DESPRE SOLUȚIILE POZITIVE ALE UNUI SISTEM DE ECUAȚII LINIARE *)

DE

L. NEGRESCU, A. NÉMETH și T. RUS
(Cluj)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8—13 decembrie 1960, Cluj

Se consideră sistemul de n ecuații cu n necunoscute :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

cu condițiile:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad a_{i,j} > 0 \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \\ &\text{b)} \quad a_{i,i} < a_{i+1,i} < a_{i+2,i} < \ldots < a_{n,i} < a_{1,n} < \ldots < a_{i-1,i}, \\ &\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Notăm cu $\Delta^{(n)}$ determinantul acestui sistem, $\Delta^{(n)} = |a_{ij}|$. O soluție a acestui sistem $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ se zice pozitivă dacă $x_j^0 > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

TEOREMA. *Sistemul de ecuații* (1) *cu condițiile* (2) *admite o soluție unică pozitivă și* $(-1)^{n-1}\Delta^{(n)} > 0$.

Pentru a demonstra această teoremă, vom face cîteva considerații asupra determinantului sistemului (1).

Dacă notăm cu $\Delta_i^{(n)}$ un determinant de forma determinantului sistemului (1) în condițiile (2), unde coloana i este înlocuită cu 1 în întregime, atunci vom arăta că $\operatorname{sgn} \Delta_i^{(n)} = \operatorname{sgn} \Delta^{(n)} = (-1)^{n-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

---

*) Această lucrare se publică și în limba franceză în revista ,,Mathematica", vol 4(27), 1962. Problema studierii soluțiilor pozitive ale sistemelor de ecuații liniare a fost pusă cu ocazia discuțiilor care au avut loc în cadrul Seminarului de cea mai bună aproximație și programare liniară, Cluj, 1960.

Fie

$$\Delta_i^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & 1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & 1 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & 1 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pentru a demonstra afirmaţia de mai sus, vom proceda prin inducţie completă asupra lui n.

Pentru $n = 2$ (cazul $n = 1$ fiind banal), avem :

$$\Delta_i^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22} - a_{12} < 0\,; \quad \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix} = a_{11} - a_{21} < 0\,;$$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0.$$

Se vede imediat că $\operatorname{sgn} \Delta_1^{(2)} = \operatorname{sgn} \Delta_2^{(2)} = \operatorname{sgn} \Delta^{(2)} = (-1)^1 = -1$. Presupunem afirmaţia adevărată pentru n şi o vom arăta pentru $n + 1$. Pentru aceasta vom considera determinanţii $\Delta_i^{(n+1)}$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$.

$$\Delta_i^{(n+1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & 1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & 1 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,i-1} & 1 & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,i-1} & 1 & a_{n+1,i+1} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

Să scădem linia $i - 1$ din toate celelalte linii. Se observă că obţinem zero pe coloana de rangul i în afară de elementul din linia de rang $i-1$, care este egal cu 1. Deci $\Delta_i^{(n+1)} = (-1)^{2i-1}D = (-1)D$, unde D este determinantul de mai jos :

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} &\lambda_{kj} = a_{kj} - a_{i-1,j} \\ &k = 1, 2, \ldots, i-2, i, i+1, \ldots, n+1 \\ &j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1. \end{aligned} \qquad (3)$$

Deoarece a_{kj} respectă condiţiile (2) iar $a_{i-1,j}$ pe o coloană este constant cînd k variază, se vede că λ_{kj} respectă condiţiile (2) b), $a_{i-1,j}$ fiind pozitiv conform condiţiei (2) a). Elementele λ_{kj} nu respectă condiţia (2) a). Se vede însă uşor că linia de rangul $i - 1$ a determinantului D şi anume $\lambda_{i-1,1}$, $\lambda_{i-1,2}, \ldots, \lambda_{i-1,i-1}, \ldots, \lambda_{i-1,n}$ este în întregime din elemente pozitive, deoarece

$$\begin{aligned} \lambda_{i-1,1} &= a_{i1} - a_{i-1,1} \\ \lambda_{i-1,2} &= a_{i2} - a_{i-1,2} \\ &\cdots\cdots \\ \lambda_{i-1,i+1} &= a_{i,i+1} - a_{i-1,i+1} \\ &\cdots\cdots \\ \lambda_{i-1,n} &= a_{in} - a_{i-1,n} \end{aligned}$$

conform relaţiilor (3).

Ţinînd seamă de condiţiile (2), avem :

$$\begin{aligned} a_{i1} &> a_{i-1,1} \\ a_{i2} &> a_{i-1,2} \\ &\cdots\cdots \\ a_{i,i+1} &> a_{i-1,i} \\ &\cdots\cdots \\ a_{i,n} &> a_{i-1,n} \end{aligned}$$

Se observă că pe diagonala principală a determinantului D vom avea ca şi în cazul condiţiilor (2), cele mai mici elemente.

Deoarece linia de rangul $i - 1$ a determinantului D este formată din elemente pozitive, se poate găsi un număr $k > 0$ suficient de mare astfel ca înmulţind această linie cu k şi adunîndu-o la toate celelalte linii ale determinantului D, toate elementele determinantului D să devină pozitive.

În felul acesta determinantul D are elementele pozitive, condiţia (2) b) rămînînd în continuare respectată. Atunci conform ipotezei $\operatorname{sgn} D = (-1)^{n-1}$, deci $\operatorname{sgn} \Delta_i^{(n+1)} = (-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Pentru a arăta că $\operatorname{sgn} \Delta^{(n+1)} = (-1)^n$ ne vom folosi de asemenea de ipoteza inducţiei :

Să presupunem că $(-1)^n\Delta^{(n+1)} < 0$. Dacă considerăm atunci pe $\Delta^{(n+1)}$ determinantul unui sistem de forma (1) cu $n + 1$ necunoscute şi $n + 1$ ecuaţii, acesta admite soluţiile

$$x_i = \frac{\Delta_i^{(n+1)}}{\Delta^{(n+1)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Din faptul că $\operatorname{sgn} \Delta_i^{(n+1)} = (-1)^n$, rezultă că $x_i < 0$ pentru $i = 1$, $2, \ldots, n + 1$, ceea ce contrazice sistemul considerat în condiţiile (2).

Să arătăm că $\Delta^{(n+1)}$ nu poate fi nul.

Pentru aceasta, vom da o variaţie mică lui a_{11} în aşa fel ca ipotezele (2) să se menţină şi vom presupune că $\Delta^{(n+1)} = 0$.

Determinantul nou obţinut prin schimbarea lui a_{11} în $a'_{11} = a_{11} + \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ suficient de mic este $\Delta'^{(n+1)} = \Delta^{(n+1)} + \varepsilon\,\Delta^{(n)}$, unde $\Delta^{(n)}$ este determinantul obţinut prin suprimarea primei linii şi a primei coloane a determinantului $\Delta^{(n+1)}$. Deci $\Delta^{(n)}$ verifică condiţiile (2); $\operatorname{sgn} \Delta^{(n)} = (-1)^{n-1}$, $\Delta^{(n+1)} = 0$, deci $\operatorname{sgn} \Delta'^{(n+1)} = (-1)^{n-1}$, ceea ce este în contradicţie cu demonstraţia de mai sus.

Deci vom avea $(-1)^n\Delta^{(n+1)} > 0$. În consecinţă, revenind la sistemul (1), avem $x_i = \dfrac{\Delta_i^{(n)}}{\Delta^{(n)}} > 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, ceea ce demonstrează complet teorema.

Observaţii. 1°. Teorema demonstrată are de asemenea loc dacă condiţia (2) b) se înlocuieşte cu următoarea condiţie (2) b') :

$$\text{b}')\ a_{ii} > a_{i+1,i} > \cdots > a_{ni} > a_{1i} > \cdots > a_{i-1,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Demonstraţia acestei observaţii se reduce la teorema precedentă prin schimbări de linii şi coloane.

2°. Presupunem că avem un sistem de m ecuaţii cu n necunoscute $(m < n)$:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Se poate arăta că în ipoteza că există un determinant în matricea coeficienţilor sistemului (4), de ordinul m astfel ca să fie verificate pentru acest determinant condiţiile (2), atunci există o soluţie pozitivă a sistemului (2).

Pentru a demonstra această afirmaţie, rezolvăm sistemul în raport cu necunoscutele coloanelor care intră în determinantul ales. Atunci $x_i = \frac{\Delta_i^{(m)}}{\Delta^{(m)}}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Dar $\Delta_i^{(m)}$ sînt funcţii liniare, deci continue de $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$; prin urmare x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, sînt funcţii liniare, deci continue de $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, $x_i = f_i(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Din teorema demonstrată se ştie că pentru $x_i = 0$, $i = m+1, m+2, \ldots, n$, avem $x_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Atunci există un sistem de vecinătăţi ale variabilelor $x_{m+1}, \ldots, x_n$, $V_i^{(j)}$ astfel ca $x_1 > 0$ în $V_1 = \bigcap_{j=m+1}^{n} V_1^{(j)}$, $x_2 > 0$ în $V_2 = \bigcap_{j=m+1}^{n} V_2^{(j)}, \ldots,$ $x_m > 0$ în $V_m = \bigcap_{j=m+1}^{n} V_m^{(j)}$. De aici rezultă că $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ în $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_i$, oricare ar fi $x_{m+1}, \ldots, x_n$ în vecinătăţile alese mai sus. Vom putea deci alege un sistem de x_j, $j = m+1, \ldots, n$, numere pozitive astfel ca $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ pentru aceste numere. În felul acesta observaţia 2 este complet demonstrată.

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде рассматривается система n уравнений с n неизвестными (1) при условиях (2). Решение $x_i^0, i=1, 2, \ldots, n$ системы (1) называется положительным если $x_i^0 > 0$ для $i=1, 2, \ldots, n$.

Обозначается через $\Delta^{(n)}$ определитель системы (1). При условиях (2) доказывается следующая

ТЕОРЕМА. *Система уравнений* (1) *при условиях* (2) *допускает единственное положительное решение и* $(-1)^{n-1}\Delta^{(n)} > 0$.

Далее отмечается что если при условиях (2) знак $<$ заменяем знаком $\wedge$, то теорема также верна.

Доказывается потом, что система m уравнений с n неизвестных, где $m > n$, допускает по меньшей мере одно положительное решение, если в матрице её коэффициентов находим хотя бы один определитель, элементы которого удовлетворяют условиям (2).

SUR LES SOLUTIONS POSITIVES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

RÉSUMÉ

Dans ce travail on considère le système de n équations à n inconnues (1), aux conditions (2). On dit qu'une solution x_i^0, $i = 1, 2, \ldots, n$ du système (1) est positive si $x_i^0 > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

On note par $\Delta^{(n)}$ le déterminant du système (1). Dans les conditions (2) on démontre le théorème suivant:

THÉORÈME. *Le système d'équations* (1) *aux conditions* (2) *admet une solution unique positive et* $(-1)^{n-1}\Delta^{(n)} > 0$.

On remarque ensuite que si, dans les conditions (2), on remplace le signe $<$ par le signe $>$, le théorème est également vrai.

On démontre ensuite que le système de m équations à n inconnues, où $m < n$ (4), admet au moins une solutions positive si dans la matrice de ses coefficients on trouve au moins un déterminant dont les éléments vérifient les conditions (2).

BIBLIOGRAFIE

1. Черников С. Н. *Положительные и отрицательные решения систем линейных неравенств.* Матем. Сборник, **38**, *4*, 479—508 (1956).
2. — *Положительные и отрицательные решения систем линейных неравенств.* Д.А.Н., С.С.С.Р., **99**, *6*, 913—916 (1954).
3. — *О строго-ненулых решения систем линейных уравнений.* Успехи Матем. Наук, **11**, *2*, 223—228 (1956).

Primit la 8.XII. 1960