

NOMOGRAME CU TRANSPARENT ORIENTAT PENTRU SISTEME RAMIFICATE

DE

LASCU BAL
(Cluj)

1. Se știe că în problema rezolvării aproximative a ecuațiilor cu mai multe de trei variabile se urmărește ca prin introducerea unor variabile auxiliare să se formeze sisteme de ecuații echivalente cu ecuația dată, compuse din ecuații cu trei variabile. Fiecare ecuație putându-se rezolva cu o nomogramă reticulară, ecuația inițială se rezolvă cu un sistem de astfel de nomograme [2, 8, 9].

Sistemul de nomograme reticulare care formează nomograma ecuației date poate fi alcătuit dintr-o succesiune liniară de nomograme simple sau mai multe înlănțuiri cu ramuri. Din acest motiv, nomogramă compusă, astfel formată se numește *sistem în lanț* sau *sistem ramificat* (figurile 1–2).

În acest caz ecuațiile date admit gruparea variabilelor în funcții de cîte două variabile. Condițiile necesare și suficiente pentru ca o ecuație dată să admită separarea variabilelor sub această formă au fost date în lucrările [3, 4].

În prezenta notă ne vom ocupa de ecuațiile cu 4–8 variabile, care admit separarea variabilelor sub următoarele forme :

$$F(\varphi_{12}, \varphi_{34}) = 0, \text{ sau } f_{12} = f_{34}. \quad (1)$$

$$z_5 = F(\varphi_{12}, \varphi_{34}), \quad (2)$$

$$\varphi_{56} = F(\varphi_{12}, \varphi_{34}), \quad (3)$$

$$z_7 = F[\Phi(\varphi_{12}, \varphi_{34}), \varphi_{56}], \quad (4)$$

$$\varphi_{78} = F[\Phi(\varphi_{12}, \varphi_{34}), \varphi_{56}]. \quad (5)$$

Pentru fiecare din aceste ecuații vom da nomograme cu transparent orientat, pe care le considerăm mai simple atât în utilizare cît și în construcție.

Nomogramele cu transparent orientat au o răspîndire destul de restrînsă și au constituit obiectul unor studii teoretice izolate [1, 10]. Cele mai multe nomograme întâlnite sunt nomogramele cu puncte aliniate și nomogramele cu rețele.

Acum cîțiva ani, G. S. Hovanski a reluat studiul nomogramelor cu transparent orientat și prin introducerea unor considerații noi a îmbunătățit substanțial aceste nomograme. Prin mărirea numărului de contacte de rezolvare și studiul transformărilor pe care le admit, se permite introducerea parametrilor care îmbunătățesc însușirile nomogramei [5, 6].

G. S. Hovanski [7] consideră nomogramele cu transparent orientat cu următoarele ecuații de structură

$$M_{12} = M'_{32} - N'_{34} = N'_{89}, \quad P_{56} \equiv P'_9, \quad (6)$$

$$M_{12} \equiv M'_{78}; \quad N_{34} \equiv N'_{9,10}; \quad P_{56} \equiv P'_{11,12}, \quad (7)$$

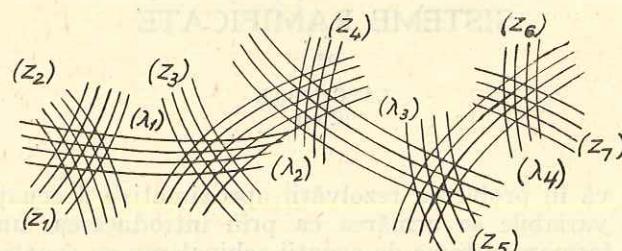


Fig. 1

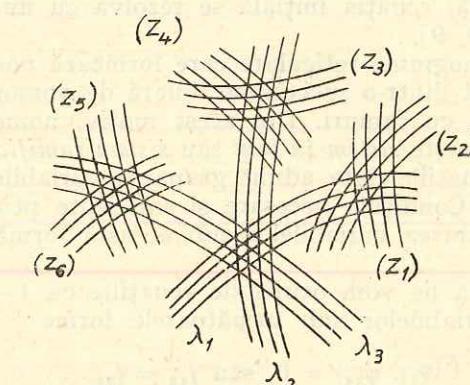


Fig. 2

În care primul contact este un contact de poziție și celelalte sînt contacte de rezolvare. Aceste contacte stabilesc următoarele relații între coordonatele punctelor în contact $M_{ij}(f_{ij}, g_{ij})$ (fig. 3):

$$f_{12} - f_7 = f_{34} - f_8 = f_{56} - f_9, \quad (8)$$

$$g_{12} - g_7 = g_{34} - g_8 = g_{56} - g_9,$$

$$f_{12} - f_{78} = f_{34} - f_{9,10} = f_{56} - f_{11,12}, \quad (9)$$

$$g_{12} - g_{78} = g_{34} - g_{9,10} = g_{56} - g_{11,12}.$$

Aceste sisteme se numesc *sisteme fundamentale*. Dacă o ecuație sau un sistem de ecuații se poate aduce la aceste forme, atunci construcția nomogramei rezultă cu ușurință. Ecuațiile elementelor nomogramei în cele două plane sunt date în tabelele următoare pentru nomograma (7):

Planul fix

Coord. <i>x</i>	Cîmpul binar $a_0 + \mu_x(f_{12} + \delta_x g_{12})$	Cîmpul binar $a_0 + a + \mu_x(f_{34} + \delta_x g_{34})$	Cîmpul binar $a_0 + c + \mu_x(f_{56} + \delta_x g_{56})$
<i>y</i>	$b_0 + \mu_y(\delta_y f_{12} + g_{12})$	$b_0 + b + \mu_y(\delta_y f_{34} + g_{34})$	$b_0 + d + \mu_y(\delta_y f_{56} + g_{56})$

Planul mobil

Coord. <i>x</i>	Cîmpul binar $a'_0 + \mu_x(f_{87} + \delta_x g_{87})$	Cîmpul $a'_0 + a + \mu_x(f_{8,10} + \delta_x g_9)$	Cîmpul $a'_0 + c + \mu_x(f_{11,12} + \delta_x g_{11,12})$
<i>y</i>	$b'_0 + \mu_y(\delta_y f_{87} + g_{87})$	$b'_0 + b + \mu_y(\delta_y f_{9,10} + g_{9,10})$	$b'_0 + d + \mu_y(\delta_y f_{11,12} + g_{11,12})$

Parametrii introdusi au semnificații geometrice bine determinate și servesc la repartizarea avantajoasa a elementelor cotate pe cele două plane.

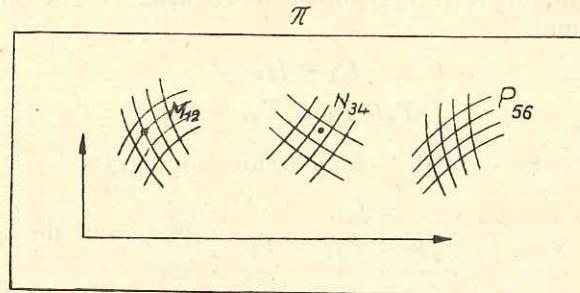
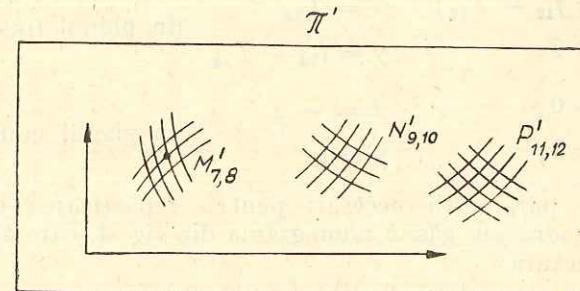


Fig. 3

Aducerea ecuației date sau a sistemului de ecuații date la forma fundamentală se face în multe cazuri prin introducerea unor funcții și variabile auxiliare care de asemenea ajută la simplificarea figurilor.

Aplicăm aceste considerații generale în vederea construirii nomogramelor cu transparent orientat pentru sistemele ramificate.

2. Sistemul ramificat cel mai simplu corespunde ecuației cu patru variabile care admite separarea

$$F[\varphi(z_1, z_2), \psi(z_3, z_4)] = 0 \text{ sau } f_{12} = f_{34} \quad (1')$$

se poate reprezenta simplu și în mai multe feluri cu transparent orientat.

Să introducem cîteva funcții și variabile auxiliare

$$f_{12} = T_{12} + T_{34} + \alpha = f_{34} \quad (10)$$

și să formăm cu ajutorul lor ecuațiile sistemului fundamental

$$f_{12} - T_{12} = T_{34} + \alpha,$$

$$T_{12} = f_{34} - T_{34} - \alpha.$$

În acest caz nomograma cu transparent orientat corespunzătoare, are elementele sale date prin ecuațiile :

$$\begin{aligned} x &= f_{12} - T_{12}; & x &= T_{34} & (\text{în planul fix}) \\ y &= T_{12}; & y &= f_{34} - T_{34} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} x &= 0; & x &= -\alpha & (\text{în planul mobil}) \\ y &= 0; & y &= \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

Introducind parametrii necesari pentru repartizarea convenabilă a elementelor nomogramei, găsim nomograma din fig. 4, care are următoarea formulă de structură :

$$A \bowtie (z_1, z_2); I \bowtie (z_3, z_4).$$

Sistemul fundamental corespunzător ecuației (1') se mai poate scrie și sub altă formă:

$$f_{12} = f_{34},$$

$$T_1 - T_3 = T_{34} - \gamma,$$

care ne conduce la ecuațiile elementelor nomogramei

$$\begin{aligned} x &= f_{12} & x &= f_{34}, & (\text{în planul de bază}) \\ y &= T_1 & y &= T_{34} + T_3, \end{aligned} \quad (13)$$

și

$$\begin{aligned} x &= 0 & x &= 0, & (\text{în planul transparent}). \\ y &= 0 & y &= -\gamma, \end{aligned} \quad (14)$$

Nomograma are ecuația de structură

$$A \bowtie (z_1, z_2); I \bowtie (z^1, z_4)$$

și este reprezentată în fig. 5.

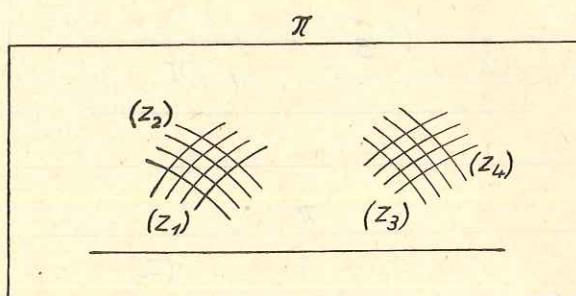
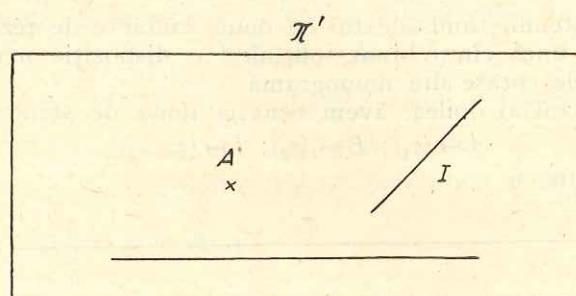


Fig. 4

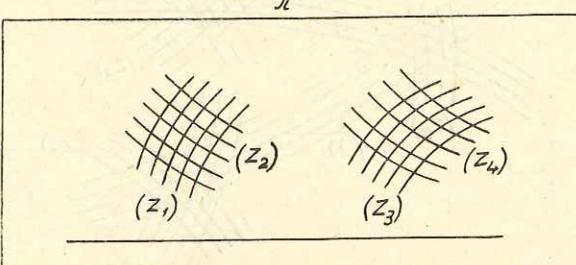
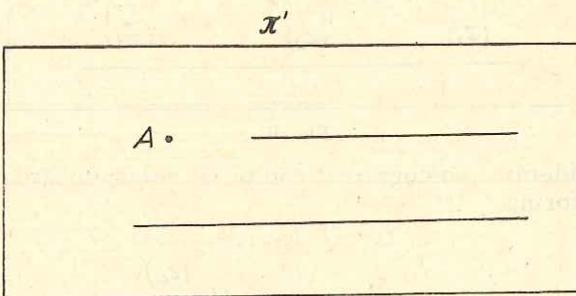


Fig. 5

Folosind sistemul fundamental cu două contacte de rezolvare, putem separa familiile unui cîmp binar, obținînd o dispoziție mai avantajoasă pentru elementele cotate din nomogramă.

Astfel în cazul al doilea, avem ecuația nouă de structură

$$A \vdash (z_1); B \vdash (z_2); I \vdash (z_3, z_4),$$

cu desenul din fig. 6.

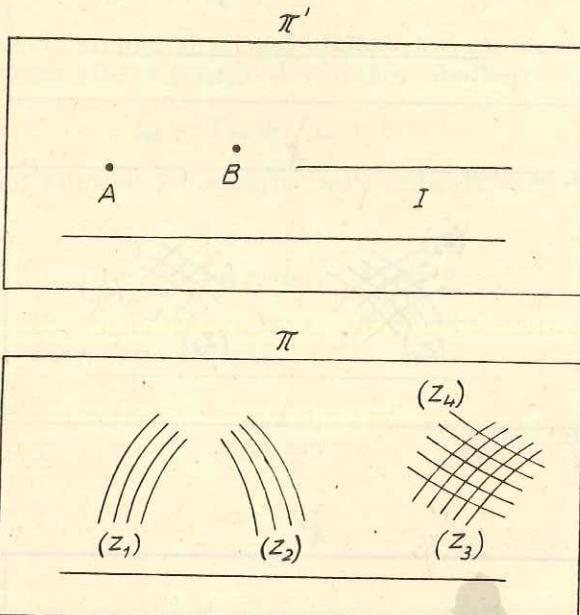


Fig. 6

3. Să considerăm nomograma compusă corespunzătoare ecuației cu 5 variabile de forma

$$f_5 = F(f_{12}, f_{34}), \quad (2')$$

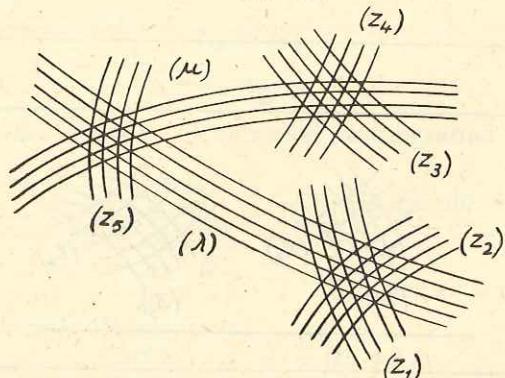


Fig. 7

a cărei construcție și funcționare rezultă din sistemul echivalent

$$\begin{aligned} F(\lambda, \mu) &= f_5, \\ f_{12} &= \lambda, \\ f_{34} &= \mu. \end{aligned} \quad (15)$$

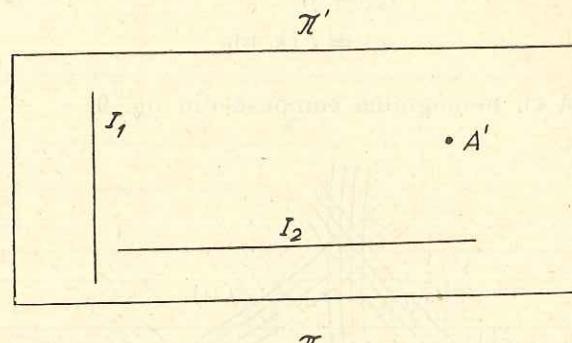
El se poate reprezenta schematic (fig. 7) prin nomograma compusă ramificată.

Făcînd în ecuația (2') notațiile

$$\begin{aligned} M &= f_{12}; \quad N = f_{34}, \\ \text{obținem} \quad f_5 &= F(M, N). \end{aligned} \quad (15')$$

Introducînd funcții și variabile auxiliare, sistemul (15') îl putem aduce la forma sistemului fundamental

$$\begin{aligned} M &= T_3 - \alpha = f_{12}, \\ N &= f_{34} = T_2 - \beta, \\ \text{sau} \end{aligned} \quad (16)$$



π

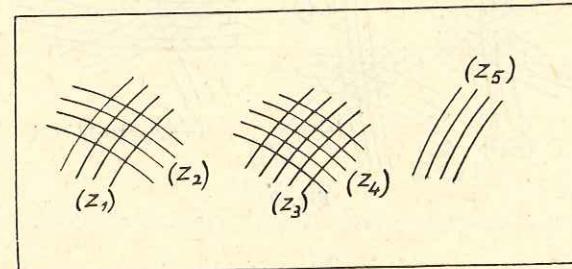


Fig. 8

Acesta (16) ne dă ecuațiile elementelor nomogramei cu transparent, corespunzătoare nomogramei compuse de mai sus

$$\begin{aligned} x &= T_3; \quad x = f_{12}; \quad x = M, \\ y &= f_{34}; \quad y = T_2; \quad y = N, \quad (\text{în planul de bază}) \end{aligned} \quad (17)$$

și

$$\begin{aligned} x = 0; \quad x = 0; \quad x = -\alpha, \\ y = 0; \quad y = \beta; \quad y = 0, \end{aligned} \quad (\text{în planul transparent}). \quad (18)$$

Nomograma are ecuația de structură

$$I_1 \vdash (z_1, z_2); \quad I_2 \vdash (z_3, z_4); \quad A' \vdash (z_5)$$

și este dată în fig. 8.

4. Pentru ecuațiile cu 6 variabile care se reprezintă cu nomogramă compusă, putem de asemenea construi nomogramă cu transparent.

Fie ecuația

$$f_{56} = F(f_{12}, f_{34}), \quad (3')$$

care este echivalentă cu sistemul

$$\begin{aligned} f_{12} &= \lambda, \\ f_{34} &= \mu, \\ f_{56} &= \nu, \\ \nu &= F(\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (19)$$

Ea se reprezintă cu nomograma compusă din fig. 9.

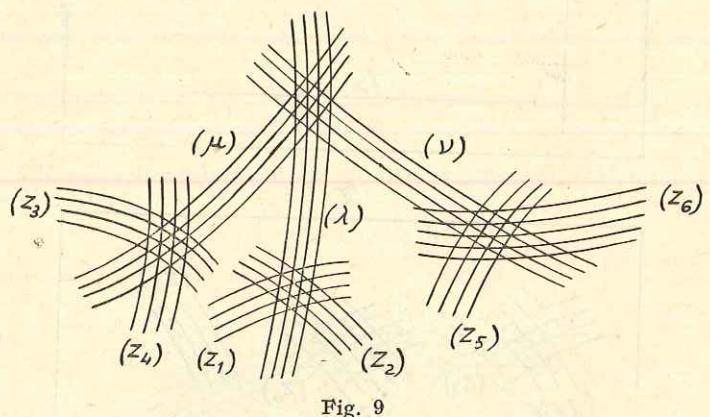


Fig. 9

Notând

$$M = f_{12}; \quad N = f_{34},$$

obținem sistemul

$$\begin{aligned} f_{56} &= F(M, N), \\ M &= f_{12}; \quad N = f_{34}, \end{aligned} \quad (20)$$

echivalent cu ecuația inițială. Acest sistem se poate reprezenta cu două nomograme cu transparent orientat. Considerind la început sistemul

$$N = f_{12}; \quad M = f_{34},$$

cu variabilele auxiliare, constatăm că el conduce ca și (16) la sistemul fundamental

$$\begin{aligned} T_{12} - \alpha &= f_{34} = M \\ f_{12} &= T_{34} - \beta = N \end{aligned}$$

care conduce la nomograma din fig. 10,

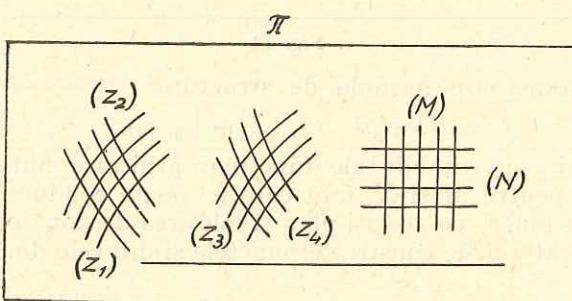
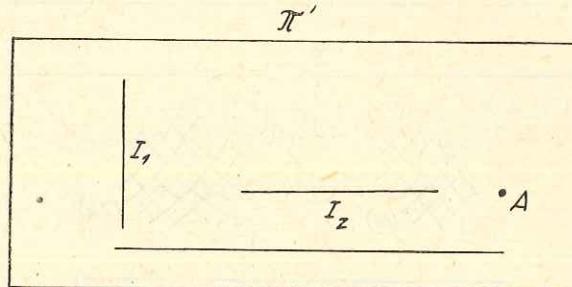


Fig. 10

cu ecuația de structură

$$I_1 \vdash (z_1, z_2); \quad I_2 \vdash (z_3, z_4); \quad A \vdash (M, N).$$

Cu ajutorul variabilelor auxiliare M și N găsite se trece la rezolvarea ecuației

$$f_{56} = F(M, N),$$

care conduce la sistemul fundamental

$$\begin{aligned} F(M, N) &= f_{56} \quad \text{sau} \quad F_{MN} - 0 = f_{56} - 0 \\ T_N - T_5 &= T_{56} - \beta \quad \text{sau} \quad T_N - 0 = T_{56} + T_5 - \beta. \end{aligned} \quad (21)$$

Acestui sistem fundamental îi corespunde nomograma cu transparent orientat (fig. 11):

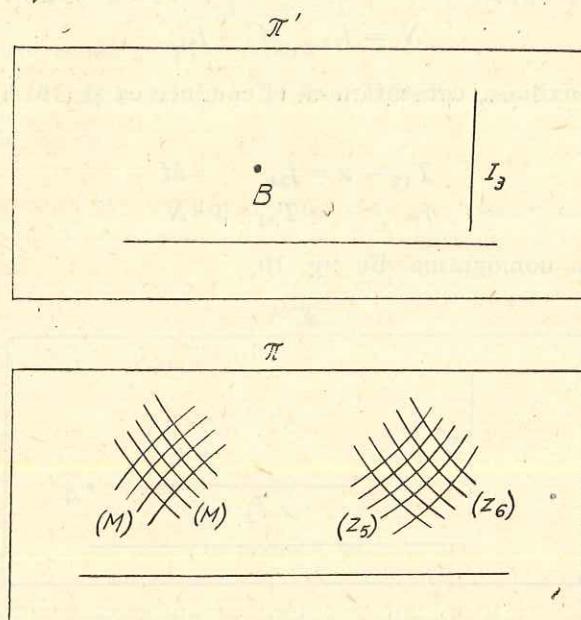


Fig. 11

Această nomogramă are formula de structură

$$B \sqsubseteq (M, N); \quad I_3 \sqsubseteq (z_5, z_6).$$

Prin alegeri convenabile ale funcțiilor arbitrar putem obține aceeași cîmp binar pentru M și N , fapt care ne poate conduce la trecerea tuturor cîmpurilor binare pe același plan și folosirea de două ori a unui singur transparent pe care să fie construite punctele și din cele două transparente.

5. Pentru ecuațiile cu 7 și 8 variabile care se reprezintă cu nomograme compuse se pot de asemenea construi cîte două nomograme cu transparent, succesive.

Pentru ecuația

$$f_7 = F[\varphi(f_{12}, f_{34}), f_{56}] \quad (4')$$

care se mai poate scrie

$$\varphi(f_{12}, f_{34}) = \psi(z_7, f_{56}) \quad (5')$$

se consideră variabila auxiliară ξ și se construiesc cele două nomograme cu transparent pentru ecuațiile cu variabilele

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(f_{12}, f_{34}), \\ \xi &= \psi(z_7, f_{56}), \end{aligned} \quad (22)$$

ca în cazul studiat.

În sfîrșit ecuația cu 8 variabile

$$f_{78} = F[\varphi(f_{12}, f_{34}), f_{56}],$$

care se poate rezolva printr-o nomogramă compusă, punîndu-se sub forma

$$\varphi(f_{12}, f_{34}) = \psi(f_{56}, f_{78}), \quad (5'')$$

se poate reprezenta de asemenea cu două nomograme cu transparent orientat.

Sistemele ramificate corespunzătoare ecuațiilor cu un număr mai mare de variabile conduc la utilizarea succesivă a unui număr destul de mari de nomograme cu transparent orientat, ceea ce le răpește valoarea practică.

НОМОГРАМЫ С ОРИЕНТИРОВАННЫМ ТРАНСПАРАНТОМ ДЛЯ РАЗВЕТВЛЕННЫХ СИСТЕМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей статье автор рассматривает уравнения вида (1)–(5), которые решаются при помощи составных номограмм и составляет схемы соответствующих номограмм с ориентированным транспарантом.

Номограммы с ориентированным транспарантом для уравнений (1) и (2) содержат только одну прозрачную плоскость, в то время как номограммы остальных уравнений (3)–(5) содержат две подвижных плоскости.

NOMOGRAMMES À TRANSPARENT ORIENTÉ POUR DES SYSTÈMES RAMIFIÉS

RÉSUMÉ

Dans cet article l'auteur considère les équations de la forme (1)–(5), que l'on résout avec des nomogrammes composés, et établit les schémas des nomogrammes à transparent orienté, correspondants.

Les nomogrammes à transparent orienté pour les équations (1) et (2) contiennent un seul plan transparent, tandis que les nomogrammes des autres équations (3)–(5) contiennent deux plans mobiles.

BIBLIOGRAFIE

1. Bal L., *Nomograme cu transparent orientat pentru ecuații cu patru și cinci variabile*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), VIII, 1–2, 169–176 (1957).
2. Bal L., Radó F., *Lecții de nomografie*, Edit. Tehnică, București, 1956.
3. Bal L., Rusu I., *Asupra unei grupări de variabile în vederea construirii nomogramelor compuse*. Studii și cercet. științ., V, 3–4, 45–49 (1954).
4. Ермолова О. В., Ученые записки. М.Г.У., 28, 43–56 (1939).
5. Хованский Г. С., *Номограммы с ориентированным транспарантом*. ГИТТЛ, Москва, 1957.
6. — *Некоторые вопросы практической номографии*. Вычисл. математика, сб. 4, 3–103 (1959).
7. — *Исследование возможности преобразования номограмм с прозрачным ориентированным транспарантом*. Вычислит. мат. сб. 7, 133–150 (1961).
8. Hruška Václav, *Počet graficky a graficko-mechanicky*. Prírod. Vydavatelství, Praha, 1952.
9. Pleskot Václav, *Nomografie a graficky počet v technicke praxi*. Statní nakladatelství technické literatury, Praha, 1956.
10. Margoulis W., *Les abaques à transparent orienté ou tournant*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.

Primit la 3. VII. 1962.