DESPRE STRUCTURA MATRICILOR REALE DIN PUNCT DE VEDERE AL TEORIEI JOCURILOR

DE

ALEXANDRU B. NÉMETH

(Cluj)

Obiectele principale ale teoriei jocurilor finite sînt matricile reale numite în limbajul teoriei jocurilor matrici de jocuri sau matrici de plăţi. În lucrarea de faţă privim matricea reală ca matrice de plăţi a unui joc de două persoane cu sumă nulă. Scopul prezentei lucrări este de a face un studiu structural ale acestor matrici.

Considerăm cunoscute noţiunea de strategie pură, strategie mixtă, strategie optimă, matrice complet mixtă (c.m.), matrice complet ponderată (c.p.), strategie complet ponderată (vezi terminologia articolului [4]). Vom înşira cîteva propoziţii cunoscute de care ne vom folosi în lucrare :

1. Mulţimea strategiilor optime al unui joc este convexă.

2. Dacă $\mathbf{x}$ este o strategie optimă a jocului cu matricea $\mathbf{A}$, şi pentru indicele i_0 avem $x_{i_0} > 0$, atunci pentru orice strategie optimă $\mathbf{y}$

$$(\mathbf{A}\mathbf{y})_{i_0} = v$$

(v fiind valoarea jocului).

3. Orice matrice c.p. are strategii optime complet ponderate.

§ 1. Submatrici minime

DEFINIŢIA 1. *Fie dată o submatrice* $\mathbf{B}$ *a matricii de jocuri* $\mathbf{A}$ *şi fie* $\mathbf{x}^0$ *o strategie pentru* $\mathbf{B}$. *Numim extinderea acestei strategii la o strategie pentru matricea* $\mathbf{A}$, *strategia obţinută din prima, punînd zerouri în locurile corespunzătoare liniilor lui* $\mathbf{A}$, *care nu intră în* $\mathbf{B}$. *Procedeul contrar îl vom numi restrîngere.*

Definim mulţimile $\mathcal{J}_x$ şi $\mathcal{J}_y$ în felul următor. Fie **x** şi **y** două strategii ale matricii **A**, atunci fie

$$\mathcal{J}_x = \{i | x_i > 0\}, \qquad \mathcal{J}_y = \{j | y^j > 0\}.$$

Vom numi submatrice corespunzătoare perechii de strategii **x**, **y** (o vom nota $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$) o submatrice avînd liniile lui **A** corespunzătoare elementelor lui $\mathcal{J}_x$ şi coloanele lui **A** corespunzătoare elementelor lui $\mathcal{J}_y$.

Funcţiile $\omega(\mathbf{x})$ şi $\omega(\mathbf{y})$ arată numărul elementelor lui $\mathcal{J}_x$, respectiv $\mathcal{J}_y$.

Fie dată matricea c.p. **A**. Notăm cu X^0, Y^0 mulţimile strategiilor optime ale ei. Fie **x**, **y** două strategii optime. Considerăm toate strategiile optime **x** şi **y**, astfel ca $\mathcal{J}_{x^k} \subseteq \mathcal{J}_x$; $\mathcal{J}_{y^l} \subseteq \mathcal{J}_y$.

Introducem următoarele notaţii

$$\mathcal{M}_x = \{\mathbf{x}^k \in X^0 | \mathcal{J}_{x^k} \subseteq \mathcal{J}_x\}; \ \mathcal{M}_y = \{\mathbf{y}^l \in Y^0 | \mathcal{J}_{y^l} \subseteq \mathcal{J}_y\}.$$

Fie $\mathbf{x}^m$ şi $\mathbf{y}^n$ două strategii optime astfel ca

$$\omega(\mathbf{x}^m) = \min_{x^k \in \mathcal{M}_x} \omega(\mathbf{x}^k); \qquad \omega(\mathbf{y}^n) = \min_{y^l \in \mathcal{M}_y} \omega(\mathbf{y}^l).$$

Strategiile $\mathbf{x}^m$ şi $\mathbf{y}^n$ de această natură le numim strategii optime minime, iar submatricea $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ corespunzătoare perechii de strategii $\mathbf{x}^m$, $\mathbf{y}^n$ o numim *submatrice minimă* al lui **A**.

LEMA A. *Condiţia necesară şi suficientă ca o strategie optimă* $\mathbf{x}^m$ *să fie strategie optimă minimă, este ca să nu existe altă strategie optimă* **x** *de aşa natură ca* $\mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{J}_{x^m}$.

Necesitatea condiţiei. Presupunem că $\mathbf{x}^m$ este o strategie optimă minimă. Să arătăm că nu există nici o strategie optimă **x** ($\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^m$) astfel ca $\mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{J}_{x^m}$. Să presupunem în acest scop că ar exista încă o strategie optimă $\mathbf{x}^0$ ($\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{x}^m$) astfel ca $\mathcal{J}_{x^0} = \mathcal{J}_{x^m}$ (dacă $\mathcal{J}_{x^0} \subset \mathcal{J}_{x^m}$ s-ar contrazice definiţia lui $\mathbf{x}^m$).

Construim vectorul

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^m + \varepsilon\,(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^0),$$

unde pe ε îl vom fixa ulterior. Fie $\mathcal{J}$ mulţimea

$$\mathcal{J} = \{j | x_j^m - x_j^0 < 0\}.$$

Fixăm pe j_0 astfel ca

$$\frac{x_{j_0}^0}{x_{j_0}^m} = \max_{j \in \mathcal{J}} \frac{x_j^0}{x_j^m}.$$

Fie

$$\varepsilon = -\frac{x_{j_0}^m}{x_{j_0}^m - x_{j_0}^0}.$$

Observăm $x_{j_0}^1 = 0$ şi $x_j^1 \geqslant 0$ pentru $j \,\overline{\in}\, \mathcal{J}$. În baza alegerii lui j_0, pentru orice $j \in \mathcal{J}$ avem

$$0 \leqslant \left(\frac{x_{j_0}^0}{x_{j_0}^m} - \frac{x_j^0}{x_j^m}\right) x_j^m = \left(\frac{x_{j_0}^0}{x_{j_0}^m} - \frac{x_{j_0}^m}{x_{j_0}^m}\right) x_j^m - x_j^0 + x_{j_0}^m = \frac{1}{\varepsilon} x_j^m + x_j^m - x_j^0,$$

de unde urmează

$$x_j^m + \varepsilon\,(x_j^m - x_j^0) \geqslant 0,$$

deci $x_j^1 \geqslant 0$ pentru toţi $j \in \mathcal{J}_{x^m}$.

Arătăm că $\mathbf{x}^1$ este o strategie optimă. Faptul că $\mathbf{x}_1$ este o strategie, rezultă din $\sum_{j=1}^{m} x_j^1 = 1$. Întrucît $\mathbf{x}^m$ şi $\mathbf{x}^0$ sînt strategii optime pentru **A**, avem

$$\mathbf{x}^m\mathbf{A} = \mathbf{v} \qquad \mathbf{x}^0\mathbf{A} = \mathbf{v},$$

deci

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}^m\mathbf{A} - \mathbf{x}^0\mathbf{A} = (\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^0)\mathbf{A},$$

adică

$$\mathbf{x}_1\mathbf{A} = \mathbf{x}^m\mathbf{A} = \mathbf{v}.$$

Presupunînd deci că avem încă o strategie optimă $\mathbf{x}^0$ astfel ca $\mathcal{J}_{x^0} = \mathcal{J}_{x^m}$, am construit o strategie optimă $\mathbf{x}^1$ astfel ca $\mathcal{J}_{x^1} \subset \mathcal{J}_{x^m}$, ceea ce înseamnă că $\omega(\mathbf{x}^1) < \omega(\mathbf{x}^m)$, fapt care contrazice alegerea lui $\mathbf{x}^m$ şi necesitatea este demonstrată.

Suficienţa condiţiei. Presupunem că $\mathbf{x}^m$ este unic, în sensul că nu există altă strategie optimă **x** de aşa natură ca $\mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{J}_{x^m}$. Atunci cu atît mai mult nu există o altă strategie optimă **x** astfel ca $\mathcal{J}_x \subset \mathcal{J}_{x^m}$ şi de aici urmează prin definiţie că **x** este strategie optimă minimă.

LEMA B. *Orice linie şi coloană a matricii complet ponderate* **A** *aparţine unei submatrici minime.*

Demonstraţia o vom face pentru linia i_0. Trebuie să arătăm că există o strategie optimă minimă $\mathbf{x}^{(i_0)}$ de aşa natură ca $x_{i_0}^{(i_0)} > 0$.

Linia i_0 aparţine cel puţin uneia din strategiile optime lui **A** cu pondere pozitivă (cel puţin strategiei optime complet ponderate $\mathbf{x}^p$). Fie

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in X^0 | x_{i_0} > 0\}.$$

Fie strategia $\mathbf{x}^0$ de aşa natură ca

$$\omega(\mathbf{x}^0) = \min_{x \in \mathcal{M}} \omega(\mathbf{x}).$$

Vom arăta că $\mathbf{x}^0$ este o strategie optimă minimă. Presupunem contrariul : $\mathbf{x}^0$ nu este strategie optimă minimă. Atunci există o altă strategie optimă $\mathbf{x}^*$ astfel ca $\mathcal{J}_{x^*} \subseteq \mathcal{J}_{x^0}$. Fie $\mathbf{x}^1 = \frac{1}{2}\mathbf{x}^0 + \frac{1}{2}\mathbf{x}^*$. Atunci $\mathbf{x}^1$ este o strategie optimă şi $\mathcal{J}_{x^1} = \mathcal{J}_{x^0}$. Construim vectorul

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \varepsilon(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1). \qquad (*)$$

Putem presupune că $x^0_{i_0} - x^1_{i_0} \geqq 0$ (în caz contrar scriem în formula (*) pe $\mathbf{x}^1$ în locul lui $\mathbf{x}^0$ și pe $\mathbf{x}^0$ în locul lui $\mathbf{x}^1$). Alegîndu-l pe ε ca în demonstrația lemei A, se poate arăta că $\mathbf{x}$ este o strategie optimă, $\mathcal{J}_x \subset \mathcal{J}_{x^0}$ și $x_{i_0} > 0$, fapt care contrazice alegerea lui $\mathbf{x}^0$. Astfel lema este demonstrată.

LEMA C. *Considerăm ca matrice de jocuri, submatricea* $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ *corespunzătoare strategiilor optime minime* $\mathbf{x}^m$ *și* $\mathbf{y}^n$. *Afirmăm următoarele:*

a) *Valoarea jocului cu matricea* $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ *este egală cu valoarea jocului cu matricea* $\mathbf{A}$.

b) *Strategiile optime minime* $\mathbf{x}^m$ *și* $\mathbf{y}^n$ *sînt strategii optime și pentru jocul cu matricea* $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$.

c) *Matricea* $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ *nu are în afara strategiilor* $\mathbf{x}^m$ *și* $\mathbf{y}^n$ *nici o altă strategie optimă comună cu* $\mathbf{A}$.

Demonstrație. Pentru orice strategii $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ ale lui $\mathbf{A}$, ale căror restrîngeri pentru $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ rămîn strategii pentru această matrice (adică $\mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{J}_{x^m}$; $\mathcal{J}_y \subseteq \mathcal{J}_{y^n}$), avem:

$$v \geqq \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y}^n = \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)\,\mathbf{y}^n,$$
$$v \leqq \mathbf{x}^m\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^m\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)\mathbf{y},$$

unde v este valoarea jocului $\mathbf{A}$. Întrucît orice strategie a jocului $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ poate fi considerată ca o astfel de restrîngere, rezultă afirmațiile a) și b) ale lemei.

În sfîrșit, din lema A urmează că matricea $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ nu poate avea decît strategiile optime $\mathbf{x}^m$ și $\mathbf{y}^n$ comune cu matricea $\mathbf{A}$, ceea ce demonstrează afirmația c) a lemei.

DEFINIȚIA 2. *Vom numi* n *strategii, convex independente, dacă nici una dintre ele nu poate fi pusă sub forma unei combinații convexe a celorlalte* $n-1$.

LEMA D. *Orice submatrice* $\mathbf{B}$ *a matricii* c.p. $\mathbf{A}$, *avînd* (pentru unul din jucători) $n \geqq 2$ *strategii optime, convex independente, comune cu* $\mathbf{A}$, *conține două submatrici* $\mathbf{B}_1$ *și* $\mathbf{B}_2$, *fiecare avînd* (pentru același jucător) *cel mult* $n-1$ *strategii optime, convex independente, comune cu* $\mathbf{A}$.

Demonstrație. Presupunem că submatricea $\mathbf{B}$ și strategiile optime $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n$ au proprietatea presupusă în lemă. Numim funcția $\omega(\mathbf{x})$ *ordinul* lui $\mathbf{x}$. Strategiile de forma $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^1 + \cdots + c_n\mathbf{x}^n$, unde $c_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ și $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, sînt strategii optime comune pentru $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, de ordin maxim. Se arată ușor că printr-o modificare corespunzătoare a coeficienților combinației convexe se pot obține două strategii optime diferite $\mathbf{x}^0$ și $\mathbf{x}^{00}$ de ordin maxim. Construim vectorii

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \varepsilon_1(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^{00}),$$
$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^0 + \varepsilon_2(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^{00}),$$

unde pe ε_1 și ε_2 îi vom fixa ulterior. Introducem următoarele notații

$$\mathcal{J}_1 = \{j \mid x^0_j - x^{00}_j < 0\},$$
$$\mathcal{J}_2 = \{j \mid x^0_j - x^{00}_j > 0\}.$$

Faptul că nici una dintre mulțimile $\mathcal{J}_1$ și $\mathcal{J}_2$ nu poate fi vidă, urmează din caracterul maxim al ordinului strategiilor $\mathbf{x}^0$ și $\mathbf{x}^{00}$ și din faptul că ele sînt diferite.

Alegem j_1 și j_2 în așa fel ca

$$\frac{x^{00}_{j_1}}{x^0_{j_1}} = \max_{j \in \mathcal{J}_1} \frac{x^{00}_j}{x^0_j}; \quad \frac{x^{00}_{j_2}}{x^0_{j_2}} = \min_{j \in \mathcal{J}_2} \frac{x^{00}_j}{x^0_j}.$$

Punem

$$\varepsilon_1 = -\frac{x^0_{j_1}}{x^{00}_{j_1} - x^{00}_{j_1}}.$$

Observăm că $\mathbf{x}^1$ este o strategie optimă pentru $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, și $x^1_{j_1} = 0$ $(j_1 \in \mathcal{J}_{x^0}$; $\mathcal{J}_{x^0} = \mathcal{J}_{x^{00}})$. Pentru acest j_1 avem $x^0_{j_1} - x^{00}_{j_1} < 0$.

Punem

$$\varepsilon_2 = -\frac{x^0_{j_2}}{x^0_{j_2} - x^{00}_{j_2}}.$$

Observăm că $\mathbf{x}^2$ este o strategie optimă comună pentru $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, $x^2_{j_2} = 0$ $(j_2 \in \mathcal{J}_{x^0})$ și că pentru j_2 avem $x^0_{j_2} - x^{00}_{j_2} > 0$.

Am obținut astfel două strategii optime, $\mathbf{x}^1$ și $\mathbf{x}^2$, comune pentru $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, pentru care avem $x^1_{j_1} = 0$, $x^2_{j_2} = 0$, $j_1 \neq j_2$. Să eliminăm linia j_1 din $\mathbf{B}$ și matricea obținută s-o numim $\mathbf{B}_1$, iar matricea obținută din $\mathbf{B}$ prin eliminarea liniei j_2 o notăm cu $\mathbf{B}_2$. Arătăm că $\mathbf{B}_1$ și $\mathbf{B}_2$ satisfac la cerința teoremei, adică, oricare din ele nu are mai mult de $n-1$ strategii optime, convex independente, comune cu $\mathbf{A}$. Presupunem contrariul: $\mathbf{B}$ are un număr $m > n-1$ de strategii optime, convex independente, comune cu $\mathbf{A}$. Putem lua $m = n$. Fiindcă $x^2_{j_1} > 0$ iar linia j_1 nu aparține lui $\mathbf{B}_1$, urmează că $\mathbf{x}^2$ este convex independentă de cele n strategii optime ale lui $\mathbf{B}_1$ comune cu $\mathbf{A}$; $\mathbf{x}^2$ este o strategie optimă, comună pentru $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, la fel ca celelalte n strategii optime ale lui $\mathbf{B}_1$. Avem astfel $n+1$ strategii optime, convex independente, comune pentru $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, fapt care contrazice presupunerea lemei. Deci lema este demonstrată.

LEMA E. *Dacă avem două strategii optime* $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{x}^{00}$ *astfel ca* $\mathcal{J}_{x^0} = \mathcal{J}_{x^{00}}$, *atunci găsim totdeauna două strategii optime de ordin mai mic,* $\mathbf{x}^1$ *și* $\mathbf{x}^2$, *astfel ca* $\mathbf{x}^0$ *și* $\mathbf{x}^{00}$ *să se poată reprezenta sub forma unei combinații convexe ale acestora.*

Demonstrație. Fie $\mathbf{x}^1$ și $\mathbf{x}^2$ strategiile optime construite ca în lema D. Vom arăta că ele satisfac lemei E. Știm că $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$; de aceea îl putem fixa pe $k > 0$ astfel ca:

$$\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 = 0.$$

Vom arăta că alegîndu-l în mod corespunzător pe λ_1 $(0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1)$, avem:

$$\mathbf{x}^0 = \lambda_1\mathbf{x}^1 + (1 - \lambda_1)\mathbf{x}^2.$$

Fie $\lambda = \frac{1}{1+k}$, atunci putem scrie:

$$\lambda_1 \mathbf{x}^1 + (1 - \lambda_1)\mathbf{x}^2 = \frac{1}{k+1}\mathbf{x}^1 + \frac{k}{k+1}\mathbf{x}^2 = \frac{1}{k+1}[\mathbf{x}^0 + \varepsilon_1(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^{00})] +$$

$$+ \frac{k}{k+1}[\mathbf{x}^0 + \varepsilon_2(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^{00})] = \mathbf{x}^0 + \frac{\varepsilon_1 + k\,\varepsilon_2}{k+1}(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^{00}) = \mathbf{x}^0.$$

La fel putem găsi $\lambda_2 (0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1)$ astfel ca:

$$\mathbf{x}^{00} = \lambda_2 \mathbf{x}^1 + (1 - \lambda_2)\mathbf{x}^2.$$

Fie $\lambda_2 = \frac{1}{1+r}$, unde $r = -\frac{\varepsilon_1 + 1}{\varepsilon_2 + 1}$.

Pentru ca λ_2 să verifice condiția $0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1$, trebuie arătat că $r > 0$. Știm că

$$\varepsilon_2 = -\frac{x^0_{j_2}}{x^0_{j_2} - x^{00}_{j_2}}, \quad \text{unde } x^0_{j_2} - x^{00}_{j_2} > 0,$$

$$\varepsilon_2 + 1 = -\frac{x^0_{j_2}}{x^0_{j_2} - x^{00}_{j_2}} + 1 = -\frac{x^{00}_{j_2}}{x^0_{j_2} - x^{00}_{j_2}} < 0,$$

deci

$$r = -\frac{\varepsilon_1 + 1}{\varepsilon_2 + 1} > 0,$$

$$\lambda_2 \mathbf{x}^1 + (1 - \lambda_2)\mathbf{x}^2 = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1 + 1}{\varepsilon_2 + 1}}\mathbf{x}^1 + \frac{-\frac{\varepsilon_1 + 1}{\varepsilon_2 + 1}}{1 - \frac{\varepsilon_1 + 1}{\varepsilon_2 + 1}}\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^{00}$$

și astfel lema este în întregime demonstrată.

TEOREMA I. *Orice strategie optimă a unei matrice se poate pune sub forma unei combinații convexe a strategiilor optime minime ale acestei matrici.*

Demonstrație. Observăm mai întîi că teorema se enunță pentru matrici oarecare. Este însă ușor de observat că orice matrice de jocuri are o submatrice complet ponderată [1] și că orice strategie optimă pentru matrice este strategie optimă și pentru submatricea complet ponderată a ei. Trebuie să demonstrăm deci că orice strategie a unei matrici complet ponderate poate fi pusă sub forma unei combinații convexe a strategiilor optime minime. Lema E afirmă că orice strategie optimă neminimă se poate pune sub forma unei combinații convexe de strategii de ordin mai mic. De aici urmează că orice strategie optimă a matricii complet ponderate se poate

[1]) Numim submatrice c.p. a lui $\mathbf{M}$, submatricea constînd din liniile cu indicele i și coloanele cu indicele j ale lui $\mathbf{M}$, pentru care găsim cîte o strategie optimă $\mathbf{x}$ respectiv $\mathbf{y}$, astfel ca $x_i > 0$, $y_j > 0$.

pune sub forma unor combinații convexe repetate ale strategiilor optime minime, ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA II. *Numărul strategiilor optime minime este finit.*

Demonstrația teoremei urmează din lema A.

TEOREMA III. *Strategiile optime minime sînt punctele extreme ale mulțimii strategiilor optime.*

Demonstrație. Presupunem contrariul: strategia optimă minimă $\mathbf{x}'''$ se poate pune sub forma

$$\mathbf{x}''' = \lambda \mathbf{x}^1 - (1 - \lambda)\mathbf{x}^2,$$

unde $\mathbf{x}^1$ și $\mathbf{x}^2$ sînt două strategii optime diferite.

Urmează că

$$\mathcal{J}_{\mathbf{x}^1} \subseteq \mathcal{J}_{\mathbf{x}'''} \quad \text{și} \quad \mathcal{J}_{\mathbf{x}^2} \subseteq \mathcal{J}_{\mathbf{x}'''}$$

ceea ce contrazice faptul că $\mathbf{x}'''$ este strategie optimă minimă.

§ 2. Submatrici atașate la submatricile minime

Considerăm matricea complet ponderată $\mathbf{A}$. Fie $\mathbf{x}'''$ și $\mathbf{y}''$ o pereche de strategii optime minime, iar $\mathbf{x}^p$ și $\mathbf{y}^p$ o pereche de strategii optime complet ponderate pentru $\mathbf{A}$. Despre matricea de jocuri $\mathbf{A}(\mathbf{x}''', \mathbf{y}^p)$, respectiv $\mathbf{A}(\mathbf{x}^p, \mathbf{y}'')$ putem afirma următoarele:

LEMA F. a) *Valoarea jocului* $\mathbf{A}(\mathbf{x}''', \mathbf{y}^p)$, *respectiv* $\mathbf{A}(\mathbf{x}^p, \mathbf{y}'')$ *este egală cu valoarea jocului* $\mathbf{A}$.

b) *Strategiile* $\mathbf{x}'''$, $\mathbf{y}''$, $\mathbf{y}^p$, *respectiv* $\mathbf{x}'''$, $\mathbf{x}^p$, $\mathbf{y}''$ *sînt strategii optime pentru* $\mathbf{A}(\mathbf{x}''', \mathbf{y}^p)$, *respectiv* $\mathbf{A}(\mathbf{x}^p, \mathbf{y}'')$.

c) *Strategia* $\mathbf{x}'''$, *respectiv* $\mathbf{y}''$ *este strategie optimă minimă pentru* $\mathbf{A}(\mathbf{x}''', \mathbf{y}^p)$, *respectiv* $\mathbf{A}(\mathbf{x}^p, \mathbf{y}'')$.

Demonstrația se face la fel ca demonstrația lemei C.

Considerăm matricea $\mathbf{A}(\mathbf{x}''', \mathbf{y}^p)$ și construim submatricea $\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''}$ în felul următor:

a) $\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''}$ să conțină submatricea minimă $\mathbf{A}(\mathbf{x}''', \mathbf{y}'')$;

b) să aibă strategia $\mathbf{x}'''$ ca strategie optimă minimă;

c) să fie submatricea de cel mai mic ordin care posedă proprietățile a) și b).

Se arată ușor că orice submatrice a lui $\mathbf{A}$, care conține submatricea minimă $\mathbf{A}(\mathbf{x}''', \mathbf{y}'')$, admite pe $\mathbf{x}'''$ și $\mathbf{y}''$ drept strategii optime, și are aceeași valoare ca și $\mathbf{A}$.

În mod asemănător se poate defini submatricea $\mathbf{B}^{\mathbf{y}''}$.

Submatricea alcătuită din liniile lui $\mathbf{A}$, care aparțin submatricii $\mathbf{B}^{\mathbf{y}''}$, și coloanele lui $\mathbf{A}$, care aparțin submatircii $\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''}$ o vom numi *submatrice de tip* B, atașată submatricii minime $\mathbf{A}(\mathbf{x}''', \mathbf{y}'')$ și o vom nota cu $\mathbf{B}(\mathbf{x}''', \mathbf{y}'')$.

În cele ce urmează vom presupune că valoarea jocului $\mathbf{A}$ diferă de zero : $v \neq 0$.

Lema G. *Sistemul linear*

$$\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^p) = \mathbf{v} \tag{1}$$

are singura soluție $\mathbf{x} = \mathbf{x}^m$ (considerăm $\mathbf{x}^m$ restrîngerea strategiei $\mathbf{x}^m$ pentru $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$).

Demonstrație. Presupunem contrariul : sistemul (1) are încă o soluție $\mathbf{x} = \mathbf{u}$. Construim vectorul

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^m + \varepsilon\,(\mathbf{x}^m - \mathbf{u}),$$

unde pe ε îl alegem atît de mic (dar diferit de zero), ca $x_i^1 \geqslant 0$ pentru $i = 1, \ldots, m$.

Observăm mai întîi că

$$v = \mathbf{u}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^p)\mathbf{y}^n = v \sum_{i=1}^{m} u_i,$$

deci $\sum_{i=1}^{m} u_i = 1$. Prin urmare

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^1 = 1,$$

$$\mathbf{x}_1\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^p) = \mathbf{x}^m\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^p) + \varepsilon\,(\mathbf{x}^m\mathbf{A}(x^m, \mathbf{y}^p) - \mathbf{u}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^p)) = \mathbf{v}.$$

Urmează că $\mathbf{x}^1$ este strategie optimă pentru matricea $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^p)$. Dar $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^m$ și am ajuns astfel la o contradicție cu afirmația c) a lemei F, în baza căreia $\mathbf{x}^m$ este o strategie optimă minimă pentru $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^p)$, și lema este demonstrată.

În mod asemănător se demonstrează că sistemul

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^p, \mathbf{y}^p)\,\mathbf{y} = \mathbf{v} \tag{2}$$

are soluția unică $\mathbf{y} = \mathbf{y}^n$.

Construim submatricea $\mathbf{C}^{\mathbf{x}^m}$ a lui $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ în felul următor :

a) $\mathbf{C}^{\mathbf{x}^m}$ să conțină submatricea minimă $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^p)$;

b) sistemul $\mathbf{x}\,\mathbf{C}^{\mathbf{x}^m} = \mathbf{v}$ să aibă soluție unică ;

c) $\mathbf{C}^{\mathbf{x}^m}$ să fie submatricea de ordin minim care posedă proprietățile a) și b).

În mod asemănător putem defini submatricea $\mathbf{C}^{\mathbf{y}^n}$ a matricii $\mathbf{A}(\mathbf{x}^p, \mathbf{y}^n)$.

Submatricea alcătuită din liniile lui $\mathbf{A}$, care aparțin submatricii $\mathbf{C}^{\mathbf{y}^n}$, și din coloanele lui $\mathbf{A}$, care aparțin submatricii $\mathbf{C}^{\mathbf{x}^m}$, o vom numi *submatrice de tip* C atașată submatricii minime $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ și o vom nota cu $\mathbf{C}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$.

Observăm că submatricile de tip B și de tip C, atașate unei submatrici minime pot să nu fie unice.

Teorema IV. *Submatricea de tip* C *atașată unei submatrici minime, este nesingulară.*

Această teoremă este de fapt cunoscuta teoremă al lui L. S. Shapley și R. N. Snow (vezi [1] și [2]).

Teorema V. *Condiția necesară și suficientă ca două submatrici de tip* B *și* C, *atașate unei submatrici minime, să coincidă, este ca submatricea minimă să fie c.m.*

Necesitatea condiției. Dacă două submatrici de tip B și de tip C atașate submatricii minime $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ coincid, atunci submatricea minimă este c.m.

Presupunem contrariul : submatricile $\mathbf{B}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ și $\mathbf{C}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$, atașate submatricii minime $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$, coincid, iar submatricea minimă nu este c. m. Din teorema 1, [4], urmează că cel puțin una dintre strategiile $\mathbf{x}^m$ și $\mathbf{y}^n$ nu poate fi strategie optimă unică pentru $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$. Să presupunem că în afara strategiei optime $\mathbf{x}^m$ mai avem încă o strategie optimă $\mathbf{x}^1$ pentru $\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$. Urmează din definiția lui $\mathbf{B}^{\mathbf{x}^m}$ și $\mathbf{C}^{\mathbf{x}^m}$ că ele în cazul nostru conțin cel puțin cîte o coloană cu indicele $j \overline{\in} \mathcal{J}_{y^n}$. Din presupunerea $\mathbf{B}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n) = \mathbf{C}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)$ urmează că $\mathbf{C}^{\mathbf{x}^m} = \mathbf{B}^{\mathbf{x}^m}$. Aceasta înseamnă că matricea $\mathbf{B}^{\mathbf{x}^m}(\mathbf{C}^{\mathbf{x}^m})$ are strategia $\mathbf{x}^m$ ca strategie optimă minimă, și totodată sistemul

$$\mathbf{x}\mathbf{B}^{\mathbf{x}^m} = \mathbf{v} \quad (\mathbf{x}\,\mathbf{C}^{\mathbf{x}^m} = \mathbf{v})$$

are unica soluție $\mathbf{x} = \mathbf{x}^m$.

Să eliminăm o coloană $j_0 \overline{\in} \mathcal{J}_{y^n}$ din $\mathbf{B}^{\mathbf{x}^m}$. Fie matricea obținută astfel $\mathbf{B}_1^{\mathbf{x}^m}$. Sistemul

$$\mathbf{x}\,\mathbf{B}_1^{\mathbf{x}^m} = \mathbf{v}$$

pe baza definiției lui $\mathbf{C}^{\mathbf{x}^m}$ mai are cel puțin o soluție $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ în afara lui $\mathbf{x} = \mathbf{x}^m$. Urmează că :

$$(\mathbf{u}\,\mathbf{B}^{\mathbf{x}^m})_j = v \qquad j \neq j_0$$

$$(\mathbf{u}\,\mathbf{B}^{\mathbf{x}^m})_{j_0} = v_1 \qquad v_1 \neq v.$$

Să presupunem $v_1 > v$. Din $v \neq 0$ și $v = \mathbf{u}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^n)\,\mathbf{y}^n = v \sum_{i=1}^{m} u_i$ urmează $\sum_{i=1}^{m} u_i = 1$.

Construim vectorul

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^m + \varepsilon\,(\mathbf{u} - \mathbf{x}^m).$$

Avem

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^1 = 1.$$

Putem alege pe $\varepsilon > 0$ atît de mic, încît să aibă loc $x_i^1 \geqq 0$ pentru toţi indicii i. Avem :

$$\mathbf{x}^1\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''} = \mathbf{x}'''\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''} + \varepsilon\,(\mathbf{u}\,\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''} - \mathbf{x}'''\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''}),$$

$$(\mathbf{x}^1\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''})_j = v \quad \text{pentru } j \neq j_0,$$

$$(\mathbf{x}^1\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''})_{j_0} = (\mathbf{x}'''\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''})_{j_0} + \varepsilon[(\mathbf{u}\,\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''})_{j_0} - (\mathbf{x}'''\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''})_{j_0}] = v + \varepsilon(v_1 - v) > v.$$

De aici urmează că $\mathbf{x}^1$ este o strategie optimă pentru $\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''}$. Dar $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}'''$ şi acest lucru contrazice alegerea matricii $\mathbf{B}^{\mathbf{x}'''}$. În mod asemănător ajungem la o contradicţie presupunînd că $v_1 < v$, alegîndu-l pe $\varepsilon < 0$ şi destul de mic în valoare absolută pentru ca să avem $x_i^1 \geqq 0$ pentru toţi i. Deci $\mathbf{C}^{\mathbf{x}'''} \neq \mathbf{B}^{\mathbf{x}'''}$, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Astfel necesitatea condiţiei teoremei este demonstrată.

Suficienţa condiţiei urmează nemijlocit din teorema 2 din [4]. Observăm totodată că în cazul cînd submatricea minimă este c.m., toate submatricile de tip B şi C ataşate ei coincid cu însăşi submatricea minimă.

Observaţie. În cazul cînd valoarea jocului A este egală cu zero, sîntem conduşi la definiţii, leme şi teoreme cu caracterul teoremei 3 din [4], folosind procedeul aplicat la demonstrarea acestei teoreme.

О СТРУКТУРЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Считаем действительную матрицу как платежную матрицу игры двух лиц с нулевой суммой. В первой части труда вводится новый метод исследования структуры действительных матриц путём определения „минимальных оптимальных стратегий" и „минимальных подматриц". Лемы А, В и С касаются некоторых свойств минимальных подматриц. Лемы D и Е связаны с разложением неминимальных оптимальных стратегий в выпуклую комбинацию некоторых оптимальных стратегий более низкого „порядка", т. е. с меньшим числом ненулевых составляющих. Теоремы I, II и III являются, собственно говоря, новыми толкованиями некоторых известных теорем.

Вторая часть труда занимается подматрицами, присоединёнными к минимальным подматрицам, содержащими минимальную подматрицу, к которой они присоединяются и обладающими определёнными свойствами. Теорема IV, теорема Л. С. Шаплей и Р. Н. Сноу, которая только цитируется в труде, показывает существенное свойство некоторых подматриц (называемых в труде подматрицами типа С). Теорема V касается связи этих подматриц с другим классом введенных в труде подматриц (называемых подматрицами типа *B*). Она излагается следующим образом

ТЕОРЕМА V. *Необходимым и достаточным условием для того чтобы две подматрицы типа В и типа С, присоединенных к минимальной подматрице, совпадали, является то, чтобы минимальная подматрица была полносмешанной.*

SUR LA STRUCTURE DES MATRICES RÉELLES DU POINT DE VUE DE LA THÉORIE DES JEUX

RÉSUMÉ

On considère la matrice réelle comme une matrice de payements d'un jeu de deux personnes à somme nulle. Dans la première partie du travail on introduit une nouvelle méthode pour l'étude de la structure des matrices réelles, en définissant les „stratégies optima minimales" et les „sous-matrices minimales". Les lemmes A, B et C se réfèrent à quelques propriétés des sous-matrices minimales. Les lemmes D et E ont trait à la décomposition des stratégies optima non minimales dans la combinaison convexe de certaines stratégies optima d'„ordre" plus petit, c'est-à-dire avec un nombre plus petit de composantes non nulles. Les théorèmes I, II et III sont, en fait, de nouvelles interprétaions de théorèmes connus.

La deuxième partie du travail s'occupe de sous-matrices attachées aux sous-matrices minimales, sous-matrices qui contiennent la sous-matrice minima à laquelle elles s'attachent, et possèdent certaines propriétés. Le théorème IV, théorème de L.S. Shapley et R. N. Snow, que nous nous bornons d'énoncer dans le travail, révèle une propriété essentielle de quelques sous-matrices attachées (démmées dans ce travail sous-matrices du type C). Le théorème V a trait à la liaison de ces matrices avec une autre classe de sous-matrices introduites dans le travail (appelées sousmatrices du type B). Le théorème est énoncé de la manière suivante :

THÉORÈME V. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices du type* B *et du type* C *attachées à une sous-matrice minimale coincident est que la sousmatrice minimale soit complètement mixte.*

BIBLIOGRAFIE

1. Karlin S., *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*, I, cap. 2, Pergamon Press, London-Paris, 1959.
2. Kuhn H. W., Tucker A. W., *Contribution to the theory of games*. I, Princeton Univ. Press, p. 27—37.
3. Mieses R., von, *Über J. von Neumannsche Theorie der Spiele*. Mathem. Nach., **9**, fasc. 6, 363—378 (1953).
4. Nemeth A. B., *Asupra unor proprietăţi ale matricilor complet ponderate şi complet mixte* (în acest volum).
5. Sherman S., *Games and subgames*. Proc. Amer. Math. Soc., **2**, 186—187 (1951).

Primit la 27.XI.1961