ASUPRA REPREZENTĂRII INTEGRALE A RESTULUI DIN FORMULA LUI TAYLOR DE DOUĂ VARIABILE

DE

D. D. STANCU

(Cluj)

După cum este bine cunoscut, din cărţile de analiză matematică, formula lui Taylor pentru funcţiile de două şi mai multe variabile se deduce printr-un artificiu foarte ingenios datorit lui Cauchy, prin care dezvoltarea tayloriană a funcţiei respective se reduce la desvoltarea tayloriană a unei funcţii de o singură variabilă.

În lucrarea de faţă vom căuta să deducem această dezvoltare pe o cale directă, fără să mai apelăm la artificiul lui Cauchy. Rezultatul nou va consta în obţinerea restului formulei lui Taylor de două variabile sub formă integrală. Această reprezentare diferă de cea care se găseşte folosind metoda lui Cauchy şi formula lui Taylor de o variabilă, cu restul scris sub formă integrală. În principiu ne vom folosi de o aceeaşi metodă care ne-a condus în lucrarea [1] la o formulă de tip Taylor tot pentru funcţiile de două variabile, însă în care restul conţine doar trei termeni.

1. Fie

$$P_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} A_{i,k} x^i y^k \tag{1}$$

un polinom oarecare de gradul n în raport cu ambele variabile x şi y; să notăm cu p şi q două numere întregi nenegative şi cel mult egale cu n.

Calculînd derivata parţială de ordinul (p, q) a acestui polinom, se obţine

$$\frac{\partial^{p+q} P_n(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} = \sum_{i=p}^{n} \sum_{k=q}^{n-i} N_{i,k}^{p,q} A_{i,k} x^{i-p} y^{k-q}, \tag{2}$$

unde

$$N_{i,k}^{p,q} = i(i-1) \ldots (i-p+1)\, k(k-1) \ldots (k-q+1).$$

Dacă se înlocuiesc în (2) $x = y = 0$ şi apoi se iau $p = 0, 1, \ldots, n$, iar $q = 0, 1, \ldots, n - p$, se obţin următoarele expresii pentru coeficienţii polinomului (1)

$$A_{i,k} = \frac{1}{i\,!\,k\,!}\,\frac{\partial^{i+k} P_n(0, 0)}{\partial x^i\, \partial y^k}.$$

Rezultă că polinomul (1) se poate scrie şi sub forma următoare

$$P_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{x^i y^k}{i\,!\,k\,!} \cdot \frac{\partial^{i+k} P_n(0, 0)}{\partial x^i\, \partial y^k}. \tag{3}$$

2. Folosind acest rezultat se poate obţine imediat o dezvoltare după puterile lui $x - a$ şi $y - b$, a polinomului considerat, de forma

$$P_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} B_{i,k} (x - a)^i (y - b)^k,$$

unde a şi b sînt două numere reale oarecare. Pentru aceasta să facem schimbările $x = u + a$, $y = v + b$; obţinem

$$P_n(u + a, v + b) = Q_n(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} B_{i,k} u^i v^k.$$

Pe baza formulei (3) avem

$$B_{i,k} = \frac{1}{i!\,k!}\,\frac{\partial^{i+k} Q_n(0, 0)}{\partial x^i \partial y^k} = \frac{1}{i!\,k!}\,\frac{\partial^{i+k} P_n(a, b)}{\partial x^i \partial y^k}.$$

Deci, mai general, avem următoarea dezvoltare tayloriană

$$P_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(x - a)^i (y - b)^k}{i\,!\,k\,!}\,\frac{\partial^{i+k} P_n(a, b)}{\partial x^i \partial y^k}. \tag{4}$$

3. Vom considera acum o funcţie reală de două variabile reale $f(x, y)$, despre care presupunem că admite derivate parţiale, pînă la ordinul $n + 1$, continue, pe un domeniu D care conţine punctul $A(a, b)$.

Se pune problema aproximării funcţiei $f(x, y)$ pe o vecinătate din D a punctului $A(a, b)$, prin polinomul următor

$$T_n(f; x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(x - a)^i (y - b)^k}{i\,!\,k\,!}\,\frac{\partial^{i+k} f(a, b)}{\partial x^i \partial y^k}, \tag{5}$$

format după modelul polinomului (4).

Acest polinom este caracterizat de proprietăţile

$$\frac{\partial^{p+q} T_n(f; a, b)}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{\partial^{p+q} f(a, b)}{\partial x^p \partial y^q} \begin{pmatrix} p = 0, 1, \ldots, n \\ q = 0, 1, \ldots, n - p \end{pmatrix} \tag{6}$$

Fie

$$R_n(f; x, y) = R(x, y) = f(x, y) - T_n(f; x, y).$$

Se observă că avem

$$\frac{\partial^{p+q} R(a, b)}{\partial x^p \partial y^q} = 0 \quad \begin{pmatrix} p = 0, 1, \ldots, n \\ q = 0, 1, \ldots, n - p \end{pmatrix} \tag{7}$$

şi

$$\frac{\partial^{n+1} R(x, y)}{\partial x^{n+1-i} \partial y^i} = \frac{\partial^{n+1} f(x, y)}{\partial x^{n+1-i} \partial y^i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n + 1). \tag{8}$$

4. Să ne ocupăm acum de evaluarea restului în formula lui Taylor care ne apare aici

$$f(x, y) = T_n(f; x, y) + R_n(f; x, y), \tag{9}$$

presupunînd că dreptunghiul definit de inegalităţile $a \leqslant t \leqslant x$, $b \leqslant \tau \leqslant y$ este conţinut în domeniul D.

Dacă ţinem seama de (7), se observă că putem scrie

$$R(x, y) = R(x, y) - R(a, b) = \int_a^x \frac{\partial R(t, y)}{\partial t}\, dt + \int_b^y \frac{\partial R(a, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau. \tag{10}$$

Vom face acum unele transformări ale ultimului termen din această sumă, socotindu-l pe y fix. Pe baza lui (7) şi a formulei de integrare prin părţi, putem scrie succesiv

$$\int_b^y \frac{\partial R(a, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau = -\int_b^y \frac{\partial R(a, \tau)}{\partial \tau}\, d(y - \tau) = -\left[(y - \tau)\frac{\partial R(a, \tau)}{\partial \tau}\right]_b^y +$$

$$+ \int_b^y (y - \tau)\frac{\partial^2 R(a, \tau)}{\partial \tau^2}\, d\tau = \int_b^y (y - \tau)\frac{\partial^2 R(a, \tau)}{\partial \tau^2}\, d\tau = -\frac{1}{2}\int_b^y \frac{\partial^2 R(a, \tau)}{\partial \tau^2}\, d(y - \tau)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(y - \tau)^2 \frac{\partial^2 R(a, \tau)}{\partial \tau^2}\right]_b^y + \frac{1}{2}\int_b^y (y - \tau)^2 \frac{\partial^3 R(a, \tau)}{\partial \tau^3}\, d\tau =$$

$$= \int_b^y \frac{(y - \tau)^2}{2\,!}\,\frac{\partial^3 R(a, \tau)}{\partial \tau^3}\, d\tau = \cdots = \int_b^x \frac{(y - \tau)^{n-1}}{(n - 1)\,!}\,\frac{\partial^n R(a, \tau)}{\partial \tau^n}\, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{n!}\int_b^y \frac{\partial^n R(a, \tau)}{\partial \tau^n}\, d(y - \tau)^n = -\frac{1}{n!}\left[(y - \tau)^n \frac{\partial^n R(a, \tau)}{\partial \tau^n}\right]_b^y +$$

$$+ \frac{1}{n!}\int_b^y (y - \tau)^n \frac{\partial^{n+1} R(a, \tau)}{\partial \tau^{n+1}}\, d\tau = \int_b^y \frac{(y - \tau)^n}{n!}\,\frac{\partial^{n+1} R(a, \tau)}{\partial \tau^{n+1}}\, d\tau.$$

Dacă ţinem seama de (8), putem deduce următoarea evaluare a celui de al doilea termen din membrul drept al formulei (10)

$$\int_b^y \frac{R(a,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau = \int_b^y \frac{(y-\tau)^n}{n!}\frac{\partial^{n+1}f(a,\tau)}{\partial\tau^{n+1}}\,d\tau. \tag{11}$$

Să căutăm acum o evaluare a primului termen din membrul drept al formulei (10). Avem

$$\int_a^x \frac{\partial R(t,y)}{\partial t}\,dt = -\int_a^x \frac{\partial R(t,y)}{\partial t}\,d(x-t) = -\left[(x-t)\frac{\partial R(t,y)}{\partial t}\right]_a^x +$$

$$+\int_a^x (x-t)\frac{\partial^2 R(t,y)}{\partial t^2}\,dt = (x-a)\frac{\partial R(a,y)}{\partial x} + \int_a^x (x-t)\frac{\partial^2 R(t,y)}{\partial t^2}\,dt. \tag{N$_1$}$$

În continuare să ne ocupăm de ultimul termen al acestei formule. Avem

$$\int_a^x (x-t)\frac{\partial^2 R(t,y)}{\partial t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_a^x \frac{\partial^2 R(t,y)}{\partial t^2}\,d(x-t)^2 = -\frac{1}{2}\left[(x-t)^2\frac{\partial^2 R(t,y)}{\partial t^2}\right]_a^x +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2\frac{\partial^3 R(t,y)}{\partial t^3}\,dt = \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{\partial^2 R(t,y)}{\partial x^2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}\frac{\partial^3 R(t,y)}{\partial t^3}\,dt. \tag{N$_2$}$$

În mod analog se găseşte că avem

$$\int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}\frac{\partial^3 R(t,y)}{\partial t^3}\,dt = \frac{(x-a)^3}{3!}\frac{\partial^3 R(a,y)}{\partial x^3} + \int_a^x \frac{(x-t)^3}{3!}\frac{\partial^4 R(t,y)}{\partial t^4}\,dt. \tag{N$_3$}$$

Continuînd în acelaşi fel se obţine

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^n R(t,y)}{\partial t^n}\,dt = \frac{(x-a)^n}{n!}\frac{\partial^n R(a,y)}{\partial x^n} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{\partial^{n+1} R(t,y)}{\partial t^{n+1}}\,dt. \tag{N$_n$}$$

Dacă avem în vedere egalităţile (8), în această formulă se poate face înlocuirea

$$\frac{\partial^{n+1}R(t,y)}{\partial t^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1}f(t,y)}{\partial t^{n+1}}.$$

Ţinînd seama de (N_2), (N_3), ..., (N_n), formula (N_1) devine

$$\int_a^x \frac{\partial R(t,y)}{\partial t}\,dt = \frac{x-a}{1!}\frac{\partial R^2(a,y)}{\partial x} + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{\partial^2 R(a,y)}{\partial x^2} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\frac{\partial^n R(a,y)}{\partial x^n} +$$

$$+\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{\partial^{n+1}f(t,y)}{\partial t^{n-1}}\,dt. \tag{12}$$

Să ne ocupăm acum de evaluarea unui termen de forma $\dfrac{\partial^j R(a,y)}{\partial x^j}$. Folosindu-ne iar de formula de integrare prin părţi şi ţinînd seama de formulele (7) şi (8), vom putea scrie succesiv

$$\frac{\partial^j R(a,y)}{\partial x^j} = \int_b^y \frac{\partial^{j+1}R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau}\,d\tau = -\int_b^y \frac{\partial^{j+1}R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau}\,d\tau = -\int_b^y \frac{\partial^{j+1}R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau}\,d(y-\tau) =$$

$$= -\left[(y-\tau)\frac{\partial^{j+1}R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau}\right]_b^y + \int_b^y (y-\tau)\frac{\partial^{j+2}R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau^2}\,d\tau = \int_b^y (y-\tau)\frac{\partial^{j+2}R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau^2}\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_b^y \frac{\partial^{j+2}R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau^2}\,d(y-\tau)^2 = \int_b^y \frac{(y-\tau)^2}{2!}\frac{\partial^{j+3}R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau^3}\,d\tau = \ldots =$$

$$= \int_b^y \frac{(y-\tau)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\frac{\partial^n R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau^{n-j}}\,d\tau = -\frac{1}{(n-j)!}\int_b^y \frac{\partial^n R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau^{n-j}}\,d(y-\tau)^{n-j} =$$

$$= \int_b^y \frac{(y-\tau)^{n-j}}{(n-j)!}\frac{\partial^{n+1}R(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau^{n-j+1}}\,d\tau = \int_b^y \frac{(y-\tau)^{n-j}}{(n-j)!}\frac{\partial^{n+1}f(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau^{n-j+1}}\,d\tau.$$

Rezultă că avem

$$\frac{(x-a)^j}{j!}\frac{\partial^j R(a,y)}{\partial x^j} = \frac{(x-a)^j}{j!}\int_b^y \frac{(y-\tau)^{n-j}}{(n-j)!}\frac{\partial^{n+1}f(a,\tau)}{\partial x^j\partial\tau^{n-j+1}}\,d\tau.$$

Făcînd $j = 1, 2, \ldots, n$ şi înlocuind în (12) obţinem

$$\int_a^x \frac{\partial R(t,y)}{\partial t}\,dt = \int_b^y \left[\frac{(x-a)(y-\tau)^{n-1}}{1!\,(n-1)!}\frac{\partial^{n+1}f(a,\tau)}{\partial x\,\partial\tau^n} + \frac{(x-a)^2(y-\tau)^{n-2}}{2!\,(n-2)!}\frac{\partial^{n+1}f(a,\tau)}{\partial x^2\partial\tau^{n-1}} +\right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!\,0!}\frac{\partial^{n+1}f(a,\tau)}{\partial x^n\partial\tau}\right]d\tau + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{\partial^{n+1}f(t,y)}{\partial t^{n+1}}\,dt. \tag{13}$$

Ţinînd seama de (10), (11) şi (13) putem scrie, în sfîrşit, următoarea expresie integrală a restului formulei (9) a lui Taylor

$$R_n(f;x,y) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{\partial^{n+1}f(t,y)}{\partial t^{n+1}}\,dt + \int_b^y \left[\sum_{j=0}^{n}\frac{(x-a)^{n-j}(y-\tau)^j}{(n-j)!\,j!}\frac{\partial^{n+1}f(a,\tau)}{\partial x^{n-j}\partial\tau^{j+1}}\right]d\tau. \tag{14}$$

Această formulă, care conţine tot $n+2$ termeni ca şi formula dată de Cauchy pentru acelaşi rest, ne dă indicaţii noi asupra structurii restului formulei lui Taylor pentru funcţiile de două variabile.

5. Să vedem acum ce rezultat se poate obţine dacă, folosind artificiul lui Cauchy, despre care am mai amintit la începutul lucrării, se consideră expresia integrală a restului formulei lui Taylor de o variabilă, de care se face uz.

După cum e bine ştiut, pentru dezvoltarea tayloriană a lui $f(x, y)$ după puterile lui $x-a$ şi $y-b$, se consideră funcţia

$$\varphi(t)=f(a+\overline{x-a}\, t,\; b+\overline{y-b}\; t),$$

t fiind o nouă variabilă din intervalul $[0, 1]$. Se mai ştie că dacă se dezvoltă această funcţie după formula lui Mac-Laurin, cu restul sub formă integrală, se obţine

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}t+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{1}{n!}\int_0^t (t-u)^n \varphi^{(n+1)}(u)\, du. \tag{1'5}$$

Apoi avem

$$\varphi^{(s)}(t)=\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)} f(a+\overline{x-a}\, t,\; b+\overline{y-b}\, t).$$

Făcînd $t=1$ şi înlocuind în (15) se obţine tocmai formula lui Taylor

$$f(x, y)=T_n(f; x, y)+R_n(f; x, y),$$

unde în acest caz avem

$$R_n(f; x, y)=$$

$$=\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)} f(a+\overline{x-a}\, u,\; b+\overline{y-b}\, u)\, du. \tag{15}$$

Am obţinut în acest fel o altă expresie integrală a restului formulei lui Taylor, expresie deosebită de cea de la (14).

Observaţii. 1⁰. Între formula (14) şi formula care ne dă sub formă de integrală restul formulei lui Taylor de o variabilă, există o analogie strînsă. Dar din (14), prin aplicarea formulei întîia a mediei calcului integral, se obţine doar că

$$R_n(f; x, y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)^{n+1}\frac{\partial^{n+1} f(\xi, y)}{\partial x^{n+1}}+\right.$$

$$+\binom{n+1}{1}(x-a)^n(y-b)\frac{\partial^{n+1} f(a, \eta_1)}{\partial x^n \partial y}+\ldots+$$

$$\left.+\binom{n+1}{n}(x-a)(y-b)^n\frac{\partial^{n+1} f(a, \eta_n)}{\partial x\, \partial y^n}+\binom{n+1}{n+1}(y-b)^n\frac{\partial^{n+1} f(a, \eta_{n+1})}{\partial y^{n+1}}\right],$$

unde $\xi \in (a, x)$, $\eta_i \in (b, y)$. Nu rezultă direct că derivatele se pot lua într-un acelaşi punct (ξ, η).

2⁰. Formula (15) are avantajul că din ea rezultă uşor formula lui Cauchy. Într-adevăr, deoarece pe intervalul de integrare avem $1-u \geqslant 0$, pe baza formulei mediei avem

$$R_n(f; x, y)=\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)} f(\xi, \eta)\int_0^1 (1-u)^n du,$$

unde $\xi \in (a, x)$, $\eta \in (b, y)$. Cum

$$\int_0^1 (1-u)^n\, du=\frac{1}{n+1},$$

rezultă tocmai formula lui Cauchy

$$R_n(f; x, y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)} f(\xi, \eta). \tag{16}$$

Formulele (14) şi (15) au avantajul, faţă de formula (16), că nu introduc nici o necunoscută. Ele pot fi cu folos utilizate la evaluarea restului în diverse formule liniare de aproximare de două variabile independente, al căror grad global de exactitate este n.

Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj,
Catedra de analiză

О ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОСТАТКА ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Вводится прямым путём формула Тейлора с двумя переменными. Остаток этой формулы получается в интегральном виде (14). К этому виду остатка приходим исходя от (10), применяя формулу интегрирования по частям и используя соотношения (7) и (8). Если применяется способ Коши, хорошо известный из учебников математического анализа, и используется интегральное выражение остатка применяемой формулы Мак-Лорена получается (15).

SUR LA REPRÉSENTATION INTÉGRALE DU RESTE DE LA FORMULE DE TAYLOR DE DEUX VARIABLES

RÉSUMÉ

On déduit par une voie directe la formule de Taylor de deux variables. On obtient le reste de cette formule sous forme d'intégrale (14). On aboutit à cette forme du reste en partant de (10), en appliquant la formule d'intégration par parties et en faisant usage des relations (7) et (8). En appliquant l'artifice de Cauchy, bien connu des livres d'analyse mathématique, et en utilisant l'expression intégrale du reste de la formule de Mac-Laurin, dont on fait usage, on obtient la représentation (15).

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Stancu, *Expresia integrală a restului într-o formulă de tip Taylor pentru funcţiile de două variabile*. Studii şi cercet. de mat. (Cluj), **11**, *1*, 177–183 (1960).

Primit la 15. V. 1961.