O OBSERVAȚIE ASUPRA SISTEMELOR ELIPTICE

DE

P. SZILÁGYI

(Cluj)

1. În anii din urmă se depun eforturi susținute pentru elaborarea unei teorii generale a ecuațiilor cu derivate parțiale. Rezultatele cele mai frumoase în această direcție s-au obținut tratînd ecuațiile cu derivate parțiale în anumite spații normate, de preferință în spații Hilbert. Pentru toată teoria ecuațiilor de tip eliptic are un rol fundamental următoarea inegalitate, care caracterizează aceste ecuații

$$\|D^{2m}u\| \leqslant K(\|Au\|^2 + \|u\|^2), \tag{1}$$

unde Au reprezintă operatorul cu derivate parțiale iar

$$D^{\mu} \equiv D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2} \cdots D_n^{\mu_n}$$

și

$$D_i^{\mu_i} \equiv (-i)^{\mu_i} \frac{\partial^{\mu_i}}{\partial x_i^{\mu_i}},$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ fiind niște numere întregi nenegative, pentru care $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = \mu$.

Spațiul considerat este $L_2(\Omega)$, deci

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega} |\varphi|^2 d\Omega.$$

Inegalitatea (1) este de bază în lucrările [1—3, 5].

În lucrarea de față vom stabili inegalitatea (1) pentru sisteme de ecuații cu derivate parțiale.

2. Fie Ω un domeniu mărginit în spațiul euclidian cu n dimensiuni, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punct în acest domeniu, $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_N(x))$, unde $u_i(x)$ este o funcție complexă definită în Ω.

Notăm cu $\overset{0}{C}_{2m}(\Omega)$ mulțimea funcțiilor definite în Ω, care admit toate derivatele continue pînă la ordinul $2m$ inclusiv, și fiecare funcție se anulează în afara unui compact conținut în Ω. Vom spune că $u \in \overset{0}{C}_{2m}(\Omega)$, dacă $u_i \in \overset{0}{C}_{2m}(\Omega)$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Spațiul de bază este spațiul Hilbert $L_2(\Omega)$, cu produsul scalar

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} u_i \bar{v}_i \, d\Omega. \tag{2}$$

Este evident că pentru elementele lui $\overset{0}{C}_{2m}(\Omega)$ putem considera și următoarele notații

$$|u|_r^2 = \int_{\Omega} \sum_{\mu=r} |D^{\mu} u|^2 d\Omega = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mu=r} |D^{\mu} u_i|^2 d\Omega. \tag{3}$$

Rezultatele noastre sînt valabile pentru sistemele

$$\begin{aligned}
A_1 u &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=2m} a_{1j}^{\mu} D^{\mu} u_j, \\
A_2 u &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=2m} a_{2j}^{\mu} D^{\mu} u_j, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_N u &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=2m} a_{Nj}^{\mu} D^{\mu} u_j.
\end{aligned} \tag{4}$$

Însă pentru simplificarea expunerii, vom considera cazul sistemului de ordinul doi cu două ecuații, în plan. Fie deci sistemul

$$\begin{aligned}
A_1 u &= \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{1j}^{kl} D_k D_l u_j, \\
A_2 u &= \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{2j}^{kl} D_k D_l u_j.
\end{aligned} \tag{5}$$

Polinomul caracteristic al sistemului este

$$\mathcal{P}(\xi) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k,l=1}^{2} a_{11}^{kl} \xi_k \xi_l & \sum\limits_{k,l=1}^{2} a_{12}^{kl} \xi_k \xi_l \\ \sum\limits_{k,l=1}^{2} a_{21}^{kl} \xi_k \xi_l & \sum\limits_{k,l=1}^{2} a_{22}^{kl} \xi_k \xi_l \end{vmatrix}, \tag{6}$$

unde $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, ξ_1, ξ_2 fiind niște numere reale arbitrare.

Se știe că sistemul (5) se numește eliptic [4] dacă polinomul caracteristic $\mathcal{P}(\xi)$ nu se anulează pentru nici un $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ real nenul.

Rezultatul de bază al lucrării îl formulăm în următoarea teoremă :

TEOREMĂ. *Condiția necesară și suficientă pentru ca să existe o constantă pozitivă K astfel încît inegalitatea*

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|Au\|^2 + \|u\|^2), \tag{7}$$

să aibă loc pentru orice $u = (u_1, u_2)$ din $\overset{0}{C}(\Omega)$, este ca A să fie eliptic.

Înainte de a trece la demonstrarea efectivă a teoremei, vom introduce cîteva notații și vom stabili unele relații ajutătoare.

Fie

$$P_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l \qquad (i, j = 1, 2).$$

Polinomul caracteristic se exprimă cu ajutorul polinoamelor P_{ij} în felul următor

$$\mathcal{P}(\xi) = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} \tag{8}$$

Exprimăm $|\mathcal{P}(\xi)|^2$ într-o formă adecvată scopului nostru :

$$|\mathcal{P}(\xi)|^2 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{11}\bar{P}_{11} + P_{21}\bar{P}_{21} & P_{11}\bar{P}_{12} + P_{21}\bar{P}_{22} \\ P_{12}\bar{P}_{11} + P_{22}\bar{P}_{21} & P_{12}\bar{P}_{12} + P_{22}\bar{P}_{22} \end{vmatrix}$$

Introducînd notațiile

$$\mathcal{P}_{kl} = P_{1k}\bar{P}_{1l} + P_{2k}\bar{P}_{2l} \qquad (k, l = 1, 2), \tag{9}$$

obținem

$$|\mathcal{P}(\xi)|^2 = \begin{vmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Subliniem inegalitățile $\mathcal{P}_{11} \geqslant 0$, $\mathcal{P}_{22} \geqslant 0$ precum și identitățile $\mathcal{P}_{kl} = \bar{\mathcal{P}}_{lk}$, care rezultă imediat din (9).

Pentru demonstrarea teoremei, ne vom folosi de următoarea lemă :

LEMĂ. *Dacă sistemul este eliptic și $\xi \neq 0$, atunci*

$$\mathcal{P}_{11} > 0, \quad \mathcal{P}_{22} > 0 \qquad \text{și} \qquad \mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} - \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{21} > 0.$$

Într-adevăr, din elipticitatea sistemului și din (10) rezultă

$$0 < |\mathcal{P}(\xi)|^2 = \mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} - \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{21} = \mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} - |\mathcal{P}_{12}|^2 < \mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22},$$

de unde rezultă $\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} - \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{21} > 0$. Luînd în considerare inegalitățile deja obținute anterior $\mathcal{P}_{11} \geqslant 0$, $\mathcal{P}_{22} \geqslant 0$, rezultă și $\mathcal{P}_{11} > 0$, $\mathcal{P}_{22} > 0$.

Fie $u \in \overset{0}{C}_2(\Omega)$ pe care o considerăm prelungită pe tot spațiul euclidiau $E^{(2)}$, punînd $u \equiv 0$ în exteriorul lui Ω. Notăm cu $u^*(\xi) = (u_1^*(\xi), u_2^*(\xi))$ transformata Fourier a lui u, deci

$$u_i^*(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int \exp\{-i\,\xi x\} u_i(x) d\Omega \quad (i = 1,2),$$

şi

$$u_i(x) = \frac{1}{2\pi}\int \exp\{i\xi x\}\, u_i^*(\xi)\, d\xi \qquad (i = 1, 2),$$

unde $\xi x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$, iar integrala este considerată pe tot spaţiul $E^{(2)}$. Avem

$$D_l D_k u_i = \frac{1}{2\pi}\int \xi_k \xi_l \exp\{i\xi x\}\, u_i^*(\xi) d\xi \qquad (i = 1, 2),$$

de unde rezultă că transformata Fourier a lui $D_l D_k u_i$ este

$$(D_l D_k u_i)^* = \xi_l \xi_k u_i^*(\xi) \qquad (i = 1, 2)$$

şi

$$\begin{aligned}(A_1 u)^* &= \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{1j}^{kl}\xi_k\xi_l u_j^* = \sum_{j=1}^{2} P_{1j} u_j^*,\\ (A_2 u)^* &= \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{2j}^{kl}\xi_k\xi_l u_j^* = \sum_{j=1}^{2} P_{2j} u_j^*.\end{aligned} \tag{11}$$

În baza egalităţii lui Parseval

$$\|Au\|^2 = \int_\Omega \{|A_1 u|^2 + |A_2 u|^2\} d\Omega = \int \{|(A_1 u)^*|^2 + |(A_2 u)^*|^2\} d\xi =$$

$$= \int \{|\sum_{j=1}^{2} P_{1j} u_j^*|^2 + |\sum_{j=1}^{2} P_{2j} u_j^*|^2\} d\xi = \int \sum_{j,k=1}^{2} \mathcal{P}_{jk} u_j^* \bar{u}_k^* d\xi,$$

adică

$$\|Au\|^2 = \int \sum_{j,k=1}^{2} \mathcal{P}_{jk} u_j^* \bar{u}_k^* d\xi. \tag{12}$$

Menţionăm că sub integrală avem o formă pătratică pozitiv definită, ceea ce reiese din lema demonstrată.

*

Trecem la demonstrarea efectivă a teoremei enunţate mai înainte. *Suficienţa condiţiei.* Presupunem că operatorul A este eliptic. Demonstrăm că există o constantă $K > 0$, astfel încît (7) să aibă loc.

Considerăm sistemul particular

$$\begin{aligned}B_1 u &= D_k D_l u_1,\\ B_2 u &= D_k D_l u_2.\end{aligned} \tag{13}$$

Lui P_{ik} în cazul de faţă îi corespund

$$R_{11} = \xi_k \xi_l, \quad R_{21} = 0, \quad R_{21} = 0, \quad R_{22} = \xi_k \xi_l.$$

La fel lui $\mathcal{P}$ îi corespund

$$\mathcal{R}_{11} = \xi_k^2 \xi_l^2, \quad \mathcal{R}_{12} = 0, \quad \mathcal{R}_{21} = 0, \quad \mathcal{R}_{22} = \xi_k^2 \xi_l^2.$$

Pentru rezultatul final este suficient să demonstrăm că se poate alege o constantă $K > 0$, astfel încît

$$\sum_{i,j=1}^{2} (KP_{ij} - R_{ij})\, u_i^* \bar{u}_j^* \geqslant 0, \tag{14}$$

pentru orice $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ real. Într-adevăr, dacă inegalitatea (14) este adevărată pentru un K ales, atunci

$$\|D_l D_k u\|^2 = \|Bu\|^2 = \int \sum_{i,j=1}^{2} \mathcal{R}_{ij} u_i^* \bar{u}_j^* d\xi \leqslant K \int \sum_{i,j=1}^{2} \mathcal{P}_{ij} u_j^* \bar{u}_i^* d\xi = K\|Au\|^2. \tag{15}$$

Însă

$$|u|_2^2 = \sum_{k,l=1}^{2} \|D_k D_l u\|^2,$$

deci

$$|u|_2^2 \leqslant K4\|Au\|^2,$$

sau

$$|u|_2^2 \leqslant 4K(\|Au\|^2 + \|u\|^2).$$

Prin urmare, totul revine la demonstrarea inegalităţii (14) care este echivalentă cu următoarele inegalităţi

$$K\mathcal{P}_{11} - \mathcal{R}_{11} \geqslant 0, \tag{16}$$

$$\begin{vmatrix} K\mathcal{P}_{11} - \mathcal{R}_{11} & K\mathcal{P}_{12} - \mathcal{R}_{12} \\ K\mathcal{P}_{21} - \mathcal{R}_{21} & K\mathcal{P}_{22} - \mathcal{R}_{22} \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{17}$$

Pentru aceste notăm

$$M = \min_{\xi_1^2+\xi_2^2=1} \mathcal{P}_{11},$$

$$N = \max_{\xi_1^2+\xi_2^2=1} \mathcal{R}_{11}.$$

Observăm mai departe că $M > 0$, fiindcă conform lemei avem $\mathcal{P}_{11} > 0$; $\mathcal{R}_{11} \geqslant 0$, deoarece $\mathcal{R}_{11} = |R_{11}|^2 + |R_{12}|^2$, deci şi $N \geqslant 0$. Alegem K_1 astfel încît

$$N \leqslant K_1 M,$$

prin urmare şi

$$\mathcal{R}_{11} \leqslant K_1 \mathcal{P}_{11}$$

pe sfera $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$. Dar $\mathcal{R}_{11}$ și $\mathcal{P}_{11}$ fiind polinoame omogene în ξ_1 și ξ_2 de același grad, obținem inegalitatea (16) pentru orice $\xi \neq 0$.

Pentru demonstrarea inegalității (17), este suficient să arătăm că există un K_2 astfel încît

$$K_2^2 (\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} - \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{21}) - K_2(\mathcal{P}_{11}\mathcal{R}_{22} + \mathcal{P}_{22}\mathcal{R}_{11}) + \mathcal{R}_{11}\mathcal{P}_{22} \geqslant 0$$

să aibă loc pentru orice $\xi \neq 0$ și real, ceea ce este clar dacă observăm că $\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} - \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{21} > 0$ conform lemei, și că întreaga expresie este omogenă în raport cu (ξ_1, ξ_2).

Alegînd $K = \max(K_1, K_2)$, obținem inegalitățile (16) și (17).

Necesitatea condiției. Presupunem deci existența unui $K > 0$, astfel încît inegalitate a (7)să aibă loc pentru orice $u \in \overset{0}{C}_2 (\Omega)$. Vom arăta că

$$\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} - \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{21} > 0,$$

de unde în baza relației (10), rezultă că operatorul A este eliptic.

Fie v o funcție arbitrară din $\overset{0}{C}_2(\Omega)$, diferită de 0 și fie $u = \exp\{i\xi x\}\, v$. Este evident că $u \in \overset{0}{C}_2(\Omega)$. Avem

$$A_h u = \exp\{i \xi x\} \left[\sum_{j,k,l=1}^{2} a_{hj}^{kl} (\xi_k \xi_l v_j + \xi_l D_k v_j + D_k D_l v_j) \right] \quad (i = 1, 2)$$

și

$$B_h u = D_1 D_2 u_h = (\xi_1 \xi_2 v_h + \xi_1 D_2 v_h + \xi_2 D_1 v_h + D_1 D_2 v_h) \exp\{i \xi x\}.$$

Inegalitatea (7) fiind adevărată, cu atît mai mult este adevărată și inegalitatea

$$\|D_1 D_2 u\|^2 \leqslant K(\|Au\|^2 + \|u\|^2),$$

deci

$$\int_\Omega |\exp\{i\xi x\}|^2 \{|\xi_1 \xi_2 v_1 + \xi_1 D_2 v_1 + \xi_2 D_1 v_1 + D_1 D_2 v_1|^2 +$$

$$+ |\xi_1 \xi_2 v_2 + \xi_1 D_2 v_2 + \xi_2 D_1 v_2 + D_1 D_2 v_2|^2\} d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant K \int_\Omega |\exp\{i\xi x\}|^2 \{|P_{11} v_1 + P_{12} v_2 + \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{1j}^{kl} (\xi_i D_k v_j + D_k D_l v_j)|^2 +$$

$$+ |P_{21} v_1 + P_{22} v_2 + \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{2j}^{kl} (\xi_l D_k v_j + D_k D_l v_j)|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2 \Big\} d\Omega.$$

Înlocuim pe ξ prin $\lambda\xi$, pe urmă împărțim inegalitatea obținută cu λ^4 și considerăm $\lambda \to \infty$. Astfel obținem

$$\int_\Omega \xi_1^2 \xi_2^2 (|v_1|^2 + |v_2|^2) d\Omega \leqslant K \int_\Omega \{|P_{11} v_1 + P_{12} v_2|^2 + |P_{21} v_1 + P_{22} v_2|^2\} d\Omega,$$

de unde rezultă

$$\int_\Omega \xi_1^2 \xi_2^2 (|v_1|^2 + |v_2|^2)\, d\Omega \leqslant K \int_\Omega \mathcal{P}_{ij} v_i \bar{v}_j \, d\Omega.$$

Făcînd același raționament pentru $\|D_1^2 u\|$, $\|D_2 D_1 u\|^2$, $\|D_2^2 u\|^2$, prin adunare se obține:

$$\sum_{i,j=1}^{2} K(\mathcal{P}_{ij} - \mathcal{R}_{ij}) \int_\Omega v_i \bar{v}_j d\Omega \geqslant 0, \tag{18}$$

unde $\mathcal{R}_{11} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 > 0$, $\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{21} = 0$ și $\mathcal{R}_{22} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 > 0$ pentru orice $\xi \neq 0$ real.

De aici rezultă că forma pătratică

$$\sum_{i,j=1}^{2} (K\mathcal{P}_{ij} - \mathcal{R}_{ij})\, \alpha_i \bar{\alpha}_j$$

este nenegativă pentru orice (α_1, α_2). Într-adevăr, alegem $w = (w_1, w_2) \in \overset{0}{C}_2(\Omega)$ astfel încît

$$\int_\Omega w_i \bar{w}_j dx = 1 \qquad (i, j = 1, 2)$$

și fie $v_i = \alpha_i w_i$. Din (18) obținem

$$\sum_{i,j=1}^{2} (K\mathcal{P}_{ij} - \mathcal{R}_{ij}) \alpha_i \bar{\alpha}_j \geqslant 0, \tag{19}$$

care este echivalentă cu (16) și (17). Însă din (19) rezultă

$$K\mathcal{P}_{11} - \mathcal{R}_{11} \geqslant 0, \tag{20}$$

$$K^2(\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} - \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{21}) - K(\mathcal{P}_{11}\mathcal{R}_{22} + \mathcal{P}_{22}\mathcal{R}_{11}) + \mathcal{R}_{11}\mathcal{R}_{22} \geqslant 0. \tag{21}$$

Dar $\mathcal{R}_{11} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 > 0$, $\mathcal{R}_{22} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 > 0$. În baza relației (20) $\mathcal{P}_{11} > 0$, prin urmare și $\mathcal{P}_{11}\mathcal{R}_{22} + \mathcal{P}_{22}\mathcal{R}_{11} > 0$. Observăm că (7) are loc pentru orice $\overline{K}$ mai mare decît K. Alegînd $\overline{K}$ destul de mare, vom avea

$$-\overline{K}(\mathcal{P}_{11}\mathcal{R}_{22} + \mathcal{P}_{22}\mathcal{R}_{11}) + \mathcal{R}_{22}\mathcal{P}_{11} < 0,$$

deci

$$\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} - \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{21} > 0$$

pentru orice vector $\xi \neq 0$ real, ceea ce după cum am menționat, înseamnă elipticitatea operatorului A.

Universitatea „Babeș-Bolyai" Cluj,
Catedra de ecuații diferențiale

ЗАМЕЧАНИЕ О ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается система уравнений с частными производными (4) и пусть $\overset{0}{C}_{2m}(\Omega)$ множество функций, определенных на Ω, допускающих непрерывные производные до порядка $2m$ включительно, и каждая функция обращается в нуль вне одного компакта, находящегося в Ω. Основным результатом труда является следующая теорема:

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы существовало положительная константа K, так чтобы неравенство

$$|u|^2_{2m} \leqslant K(\|Au\|^2 + \|u\|^2),$$

где

$$|u|^2_{2m} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mu=2m} |D^\mu u_i|^2 \, d\Omega,$$

имело место для любой функции $u \in \overset{0}{C}_{2m}(\Omega)$, *является то чтобы A был эллиптическим.*

UNE REMARQUE SUR LES SYSTÈMES ELLIPTIQUES

RÉSUMÉ

On considère le système d'équations aux dérivées partielles (4), et on désigne par $\overset{0}{C}_{2m}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définies dans Ω qui admettent toutes les dérivées continues jusqu'à l'ordre $2m$ y compris ; chaque fonction s'annule en dehors d'une compact contenu dans Ω. Le résultat fondamental du travail est le théorème suivant :

TEOREMA. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une constante positive K telle que l'inégalité*

$$|u|^2_{2m} \leqslant K(\|Au\|^2 + \|u\|^2),$$

où

$$|u|^2_{2m} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mu=2m} |D^\mu u_i|^2 \, d\Omega,$$

ait lieu pour toute fonction $u \in \overset{0}{C}_{2m}(\Omega)$, *est que A soit elliptique.*

BIBLIOGRAFIE

1. L. Gårding L., *Dirichlet's problem for linear elliptic partial diferential equations.* Math Scand., **1**, 55–72 (1953).
2. Гусева О. В., *О граничных задачах для сильно эллиптических системах.* Докл. А.Н. С.С.С.Р., **102**, 1069—1072 (1953).
3. L. Hönmander, *On the theory oj general partial differential operators.* Math., **94**, 161–284 (1955).
4. Петровский И. П., *О системах дифференциальных уравнений, все решения которых аналитичны.* Докл. А.Н С.С.С.Р., **17** (1937).
5. M. Schechter, *Coerciveness of linear partial diff. operators for functions satisfying zero Dirichlet-type boundary data.* Comm. Pure and Appl. Math., **11**. *2*, 153–171 (1958).

Primit la 11. I. 1962.