{R}\left(\frac{z\,f''}{f'}\right) + 1 &= \mathcal{R}\left(\frac{zg'}{g}\right) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dacă $g = f$, se obţine sistemul (5).

Dacă $g = z$, atunci se obţine că raza r a discului maxim, $|z| < r$, în care $\mathcal{R}(f') > 0$, este dată de minimul lui $\sqrt{z\bar{z}}$, unde z şi $\bar{z}$ sînt soluţiile sistemului

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{R}(f') &= 0 \\ \mathcal{R}\left(\frac{zf''}{f'}\right) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sau ale sistemului echivalent

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{R}(f') &= 0 \\ \mathcal{I}(zf'') &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Se ştie că în discul $|z| < r$ funcţia $f(z)$ va fi univalentă.

4. Fie $f(z)$ o funcţie olomorfă în $|z| < R$. Se ştie că pentru ca $f(z)$ să transforme discul $|z| < r$ într-un domeniu *convex*, este necesar şi suficient ca

$$\mathcal{R}\left(\frac{z\,f''}{f'}\right) + 1 < 0, \text{ pentru } |z| > r.$$

În acest caz se spune să $f(z)$ este *convexă* în discul $|z| < r$.

Vom numi *rază de convexitate* a funcţiei $f(z)$ raza discului maxim cu centrul în origine în care $f(z)$ este convexă. Să presupunem că $f(z)$ nu este convexă în $|z| < R$. Pentru a găsi raza de convexitate a funcţiei f vom lua

$$F = \frac{z\,f''}{f'} + 1.$$

Atunci

$$zF' = z\left(\frac{zf'''}{f'} + \frac{f''}{f'}\right) - \frac{z^2f''^2}{f'^2}.$$

Deci sistemul (3) devine

$$\mathcal{R}\left(\frac{zf''}{f'}\right) + 1 = 0$$

$$\mathcal{I}\left[z\left(\frac{zf'''}{f'} + \frac{f''}{f'}\right)\right] - \mathcal{I}\left(\frac{z^2f''^2}{f'^2}\right) = 0.$$

Deoarece

$$\mathcal{R}\left(\frac{zf''}{f'}\right) = -1,$$

atunci rezultă

$$\mathcal{I}\left(\frac{z^2f''^2}{f'^2}\right) = -2\,\mathcal{I}\left(\frac{zf''}{f'}\right)$$

şi deci deducem următorul rezultat:

Raza de convexitate a funcţiei $f(z)$ este dată de minimul expresiei $\sqrt{z\bar{z}}$, unde z şi $\bar{z}$ sînt soluţiile sistemului:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{R}\left(\frac{zf''}{f'}\right) + 1 = 0 \\ &\mathcal{I}\left[z\left(\frac{zf'''}{f'} + 3\,\frac{f''}{f'}\right)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

5. Ca o aplicaţie simplă a rezultatului de mai sus, să găsim raza de convexitate a funcţiei

$$f(z) = Az^m + Bz^n, \qquad A \neq 0$$

unde m şi n sînt numere întregi, nenegative $(m < n)$.

Avem

$$\frac{zf''}{f'} + 1 = \frac{m^2A + n^2Bz^{n-m}}{mA + nBz^{n-m}} = h(z)$$

şi

$$\frac{z^2f'''}{f'} + 3\,\frac{zf''}{f'} = \frac{m(m^2-1)A + n(n^2-1)B\,z^{n-m}}{mA + nBz^{n-m}} = (m+n)\,h(z) - (1+mn).$$

Sistemul (7) devine în acest caz

$$\mathcal{R}[h(z)] = 0$$
$$\mathcal{I}[h(z)] = 0,$$

de unde deducem că $h(z) = 0$, sau

$$m^2A + n^2Bz^{n-m} = 0.$$

Deci raza de convexitate a funcţiei $Az^m + Bz^n$ va fi dată de formula

$$r = \sqrt[n-m]{\frac{m^2|A|}{n^2|B|}}.$$

Pentru ca funcţia $Az^m + Bz^n$ să fie convexă în discul unitate, $|z| < 1$ este necesar şi suficient ca $r \geqslant 1$, adică să fie satisfăcută condiţia

$$m^2|A| \geqslant n^2|B|.$$

Deoarece funcţia $Az^m + Bz^n$ este stelată atunci şi numai atunci cînd funcţia $\frac{A}{m}z^m + \frac{B}{n}z^n$ este convexă, rezultă că pentru ca funcţia $Az^m + Bz^n$ să fie stelată în discul unitate este necesar şi suficient să fie satisfăcută condiţia:

$$n|A| \geqslant n|B|.$$

6. Fie $f(z)$ şi $g(z)$ două funcţii olomorfe în $|z| < R$ şi $f'(0) = g'(0) = 1$. Spunem că funcţia $f(z)$ este *g-convexă* în discul $|z| < r$, dacă

$$\mathcal{R}\left(\frac{zf''}{g'}\right) + 1 > 0, \text{ pentru } |z| < r.$$

Numim *rază de g-convexitate* a funcţiei $f(z)$ raza discului maxim cu centrul în origine în care f este g-convexă.

Luînd

$$F = \frac{zf''}{g'} + 1,$$

atunci

$$zF' = z\left(\frac{zf'''}{g'} + \frac{f''}{g'}\right) - \frac{z^2f''g''}{g'^2}.$$

Presupunînd că $f(z)$ nu este g-convexă în discul $|z| < R$, atunci *raza de g-convexitate a funcţiei $f(z)$ va fi dată de minimul lui $\sqrt{z\bar{z}}$, unde z şi $\bar{z}$ sînt soluţiile sistemului*

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{R}\left(\frac{zf''}{g'}\right) + 1 = 0 \\ &\mathcal{I}\left[z\left(\frac{zf'''}{g'} + \frac{f''}{g'}\right)\right] = \mathcal{I}\left(\frac{z^2f''g''}{g'^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

7. Considerăm clasa C a funcţiilor

$$f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$$

care sînt convexe în discul unitate. Se ştie că dacă $f(z) \in C$ atunci

$$|a_n| \leqslant 1, \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Cu ajutorul noţiunii de g-convexitate se poate construi un şir de clase de funcţii olomorfe pentru care inegalităţile (9) sînt verificate. Considerăm anume şirul de clase

$$C \subset C_1 \subset C_2 \ldots \subset C_m \subset \ldots$$

definite prin recurenţă în felul următor : funcţia

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

aparţine clasei C_m dacă există o funcţie $g(z) \in C_{m-1}$ aşa încît $f(z)$ să fie g- convexă în discul unitate. Prin inducţie completă se poate demonstra că inegalităţile (9) sînt satisfăcute pentru orice clasă C . Într-adevăr, fie $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \in C_m$. Atunci există o funcţie $g(z) = z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots \in C_{m-1}$ aşa încît

$$\mathcal{R}\left(\frac{zf''}{g'}\right) + 1 > 0 \qquad \text{pentru } |z| < 1.$$

Presupunem că $|b_n| \leqslant 1$, $n = 2, 3, \ldots$
Se ştie că dacă

$$\mathcal{R}\,[h(z)] > 0 \quad \text{pentru } |z| < 1,$$

unde

$$h(z) = 1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

atunci

$$|c_n| \leqslant 2 \quad \text{pentru } n = 1, 2, \ldots$$

Notînd

$$h(z) = 1 + \frac{zf''}{g'} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

avem relaţia de recurenţă

$$n(n-1)a_n = (n-1)b_{n-1}c_1 + (n-2)b_{n-2}c_2 + \ldots + 2b_2 c_{n-2} + c_{n-1},$$

de unde rezultă

$$n(n-1)|a_n| \leqslant 2(n-1+n-2+\ldots+2+1) = n(n-1),$$

deci

$$|a_n| \leqslant 1.$$

Universitatea ,,Babeş—Bolyai'' Cluj,
Catedra de teoria funcţiilor

О РАДИУСЕ ЗВЕЗДООБРАЗИЯ И О РАДИУСЕ ВЫПУКЛОСТИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть $F(z)$ — голоморфная функция на диске $|z| < R$ и $\mathcal{R}[F(0)] > 0$. Максимальный радиус r диска $|z| < r$, где $\mathcal{R}[F(z)] > 0$ даётся минимумом $\sqrt{z\bar{z}}$, где z и $\bar{z}$ суть решения системы (3) или эквивалентной системы (4).

В качестве применения получается радиус звездообразия [1] и g-звездообразия [2] голоморфных функций на диске $|z| < R$.

В качестве другого применения показывается, что радиус выпуклости $f(z)$, голоморфной в $|z| < R$, даётся в минимумом $\sqrt{z\bar{z}}$, где z и $\bar{z}$ удовлетворяют системе (7). Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две функции, голоморфные в $|z| < r$ и $f'(0) = g'(0) = 1$. Говорим что функция f есть g — выпуклая в $|z| < r$ если $\mathcal{R}\left(\frac{zf''}{g'}\right) + 1 > 0$. Называем радиусом g-выпуклости функции f, радиус максимального диска с центром в начальной точке координат, на котором f является g-выпуклой. Радиус g-выпуклости функции f даётся минимумом $\sqrt{z\bar{z}}$, где z и $\bar{z}$ суть решения системы (8).

Строится потом последовательансть классов $C \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \ldots \subset C_n \subset \ldots$ для которых $|a_n| \leq 1$.

SUR LE RAYON DE STELLARITÉ ET LE RAYON DE CONVEXITÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHES

RÉSUMÉ

Soit $F(z)$ une fonction holomorphe dans le disque $|z| < R$ et $R[F(0)] > 0$. Le rayon maximum r du disque $|z| < r$ où $R[F(z)] < 0$ est donné par le minimum de $\sqrt{z\bar{z}}$ où z et $\bar{z}$ sont des solutions du système (3) ou du système équivalent (4).

En guise d'application, on obtient le rayon de stellarité [1] et de g-stellarité [2] des fonctions holomorphes dans un disque $|z| < R$.

Comme une autre application, on trouve que le rayon de convexité d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans $|z| < R$ est donné par le minimum de $\sqrt{z\bar{z}}$, où z et z vérifient le système (7). Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes dans $|z| < R$ et $f'(0) = g'(0) = 1$. On dit que la fonction f est g-convexe dans $|z| < r$ şi $R\left(\frac{zf''}{g'}\right) + 1 > 0, |z| < r$. Nous appelons rayon

de g-convexité de la fonction f, le rayon du disque maximum avec le centre dans l'origine, où f est g-convexe. Le rayon de g-convexité de la fonction f sera donné par le minimum de $\sqrt{z\bar{z}}$, où z et $\bar{z}$ sont les solutions du système (8).

On construit aussi une suite de classes $C \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n \subset \ldots$ pour lesquelles $|a_n| \leqslant 1$.

BIBLIOGRAFIE

1. P. T. Mocanu, *O problemă variaţională relativă la funcţiile univalente*. Studia Univ. Babeş et Bolyai, **III**, *3*, 119–127 (1958).
2. — *Asupra razei de stelaritate a funcţiilor univalente*. Studii şi cercet. de mat. (Cluj), **XI**, 337–341 (1960).

Primit la 9. I. 1961.