

RESTUL ÎN FORMULELE DE CUADRATURĂ ALE LUI WEDDLE ȘI HARDY*)

DE

FLORICA MUNTEANU

(Cluj)

Scopul acestei lucrări este de a studia restul în formulele de cuadratură ale lui Weddle și Hardy prin încadrarea lor într-o clasă de formule de cuadratură cu gradul de exactitate cinci, pe șapte noduri echidistante și care depind de un parametru.

Pentru construirea acestei clase de formule se utilizează metoda folosită de D. V. Ionescu în lucrarea [2]. Restul formulilor acestei clase pentru funcțiile $f(x) \in C^{(6)}$ se determină sub formă de integrală definită,

$$R = \int_a^b \varphi(x) f^{(6)}(x) dx, \quad (1)$$

unde funcția $\varphi(x)$ depinde de asemenea de parametrul amintit. Se studiază funcția $\varphi(x)$ pe intervalul $[a, b]$ punându-se în evidență valorile parametrului pentru care curba $y = \varphi(x)$ este situată de aceeași parte a axei Ox și valorile parametrului pentru care curba $y = \varphi(x)$ taie axa Ox .

Din formula (1) se deduce următoarea delimitare a restului

$$|R| \leq KM_6,$$

unde $M_6 \geq \sup_{[a,b]} |f(x)|$, iar $K = \int_a^b |\varphi(x)| dx$.

Folosindu-ne de faptul că formulele construite depind de un parametru, vom rezolva următoarele probleme:

- 1^o. Determinarea formulei de cuadratură pentru care K este cel mai mic.
- 2^o. Determinarea formulilor de cuadratură pentru care coeficienții sînt numere raționale scrise în sistemul zecimal cu un număr finit de zecimale.

*) Această lucrare se publică și în limba franceză în revista „Mathematica” vol. 3 (26), 1961.

¹⁾ S-a notat cu C^n clasa funcțiilor continue împreună cu derivatele lor pînă la ordinul n inclusiv, pe $[a, b]$.

Vom arăta că pe această cale vom întâlni formulele clasice ale lui Weddle și Hardy. Se arată de asemenea că dintre formulele ai căror coeficienți au o singură zecimală, formula lui Weddle are coeficientul K cel mai mic.

3^o. *Determinarea formulei de cuadratură cu gradul de exactitate șapte.* În acest caz se regăsește formula lui Cotes pe șapte noduri cu restul sub formă de integrală definită, pentru funcții ce aparțin clasei C^8 . O grupare convenabilă a termenilor formulei construite arată că ea este o combinație liniară a formulei lui Cotes și a diferenței finite de ordinul șase a funcției $f(x)$ pe cele șapte noduri. Această observație permite scrierea restului sub formă de sumă de doi termeni, care se exprimă prin derivatele de ordinul șase și opt, ale funcției $f(x)$ într-un punct din intervalul ce conține nodurile. Pentru formula lui Hardy această ultimă formă a restului, cunoscută [4], a fost întâlnită și de T. P o p o v i c i u ca un caz particular într-un studiu general asupra formulelor de aproximație liniară ale analizei [3].

§ 1. O formulă de cuadratură pe nodurile echidistante x_0, x_1, \dots, x_6 și care depinde de un parametru

1. Fie funcția $f(x)$ de clasa C^6 pe intervalul $[a, b]$. Împărțim intervalul $[a, b]$ în șase părți egale prin punctele $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = b$, și referitor la aceste noduri vom stabili o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \sum_{i=0}^6 A_i f(x_i) + R, \quad (2)$$

ai cărei coeficienți A_1, A_2, \dots, A_6 îi vom determina astfel încât restul R să fie nul când funcția $f(x)$ este înlocuită cu un polinom oarecare de gradul cinci.

Pentru stabilirea formulei (2) vom aplica metoda folosită de D. V. I o n e s c u în lucrarea [2].

Atașăm fiecărui interval $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) câte un polinom $\varphi_i(x)$ de gradul al șaselea astfel ca $\varphi_i(x) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Cu acestea integrala din membrul întâi al formulei (1) se scrie :

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \sum_{i=1}^6 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(6)}(x) f(x) dx.$$

Aplicând fiecărui termen din membrul al doilea formula de integrare prin părți generalizată, obținem :

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \sum_{i=1}^6 \left\{ \left[\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{k+1} \varphi_i^{(k)}(x) f^{(5-k)}(x) \right]_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) f^{(6)}(x) dx \right\} \quad (3)$$

Determinăm funcțiile $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) astfel încât în formula (3) să figureze numai valorile funcției $f(x)$ pe noduri. Pentru aceasta, polinoamele $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) trebuie să satisfacă la condițiile

$$\left. \begin{aligned} (4_1) \quad \varphi_1^{(k)}(x_0) &= 0 \\ (4_2) \quad \varphi_i^{(k)}(x_i) &= \varphi_{i+1}^{(k)}(x_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \\ (4_3) \quad \varphi_6^{(k)}(x_6) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \quad (4)$$

În aceste condiții formula (3) devine :

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = -\varphi_1^{(5)}(x_0) f(x_0) + \sum_{i=1}^5 [\varphi_i^{(5)}(x_i) - \varphi_{i+1}^{(5)}(x_i)] f(x_i) + \varphi_6^{(5)}(x_6) f(x_6) + \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx, \quad (5)$$

unde $\varphi(x)$ coincide cu polinoamele $\varphi_i(x)$ pe intervalele $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, 6$).

Din formula (5) rezultă că coeficienții A_i ($i = 0, 1, \dots, 6$) ai formulei (1) sînt dați de egalitățile :

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\varphi_0^{(5)}(x_0) \\ A_i &= \varphi_i^{(5)}(x_i) - \varphi_{i+1}^{(5)}(x_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \\ A_6 &= \varphi_6^{(5)}(x_6) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

2. Pentru determinarea polinoamelor $\varphi_i(x)$ observăm că ele sînt integralele ecuațiilor diferențiale $\varphi_i^{(6)}(x) = 1$ cu condițiile la limită (4). Observăm că polinoamele

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_0)^6}{6!} + \sum_{k=1}^i \lambda_k \frac{(x-x_{k-1})^5}{5!} \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (7)$$

satisfac la condițiile (4₁) și (4₂). Impunînd polinomului $\varphi_6(x)$ să satisfacă condițiile (4₃), obținem un sistem de cinci ecuații liniare pentru determinarea parametrilor λ_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) și anume

$$\sum_{k=0}^5 (6-k)^i \lambda_{k+1} = -\frac{6^{i+1}}{i+1} h \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (8)$$

Soluția generală a acestui sistem este dată de formulele :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda \\ \lambda_2 &= \lambda_6 = -\frac{33}{10} h - 6\lambda \end{aligned}$$

$$\lambda_3 = \lambda_5 = \frac{21}{5}h + 15\lambda$$

$$\lambda_4 = -\frac{39}{5}h - 20\lambda$$

Se observă că putem determina polinoamele $\varphi_i(x)$ începînd cu $\varphi_6(x)$ în același mod cum am început cu $\varphi_1(x)$. În acest caz vom avea

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_6)^6}{6!} + \sum_{k=0}^{6-i} \mu_{k+1} \frac{(x-x_{6-k})^5}{5!} \quad (i = 6, 5, \dots, 2, 1) \quad (9)$$

unde $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_6$ se determină din sistemul de ecuații:

$$\sum_{k=0}^5 (6-k)^i \mu_{k+1} = \frac{6^{i+1}}{i+1} h \quad (i = 1, 2, \dots, 5). \quad (10)$$

Din compararea sistemelor (6) și (9) rezultă că

$$\mu_i = -\lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (11)$$

Vom scrie expresiile primelor trei polinoame $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ întrebunțînd formulele (7), iar pentru $\varphi_4(x), \varphi_5(x), \varphi_6(x)$ întrebunțăm formulele (9) și ținem seama de relațiile (11)

$$\varphi_1(x, \lambda) = \frac{(x-x_0)^6}{6!} + \lambda \frac{(x-x_0)^5}{5!}$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = \frac{(x-x_0)^6}{6!} + \lambda \frac{(x-x_0)^5}{5!} - \left(\frac{33}{10}h + 6\lambda\right) \frac{(x-x_1)^5}{5!}$$

$$\varphi_3(x, \lambda) = \frac{(x-x_0)^6}{6!} + \lambda \frac{(x-x_0)^5}{5!} - \left(\frac{33}{10}h + 6\lambda\right) \frac{(x-x_1)^5}{5!} + \left(\frac{21}{5}h + 15\lambda\right) \frac{(x-x_2)^5}{5!}$$

$$\varphi_4(x, \lambda) = \frac{(x-x_6)^6}{6!} - \lambda \frac{(x-x_6)^5}{5!} + \left(\frac{33}{10}h + 6\lambda\right) \frac{(x-x_5)^5}{5!} - \left(\frac{21}{5}h + 15\lambda\right) \frac{(x-x_4)^5}{5!} \quad (12)$$

$$\varphi_5(x, \lambda) = \frac{(x-x_6)^6}{6!} - \lambda \frac{(x-x_6)^5}{5!} + \left(\frac{33}{10}h + 6\lambda\right) \frac{(x-x_5)^5}{5!}$$

$$\varphi_6(x, \lambda) = \frac{(x-x_6)^6}{6!} - \lambda \frac{(x-x_6)^5}{5!}$$

Importanța scrierii polinoamelor $\varphi_i(x)$ sub forma (12) constă în faptul că pe aceste formule se vede ușor că graficul funcției $\varphi(x)$ este simetric față de dreapta de ecuație $x = x_3$.

Din formulele (6) și (11) determinăm coeficienții formulei (2)

$$A_0 = A_6 = -\lambda$$

$$A_1 = A_5 = \frac{33}{10}h + 6\lambda$$

$$A_2 = A_4 = -\frac{21}{5}h - 15\lambda$$

$$A_3 = \frac{39}{5}h + 20\lambda$$

Formula (2) devine

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = -\lambda [f(x_0) + f(x_6)] + \left(\frac{33}{10}h + 6\lambda\right) [f(x_1) + f(x_5)] - \left(\frac{21}{5}h + 15\lambda\right) [f(x_2) + f(x_4)] + \left(\frac{39}{5}h + 20\lambda\right) f(x_3) + \int_{x_0}^x \varphi(x) f^{(6)}(x) dx, \quad (I)$$

unde λ este un parametru arbitrar, iar funcția $\varphi(x)$ concide pe intervalele $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) pe rînd cu polinoamele $\varphi_i(x)$ definite de formulele (12). Am obținut astfel formula de cuadratură (I) în care figurează parametru arbitrar λ . Rămîne să explicăm de ce figurează acest parametru și să studiem restul acestei formule.

3. Observăm că în membrul al doilea al formulei (I), coeficientul lui λ este:

$$-f(x_0) + 6f(x_1) - 15f(x_2) + 20f(x_3) - 15f(x_4) + 6f(x_5) - f(x_6),$$

care reprezintă diferența finită de ordinul șase a funcției $f(x)$ pe nodurile x_0, x_1, \dots, x_6 . Se știe că această diferență este nulă cînd $f(x)$ este înlocuită cu un polinom oarecare de gradul al cincilea.

Am putea deci să luăm de-a dreptul $\lambda = 0$ în formula (I), însă preferăm să păstrăm pe λ nedeterminat pentru a obține diferite formule dînd lui λ valori particulare.

Reamintim că D. V. Ionescu a pus diferența divizată a unei funcții $f(x)$ pe nodurile x_0, x_1, \dots, x_n sub formă de integrală defînită:

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(n)}(x) dx$$

în care funcția $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul $[x_0, x_n]$.

Vom folosi mai departe acest rezultat.

§2. Studiul restului în formula de cuadratură (I)

4. Evaluăm restul formulei de cuadratură (I)

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx$$

în modul următor

$$|K| \leq M_6 \int_{x_0}^{x_6} |\varphi(x)| dx,$$

unde

$$M_6 \geq |f^{(6)}(x)| \text{ pentru } x \in [a, b].$$

Un rol important în evaluarea restului îl are integrala

$$K = \int_{x_0}^{x_6} |\varphi(x)| dx,$$

pentru calculul căreia este necesar să cunoaștem semnul funcției $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_6]$.

În virtutea simetriei funcției $\varphi(x)$ față de dreapta $x = x_3$, vom examina semnul acestei funcții numai pe intervalul $[x_0, x_3]$.

5. Vom determina numărul de rădăcini reale ale funcției $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_3]$, în funcție de parametrul λ . În acest scop vom studia pe rând, funcția $\varphi(x)$ pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$.

a) Pe intervalul $[x_0, x_1]$ funcția $\varphi(x)$ este determinată de formula

$$\varphi_1(x, \lambda) = \frac{(x-x_0)^5}{5!} \left(\frac{x-x_0}{6} + \lambda \right),$$

de unde se vede că dacă $-\frac{h}{6} \leq \lambda < 0$, $\varphi(x)$ are o rădăcină în intervalul

$[x_0, x_1]$; dacă $\lambda > 0$, $\varphi(x) > 0$ și dacă $\lambda < -\frac{h}{2}$, $\varphi(x) < 0$.

b) Pe intervalul $[x_1, x_2]$ funcția $\varphi(x)$ coincide cu polinomul definit de formula corespunzătoare din (12).

Pentru determinarea numărului de rădăcini reale ale polinomului $\varphi_2(x, \lambda)$ în intervalul $[x_1, x_2]$, aplicăm teorema lui Budan-Fourier relativă la determinarea numărului rădăcinilor reale ale unui polinom cu ajutorul variațiilor de semn din șirul derivatelor, calculate în capetele intervalului. Bazați pe această tecremă, putem afirma că pe intervalul $[x_1, x_2]$, $\varphi(x)$ se comportă în felul următor:

1°. Dacă $\lambda > -\frac{h}{2}$, atunci $\varphi(x) > 0$.

2°. Dacă $-\frac{17}{60}h \leq \lambda \leq -\frac{h}{6}$, atunci $\varphi(x)$ are o rădăcină reală ξ , și $\varphi(x) < 0$ pentru $x \in [x_1, \xi]$ și $\varphi(x) > 0$ pentru $x \in (\xi, x_2]$.

3°. Dacă $-\frac{13}{40}h \leq \lambda < -\frac{17}{60}h$, sau $\lambda \leq -\frac{23}{50}h$, atunci $\varphi(x) < 0$.

4°. Pentru cazul când $-\frac{23}{50}h < \lambda < -\frac{13}{40}h$, teorema amintită nu rezolvă

problema. Pentru a cerceta semnul polinomului $\varphi_2(x, \lambda)$ în acest caz, observăm că $\varphi_2(x, \lambda)$ depinde liniar de parametrul λ și anume

$$\varphi_2(x, \lambda) = A(x)\lambda + B(x),$$

unde

$$A(x) = \frac{(x-x_0)^5}{5!} - 6 \frac{(x-x_1)^5}{5!} \text{ și } B(x) = \frac{(x-x_0)^6}{6!} - \frac{33}{10}h \frac{(x-x_1)^5}{5!}.$$

Atunci, fixînd o valoare pentru x în intervalul $[x_1, x_2]$, de exemplu \bar{x} , rezultă din cele demonstrate mai sus că $\varphi_2(\bar{x}, \lambda) < 0$ pentru $\lambda < -\frac{23}{59}$ și pentru

$-\frac{13}{40}h \leq \lambda < -\frac{17}{60}h$. Pe baza liniarității lui $\varphi_2(\bar{x}, \lambda)$ în raport cu λ , rezultă că $\varphi_2(\bar{x}, \lambda) < 0$ și pentru $-\frac{23}{50}h < \lambda < -\frac{13}{40}h$, ceea ce este adevărat oricum

am alege \bar{x} în intervalul $[x_1, x_2]$.

c) Pe intervalul $[x_2, x_3]$, $\varphi(x)$ coincide cu polinomul $\varphi_3(x, \lambda)$ definit de formula corespunzătoare din (12). Aplicînd și în acest caz teorema lui Budan-Fourier, putem afirma că pe intervalul acesta avem următoarea situație:

1°. Dacă $\lambda > -\frac{17}{60}h$, atunci $\varphi(x) > 0$

2°. Dacă $-\frac{67}{220}h \leq \lambda \leq -\frac{17}{60}h$, atunci $\varphi(x)$ are o rădăcină reală ξ .

În acest caz $\varphi(x) < 0$ dacă $x \in [x_2, \xi]$ și $\varphi(x) > 0$ dacă $x \in (\xi, x_3]$

3°. Dacă $\lambda \leq -\frac{7}{20}h$, atunci $\varphi(x) < 0$.

Rămîne de cercetat comportarea funcției $\varphi_3(x, \lambda)$ pentru cazul cînd

$$-\frac{7}{20}h < \lambda < -\frac{67}{220}h.$$

4°. În cazul cînd $-\frac{31}{100}h \leq \lambda - \frac{67}{220}h$, observînd mai de aproape semnul derivatelor polinomului $\varphi_3(x, \lambda)$ în intervalul $[x, x_3]$, putem trage concluzia că $\varphi_3(x) < 0$ pe acest interval, după cum se poate vedea din tabelul următor:

Tabelul 1

x	x_2						x_3
$\varphi_3^{VI}(x)$	+	+	+	+	+	+	+
$\varphi_3^V(x)$	-	-	0	+	+	+	+
$\varphi_3^{IV}(x)$	-	-	0	+	+	+	
$\varphi_3'''(x)$	-	-	-	0	+	+	
$\varphi_3''(x)$	+	+	+	+	+	0	-
$\varphi_3'(x)$	+	+	+	+	+	+	0
$\varphi_3(x)$	-	-	-	-	-	-	-

5°. Am demonstrat că $\varphi_3(x, \lambda) < 0$ dacă $\lambda < -\frac{7}{20}$ și dacă $-\frac{31}{100}\lambda \leq \lambda < -\frac{67}{220}h$. Atunci pe baza liniarității lui $\varphi_3(x, \lambda)$ în raport cu λ , rezultă că $\varphi_3(x, \lambda) < 0$ și dacă $-\frac{7}{20}h < \lambda < -\frac{31}{100}h$.

Vom rezuma cele demonstrate referitor la semnul funcției $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_3]$ în următoarea teoremă:

TEOREMA 1.

1°. Dacă $\lambda \geq 0$, atunci $\varphi(x) > 0$ când $x \in (x_0, x_3]$.

2°. Dacă $-\frac{h}{6} \leq \lambda < 0$, atunci $\varphi(x)$ are o rădăcină reală ξ , cuprinsă în intervalul $[x_0, x_1]$, $\varphi(x) < 0$ dacă $x \in (x_0, \xi)$ și $\varphi(x) > 0$ dacă $x \in (\xi, x_3)$.

3°. Dacă $-\frac{17}{60}h \leq \lambda < -\frac{h}{6}$, atunci $\varphi(x)$ are rădăcină reală ξ , cuprinsă în intervalul $[x_1, x_2]$. Avem $\varphi(x) < 0$ dacă $x \in [x_0, \xi)$ și $\varphi(x) > 0$ dacă $x \in (\xi, x_3]$.

4°. Dacă $-\frac{67}{220}h \leq \lambda < -\frac{17}{60}h$, atunci $\varphi(x)$ are o rădăcină reală ξ , cuprinsă în intervalul $[x_2, x_3]$. Avem $\varphi(x) < 0$ dacă $x \in [x_0, \xi)$ și $\varphi(x) > 0$ dacă $x \in (\xi, x_3]$.

5°. Dacă $\lambda < -\frac{67}{220}h$, atunci $\varphi(x) < 0$ când $x \in (x_0, x_3]$.

Vom trasa în tabelul alăturat graficul funcției $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_3]$ în funcție de parametrul λ .

6. Ne vom ocupa acum de calculul integralei

$$K(\lambda) = \int_{x_0}^{x_3} |\varphi(x)| dx$$

și vom determina valoarea ei minimă.

1°. Pentru $\lambda \geq 0$, obținem

$$K(\lambda) = 2 \int_{x_0}^{x_3} \varphi(x) dx = \frac{2h^6}{7!} [738h + 2.520\lambda]$$

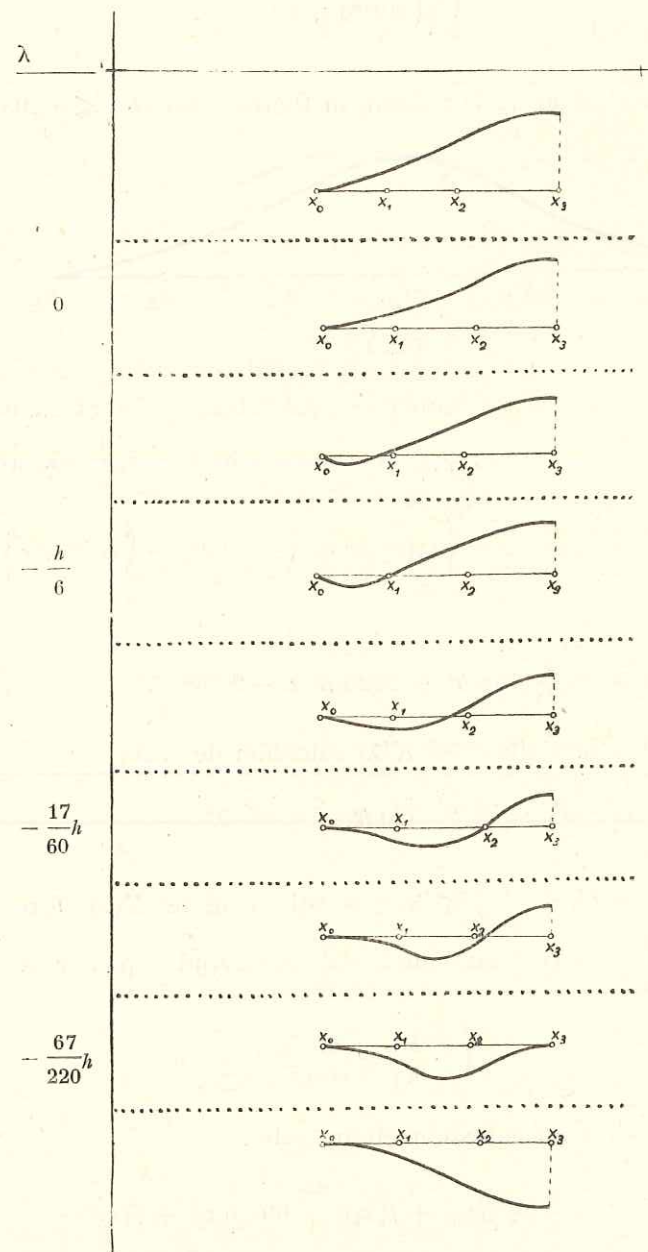
și cea mai mică valoare a lui $K(\lambda)$ se obține pentru $\lambda = 0$, anume:

$$K(0) = \frac{123}{420} h^7.$$

Formula de cuadratură corespunzătoare este

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{10} \{11[f(x_1) + f(x_3)] - 14[f(x_2) + f(x_4)] + 26f(x_3)\} + R, \quad (13)$$

Tabelul 2



unde

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx,$$

graficul funcției $\varphi(x)$ fiind acela indicat în figura 1, iar $|R| \leq 0,293 h^7 M_6$.

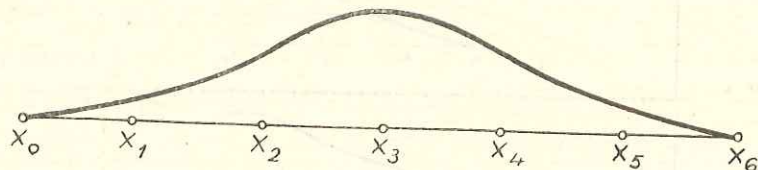


Fig. 1

Formula (13) este cunoscuta formulă de cuadratură a lui Steffensen.

2°. Pentru $-\frac{h}{6} \leq \lambda \leq 0$, $\varphi(x)$ se anulează în $x = x_0 - 6\lambda$, atunci

$$K(\lambda) = 2 \left\{ - \int_{x_0}^{x_0-6\lambda} \varphi_1(x) dx + \int_{x_0-6\lambda}^{x_1} \varphi_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_3(x) dx \right\},$$

sau

$$K(\lambda) = \frac{2}{7!} [738 h^7 + 2520 h^6 \lambda - 2 \cdot 6^6 \cdot \lambda^7].$$

Pentru determinarea minimumului lui $K(\lambda)$ calculăm derivata

$$\frac{dK}{d\lambda} = \frac{2}{7!} [2 \cdot 520 h^6 - 14 \cdot 6^6 \cdot \lambda^6].$$

Observăm că $\frac{dK}{d\lambda} > 0$ dacă $-\frac{h}{6} \leq \lambda < 0$, prin urmare $K(\lambda)$ este crescătoare pe acest interval, cea mai mică valoare avînd-o pentru $\lambda = -\frac{h}{6}$ și anume

$$K\left(-\frac{h}{6}\right) = \frac{67}{1512} h^7,$$

iar formula de cuadratură corespunzătoare este:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{30} \{5 [f(x_0) + f(x_6)] + 69 [f(x_1) + f(x_5)] - 51 [f(x_2) + f(x_4)] + 134 f(x_3)\} + R, \quad (14)$$

unde

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx,$$

graficul funcției $\varphi(x)$ fiind indicat în figura 2.

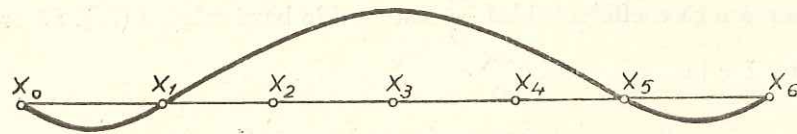


Fig. 2

Obținem pentru rest delimitarea

$$|R| < 0,11045 h^7 M_6$$

3°. Pentru $-\frac{17}{60}h \leq \lambda \leq -\frac{h}{6}$, avem

$$K(\lambda) = 2 \left\{ - \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1(x) dx - \int_{x_1}^{\xi} \varphi_2(x) dx + \int_{\xi}^{x_2} \varphi_2(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_3(x) dx \right\}$$

sau

$$K(\lambda) = \frac{2h^6}{7!} [738 h + 2520 \lambda] - 4 \left[\frac{(\xi - x_0)^7}{7!} + \lambda \frac{(\xi - x_0)^6}{6!} - \left(\frac{33}{10} h + 6 \lambda \right) \frac{(\xi - x_1)^6}{6!} \right].$$

Pentru determinarea minimumului lui $K(\lambda)$, avem nevoie de derivata $\frac{dK}{d\lambda}$.

Dar $K(\lambda)$ depinde de λ direct și prin intermediul lui ξ . Din definiția lui ξ rezultă că între ξ și λ există relația

$$\varphi_2(\xi, \lambda) = \frac{(\xi - x_0)^6}{6!} + \lambda \frac{(\xi - x_0)^5}{5!} - \left(\frac{33}{10} h + 6 \lambda \right) \frac{(\xi - x_1)^5}{5!} = 0. \quad (15)$$

Din teorema 1, punctul 3°, rezultă că ecuația (15) definește pentru orice $\bar{\lambda} \in \left[-\frac{17}{60}h, -\frac{h}{6} \right]$ o singură valoare $\bar{\xi} \in [x_1, x_2]$ care este rădăcina simplă a polinomului $\varphi_2(x, \bar{\lambda})$. Atunci, $\frac{d\varphi_2(x, \bar{\lambda})}{dx}$ nu se anulează pentru $x = \bar{\xi}$, adică

$$\frac{d\varphi_2(\bar{\xi}, \bar{\lambda})}{d\xi} \Big|_{\bar{\xi}, \bar{\lambda}} \neq 0 \quad (16)$$

pentru orice pereche de numere $\bar{\xi}$ și $\bar{\lambda}$ care verifică ecuația (15). În baza continuității funcției $\varphi_2(x, \bar{\lambda})$ și a condiției (16), deducem că ecuația (15) definește pe ξ ca funcție continuă și derivabilă de λ , pe intervalul considerat.

Revenind la derivata lui $K(\lambda)$, avem

$$\frac{dK}{d\lambda} = \frac{4}{6!} [180 h^6 - (\xi - x_0)^6 + 6(\xi - x_1)^6] - 4 \left[\frac{(\xi - x_0)^6}{6!} + \lambda \frac{(\xi - x_0)^6}{5!} - \left(\frac{33}{10} h + 6\lambda \right) \frac{(\xi - x_1)^6}{5!} \right] \frac{d\xi}{d\lambda}$$

Observăm că coeficientul lui $\frac{d\xi}{d\lambda}$ este nul în baza relației (15). Să arătăm că pentru $\xi \in [x_1, x_2]$, avem $\frac{dK}{d\lambda} < 0$. Pentru aceasta notăm

$$\Phi(\xi) = 180 h^6 - (\xi - x_0)^6 + 6(\xi - x_1)^6$$

și studiem semnul derivatelor polinomului $\Phi(\xi)$ pe intervalul $[x_1, x_2]$. Obținem tabelul 3:

Tabelul 3

ξ	x_1		x_2
$\Phi^{VI}(\xi)$	+	+	+
$\Phi^V(\xi)$	-	0	+
$\Phi^{IV}(\xi)$	-	-	0
$\Phi'''(\xi)$	-	-	-
$\Phi''(\xi)$	-	-	-
$\Phi'(\xi)$	-	-	-
$\Phi(\xi)$	+	+	+

Se vede că avem $\Phi(\xi) > 0$ când $\xi \in [x_2, x_3]$. Deoarece $\frac{dK}{d\lambda} = \frac{4}{6!} \Phi(\xi)$, rezultă că $\frac{dK}{d\lambda} > 0$ pentru $\xi \in [x_1, x_2]$. Dar când $\xi \in [x_1, x_2]$, atunci $\lambda \in \left[-\frac{17}{60} h, -\frac{h}{6} \right]$, deci $K(\lambda)$ este o funcție crescătoare de λ pe intervalul considerat. Cea mai mică valoare a lui $K(\lambda)$ se obține pentru $\lambda = -\frac{17}{60}$ și anume:

$$K\left(-\frac{17}{60} h\right) = \frac{83}{4725} h^7.$$

Formula de cuadratură corespunzătoare este

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{60} \{ 17 [f(x_0) + f(x_6)] + 96 [f(x_1) + f(x_5)] + 3 [f(x_2) + f(x_4)] + 128 f(x_3) \} + R,$$

unde $R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx$. Graficul funcției $\varphi(x)$ este redat în figura 3

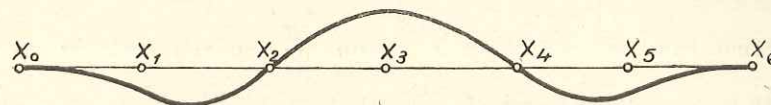


Fig. 3

și obținem $|R| > 0,1761 h^7 M_6$.

4°. Pentru $-\frac{67}{220} h \leq \lambda \leq -\frac{17}{60} h$, avem

$$K(\lambda) = 2 \left\{ - \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2(x) dx - \int_{x_2}^{\xi} \varphi_3(x) dx + \int_{\xi}^{x_3} \varphi_3(x) dx \right\}$$

sau

$$K(\lambda) = \frac{2h^6}{7!} [738 h + 2520\lambda] - 4 \left[\frac{(\xi - x_0)^7}{7!} + \lambda \frac{(\xi - x_0)^6}{6!} - \left(\frac{33}{10} h + 6\lambda \right) \frac{(\xi - x_1)^6}{6!} + \left(\frac{21}{5} h + 15\lambda \right) \frac{(\xi - x_2)^6}{6!} \right].$$

Printr-un raționament analog cu cel făcut în cazul precedent, ne dăm seama că funcția $K(\lambda)$ este derivabilă și că

$$\frac{dK}{d\lambda} = \frac{4}{6!} [180 h^6 - (\xi - x_0)^6 + 6(\xi - x_1)^6] - 15(\xi - x_2)^6.$$

Studiem semnul derivatei $\frac{dK}{d\lambda}$ când $\lambda \in \left[-\frac{67}{220} h, -\frac{17}{60} h \right]$, deci $\xi \in [x_2, x_3]$.

Notăm

$$\Phi(\xi) = 180 h^6 - (\xi - x_0)^6 + 6(\xi - x_1)^6 - 15(\xi - x_2)^6$$

și alcătuim tabelul 4.

Tabelul 4

ξ	x_2		x_3
$\Phi^{VI}(\xi)$	-	-	-
$\Phi^V(\xi)$	+	+	0
$\Phi^{IV}(\xi)$	+	+	+
$\Phi'''(\xi)$	-	-	0
$\Phi''(\xi)$	-	-	-
$\Phi'(\xi)$	-	-	-
$\Phi(\xi)$	+	+	0

Se vede că $\Phi(\xi)$ are o rădăcină ξ , în intervalul (x_2, x_3) , adică $\frac{dK}{d\lambda}$ are o rădăcină λ_m în intervalul $\left[-\frac{67}{220}h, -\frac{17}{60}h\right]$. În urma unui studiu mai amănunțit constatăm că rădăcina λ_m a lui $\frac{dK}{d\lambda}$, se situează în intervalul $(-0,3016h, -0,2998h)$ și că $\frac{dK}{d\lambda} < 0$ dacă $\lambda \in \left[-\frac{67}{220}h, -0,3016h\right]$ și că $\frac{dK}{d\lambda} > 0$ dacă $\lambda \in \left[-0,2998h, -\frac{17}{60}h\right]$, ceea ce înseamnă că λ_m este un punct de minimum pentru funcția $K(\lambda)$.

Deoarece

$$K(-0,2998h) = 0,01018 \dots h^7$$

și

$$K\left(-\frac{67}{220}h\right) = 0,011683 \dots h^7,$$

rezultă că

$$\min_{\left[-\frac{67}{220}h, -\frac{17}{60}h\right]} K(\lambda) < 0,01019 h^7.$$

Vom considera formula de cuadratură obținută pentru o valoare a lui λ apropiată de λ_m și anume $\lambda = 0,3h$; cu această valoare a lui λ formula de cuadratură devine

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{3h}{10} \{f(x_0) + f(x_6) + 5[f(x_1) + f(x_5)] + f(x_2) + 6f(x_3)\} + R, \quad (17)$$

unde

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx.$$

Graficul funcției $\varphi(x)$ este indicat în figura 4.

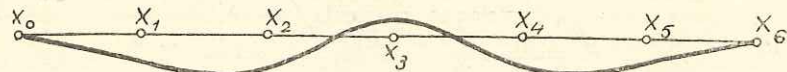


Fig. 4

Se obține în acest caz pentru rest următoarea delimitare :

$$|R| < 0,01019 h^7 M_6.$$

Formula obținută este cunoscuta formulă de cuadratură a lui Weddle.

5°. Pentru $\lambda \leq -\frac{67}{220}h$,

$$K(\lambda) = -\int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) dx$$

sau

$$K(\lambda) = -\frac{2}{7!} [738 h^7 - 2.520 \lambda].$$

Cea mai mică valoare a lui $K(\lambda)$ se obține pentru $\lambda = -\frac{67}{220}h$ și ea este

$$K\left(-\frac{67}{220}h\right) = 0,011683 \dots h^7.$$

Formula de cuadratură corespunzătoare se scrie

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{220} \{67 [f(x_0) + f(x_6)] + 324 [f(x_1) + f(x_5)] + 81 [f(x_2) + f(x_4)] + 376 f(x_3)\} + R,$$

unde

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx.$$

Graficul funcției $\varphi(x)$ este indicat în figura 5.

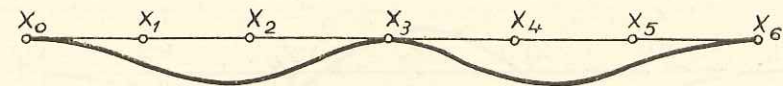


Fig. 5

Se obține pentru rest delimitarea :

$$|R| < 0,011684 h^7 M_5.$$

Din studiul făcut asupra integralei $K(\lambda)$ rezultă că formula de cuadratură corespunzătoare celei mai mici valori a lui $K(\lambda)$ se obține când se alege λ în intervalul $(-0,3016h, -0,2998h)$. De exemplu $\lambda = -0,3h$, cade în acest interval și în plus formula obținută are coeficienți simpli.

Prin urmare formula de cuadratură de tipul (I) cea mai convenabilă din punctul de vedere al restului și al coeficienților este formula lui Weddle.

§ 3. Determinarea formulei de cuadratură cu gradul de exactitate șapte

7. Formula de cuadratură construită în § 1, are gradul de exactitate cinci pentru o valoare oarecare a parametrului λ . În acest paragraf ne propunem să determinăm parametrul λ în așa fel încât să obținem o formulă de cuadratură cu gradul de exactitate mai mare.

Pentru ca formula de cuadratură să aibă gradul de exactitate șase, este suficient ca restul ei să se anuleze când funcția $f(x)$ este înlocuită cu polinomul $(x-x_3)^6$, adică să avem:

$$\int_{x_0}^{x_6} (x-x_3)^6 dx = -\lambda [(x_0-x_3)^6 + (x_6-x_3)^6] - \left(\frac{33}{10}h + 6\lambda\right) [(x_1-x_3)^6 + (x_5-x_3)^6] + \left(\frac{21}{5}h + 15\lambda\right) [(x_2-x_3)^6 + (x_4-x_3)^6],$$

de unde rezultă pentru λ valoarea $\lambda = -\frac{41}{140}h$.

Pe de altă parte, luând în considerare faptul că formula (I) are coeficienții simetrici, restul ei devine nul când funcția $f(x)$ este înlocuită cu polinomul $(x-x_3)^7$ oricare ar fi λ . În consecință formula de cuadratură corespunzătoare lui $\lambda = -\frac{41}{140}h$ are gradul de exactitate șapte. Avem

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{140} \{41 [f(x_0) + f(x_6)] + 216 [f(x_1) + f(x_5)] + 27 [f(x_2) + f(x_4)] + 272 f(x_3)\} + \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx \quad (18)$$

unde $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) cu polinoamele $\varphi_i(x)$ definite de formulele (12) pentru $\lambda = -\frac{41}{140}h$.

Ținând seama de teorema 1, graficul funcției $\varphi(x)$ este indicat în figura 6.

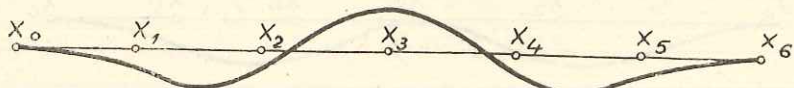


Fig. 6

8. Pentru funcții $f(x)$ ce aparțin clasei C^8 se poate construi o formulă de cuadratură pe nodurile x_0, x_1, \dots, x_6 cu gradul de exactitate șapte și restul de forma

$$\int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(8)}(x) dx.$$

Formula astfel obținută este formula lui Cotes. Pentru construirea ei vom folosi aceeași metodă ca în § 1. În acest caz funcțiile $\varphi_i(x)$ pe care le atașăm intervalor $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) vor fi integralele ecuațiilor $\varphi_i^{(8)}(x) = 1$ cu condițiile la limită

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{(k)}(x_0) &= 0 \\ \varphi_i^{(k)}(x_i) &= \varphi_{i+1}^{(k)}(x_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \\ \varphi_6^{(k)}(x_6) &= 0 \end{aligned} \right\} (k = 0, 1, \dots, 6). \quad (19)$$

Ca și în § 1, se observă că funcțiile $\varphi_i(x)$ sînt definite de formulele

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_0)^8}{8!} + \sum_{k=1}^i \lambda_k \frac{(x-x_{k-1})^7}{7!} \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (20)$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ se determină din sistemul de ecuații

$$\sum_{k=0}^5 (6-k)^i \lambda_{k+1} = -\frac{6^{i+1}}{i+1} h \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \quad (21)$$

și anume

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{41}{140}h \\ \lambda_2 &= \lambda_6 = -\frac{54}{35}h \\ \lambda_3 &= \lambda_5 = -\frac{27}{140}h \\ \lambda_4 &= -\frac{68}{35}h. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Formula lui Cotes este următoarea:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{140} \{41 [f(x_0) + f(x_6)] + 216 [f(x_1) + f(x_5)] + 27 [f(x_2) + f(x_4)] + 272 f(x_3)\} + \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(8)}(x) dx, \quad (23)$$

unde $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_{i-1}, x_i]$ cu polinoamele $\varphi_i(x)$ definite de formulele (20), în care valorile lui $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ sînt date de formulele (22).

Referitor la funcția $\varphi(x)$ se demonstrează următoarele: curba $y = \varphi(x)$ este simetrică față de dreapta $x = x_3$ iar funcția $\varphi(x)$ este negativă când x aparține intervalului (x_0, x_6) . Graficul funcției $\varphi(x)$ este indicat în figura 7.

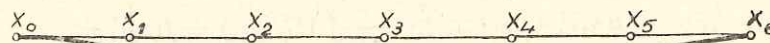


Fig. 7

Restul formulei (23)

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(8)}(x) dx,$$

se poate pune, cu ajutorul formulei de medie, sub forma

$$R = f^{(8)}(\xi) \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) dx, \quad \text{unde } \xi \in (x_0, x_6).$$

Dar deoarece

$$\int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) dx = -\frac{9}{1400} h^9,$$

avem

$$R = -\frac{9}{1400} h^9 f^{(8)}(\xi).$$

§ 4. Legătura dintre formula (I) și formula (23)

9. Comparînd sistemele de ecuații (8) și (21), observăm că valorile lui λ_i date de (22) constituie o soluție particulară a sistemului de ecuație (8), ceea ce ne îndreptățește să scriem soluția acestui sistem sub forma :

$$\lambda_1 = \mu - \frac{41}{140} h$$

$$\lambda_2 = \lambda_6 = -6\mu - \frac{54}{35} h$$

$$\lambda_3 = \lambda_5 = 15\mu - \frac{27}{140} h$$

$$\lambda_4 = -20\mu - \frac{68}{35} h,$$

unde $(\mu, -6\mu, 15\mu, -20\mu, 15\mu, -6\mu)$ este soluția generală a sistemului de ecuații omogene corespunzătoare sistemului (8). Atunci formula de cuadratură (I) se scrie sub forma

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = & -\mu \{f(x_0) + f(x_6) - 6[f(x_1) + f(x_5)] + \\ & + 15[f(x_2) + f(x_4)] - 20f(x_3)\} + \frac{h}{140} \{41[f(x_0) + f(x_6)] + \\ & + 216[f(x_1) + f(x_5)] + 27[f(x_2) + f(x_4)] + 272f(x_3)\} + \\ & + \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Coefficientul lui μ din această formulă este diferența finită de ordinul șase a funcției $f(x)$ pe nodurile x_0, x_1, \dots, x_6 , iar ceilalți termeni sînt aceiași ca în formula (23).

Ținînd seama de faptul că $\Delta^6 f(x_0)$ se poate scrie sub forma [2],

$$\Delta^6 f(x_0) = h^6 6! \int_{x_0}^{x_6} \psi(x) f^{(6)}(x) dx,$$

unde $\psi(x)$ este o funcție pozitivă pe intervalul (x_0, x_6) , observăm că formula de cuadratură (24) se obține din formula (23) dacă acesteia din urmă îi adăugăm

$$0 = -\mu \Delta^6 f(x_0) + h^6 6! \int_{x_0}^{x_6} \psi(x) f^{(6)}(x) dx,$$

adică

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = & -\mu \Delta^6 f(x_0) + \frac{h}{140} \{41[f(x_0) + f(x_6)] + 216[f(x_1) + \\ & + f(x_5)] + 27[f(x_2) + f(x_4)] + 272f(x_3)\} + \\ & + \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(8)}(x) dx + \int_{x_0}^{x_6} \psi(x) f^{(6)}(x) dx. \end{aligned} \quad (25)$$

În formula (25), făcînd notații $\mu - \frac{41}{140} h = \lambda$, obținem formula (I) cu restul sub forma

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(8)}(x) dx + \left(\lambda + \frac{41}{140} h \right) \int_{x_0}^{x_6} \psi(x) f^{(6)}(x) dx.$$

Ținînd seama de faptul că $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ păstrează un semn constant pe intervalul (x_0, x_6) , aplicînd formula medie integralelor din expresia lui R , obținem :

$$R = -\frac{9}{1400} h^9 f^{(8)}(\xi) + \left(\lambda + \frac{41}{140} h \right) h^6 f^{(6)}(\eta), \quad (26)$$

unde $\xi, \eta \in (x_0, x_6)$.

§ 5. Formula de cuadratură cu coeficienți numere zecimale cu un număr finit de zecimale

10. O nouă problemă ce se pune în legătură cu formula (I) este determinarea parametrului λ în așa fel încît coeficienții formulei să fie simpli.

Astfel pentru a obține formule aicăror coeficienți să fie numere zecimale cu un număr finit de zecimale, trebuie ca λ să fie un număr de forma

$$\lambda = \frac{\alpha}{2^{\beta} 5^{\gamma}},$$

unde α, β, γ sînt numere întregi și $\alpha \geq 0$.

În această categorie se încadrează formulele întîlnite în § 1 pentru $\lambda = 0$, formula lui Steffenson și pentru $\lambda = -\frac{3}{10} h$ formula lui Weddle.

Referitor la formula lui Weddle, observăm că dacă în determinarea restului folosim formula (26), obținem forma cunoscută [4] a restului :

$$R = -\frac{h^7}{140} \left[f^{(6)}(\eta) + \frac{9}{10} h^2 f^{(8)}(\xi) \right].$$

O altă formulă remarcabilă se obține pentru $\lambda = -\frac{7}{25}h$ și anume formula lui Hardy

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{50} \{ 14 [f(x_0) + f(x_6)] + 81 [f(x_4) + f(x_5)] + 11 f(x_3) \} + R \quad (27)$$

unde

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx, \quad (28)$$

funcția $\varphi(x)$ fiind determinată de formulele (12) pentru $\lambda = -\frac{7}{25}h$. Conform teoremei 1, pentru graficul funcției $\varphi(x)$ se obține curba din figura 8, iar pentru rest se obține delimitarea

$$|R| < 0,019929 h^7 M_6. \quad (29)$$

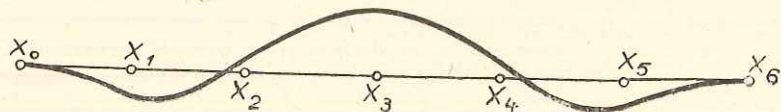


Fig. 8

Restul formulei lui Hardy sub forma (28) și evaluarea (29) au fost date și de A. Coțiu [1].

Dacă pentru determinarea restului formulei lui Hardy se folosește formula (26), se obține o altă formă cunoscută a restului [4]

$$R = \frac{9h^7}{700} \left[f^{(6)}(\eta) - \frac{1}{2} h^2 f^{(8)}(\xi) \right].$$

Vom mai considera încă formula obținută pentru $\lambda = -\frac{11}{20}$, care nu conține valorile funcției în nodurile x_1 și x_5 :

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{20} \{ 11 [f(x_0) + f(x_6)] + 81h [f(x_2) + [f(x_4)] - 64 f(x_3)] \} + R, \quad (30)$$

unde

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx,$$

iar funcția $\varphi(x)$ este determinată de formulele (11). Graficul ei este indicat în figura 9. Pentru rest se obține delimitarea $|R| < 0,255 \dots h^7 M_6$.

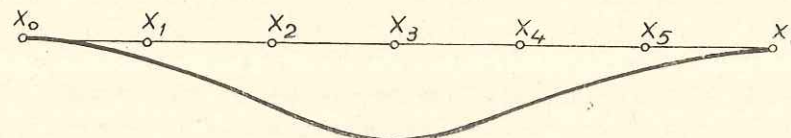


Fig. 9

Formula care nu conține valorile funcției în nodul x_3 , se obține pentru $\lambda = -\frac{39}{100}h$ și anume

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{100} \{ 39 [f(x_0) + f(x_6)] + 96 [f(x_1) + f(x_5)] + 180 [f(x_2) + f(x_4)] \} + R, \quad (31)$$

unde

$$R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx.$$

Graficul funcției $\varphi(x)$ este indicat în figura 10, iar pentru termenul rest se obține delimitarea $|R| \leq 0,098 h^7 M_6$.

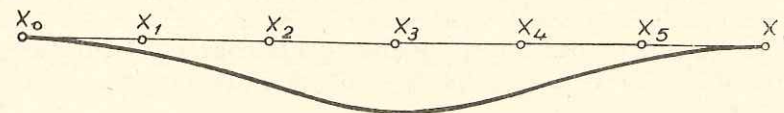


Fig. 10

Dintre formulele ai căror coeficienți au un număr finit de zecimale, cea mai bună din punctul de vedere al restului este formula lui Weddle, după cum s-a văzut în § 2.

Universitatea „Babeș-Bolyai” Cluj,
Catedra de ecuații diferențiale

