UN PROCEDEU DE TIP RUNGE-KUTTA, DE ORDINUL $n+4$ ($n \geqslant 2$) DE EXACTITATE, PE DOUĂ NODURI, DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

DE

A. COŢIU

(Cluj)

Să considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul întîi

$$z' = \varphi(x, z), \tag{1}$$

şi fie $z(x)$ integrala ei, care satisface la condiţia iniţială

$$z(x_0) = z_0. \tag{2}$$

Presupunem că sînt satisfăcute condiţiile care asigură existenţa, unicitatea şi analiticitatea integralei $z(x)$, pe intervalul închis şi finit $[x_0, x_0+a]$.

1. Căutîndu-se procedee de tip Runge-Kutta, care să dea erori cît mai mici şi să fie pe cît posibil simple, s-a ajuns în acest fel, la foarte multe procedee, fără să existe însă pînă nu de mult o metodă sistematică de lucru pentru a le determina. Problema găsirii unei astfel de metode a fost rezolvată de prof. D. V. Ionescu [7, 8], care a arătat cum se pot construi procedee de tip Runge-Kutta, de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întîi, a sistemelor de astfel de ecuaţii şi a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n, astfel încît restul să aibă un ordin propus dinainte în h, unde h este pasul de integrare. Aplicarea procedeelor care se obţin prin această metodă necesită multe substituţii în ecuaţia diferenţială, iar erorile de rotunjire, care apar datorită acestui fapt, nu pot fi neglijate, ele acumulîndu-se în decursul calculelor.

De aceea, prof. D. V. Ionescu sugerează ideea să se construiască procedee de ordinele cinci, şase ş.a.m.d., de exactitate [1], a căror aplicare să necesite însă un număr mai mic de substituţii în ecuaţia diferenţială, decît procedeele care se obţin prin metoda indicată în lucrările [7, 8].

2. În această lucrare, ţinînd seamă de observaţiile de la § 1 şi urmînd ideile lui E. F e h l b e r g [5, 6], vom arăta că integrarea ecuaţiei diferenţiale (1), cu condiţia iniţială (2), se poate reduce printr-o anumită transformare, la integrarea unei alte ecuaţii diferenţiale, tot de ordinul întîi, pentru care se poate construi un procedeu de tip Runge-Kutta, pe două noduri din intervalul de integrare, de ordinul $n + 4$ ($n \geqslant 2$) de exactitate. Formulele care se folosesc pentru aplicarea acestui procedeu conţin cinci constante; aplicarea procedeului necesită numai două substituţii în ecuaţia diferenţială transformată. Nodurile şi coeficienţii care intervin în aceste formule sînt numere iraţionale.

Trecerea de la integrala aproximativă a ecuaţiei diferenţiale transforformată, la integrala aproximativă a ecuaţiei diferenţiale iniţială (1), este simplă.

Din formulele ce se folosesc pentru aplicarea procedeului dat în lucrarea de faţă, pentru $n = 2, 3, 4$ se obţin formulele care se folosesc pentru aplicarea procedeelor de ordinele şase, şapte, respectiv opt de exactitate, stabilite cu alte ocazii [2, 3, 4].

3. Vom arăta la început cum se poate transforma convenabil ecuaţia diferenţială dată.

În locul funcţiei $z(x)$, integrală a ecuaţiei diferenţiale (1), cu condiţia iniţială (2), introducem printr-o transformare o nouă funcţie $y(x)$, astfel încît să satisfacă la următoarele condiţii:

1°. $y(x)$ să fie integrală a ecuaţiei diferenţiale

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

cu aceeaşi condiţie iniţială

$$y(x_0) = y_0 = z_0; \tag{4}$$

2°. integrala $y(x)$ şi funcţia $f(x, y)$ să satisfacă pe nodul x_0, la condiţiile

$$y_0' = 0,\ y_0'' = 0,\ y_0''' = 0, \ldots, y_0^{(n-1)} = 0,\ y_0^{(n)} = 0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 = 0. \tag{6}$$

Din (5), rezultă uşor că sînt satisfăcute şi condiţiile

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = 0, \ldots, \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right)_0 = 0. \tag{7}$$

Se arată foarte simplu că condiţiile (4) şi (5) sînt satisfăcute, dacă între funcţiile $z(x)$ şi $y(x)$ se stabileşte următoarea relaţie:

$$\begin{aligned} z = \theta(x, y) &= y + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2!} z_0''(x - x_0)^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} z_0'''(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} z_0^{(n-1)}(x - x_0)^{n-1} + \\ &+ \frac{1}{n!} z_0^{(n)}(x - x_0)^n + A(x - x_0)(y - y_0) + \\ &+ B(x - x_0)^2(y - y_0), \end{aligned} \tag{8}$$

constantele A şi B fiind oarecari.

Să determinăm acum constantele A şi B, astfel încît să fie satisfăcute şi condiţiile (6).

Din egalitatea (8), dacă derivăm în raport cu x şi ţinem seamă de relaţiile (1) şi (3), avem

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) &= [1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2]\, f(x, y) + z_0' + \\ &+ z_0''(x - x_0) + \frac{1}{2!} z_0'''(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-2)!} z_0^{(n-1)}(x - x_0)^{n-2} + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} z_0^{(n)}(x - x_0)^{n-1} + A(y - y_0) + 2B(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned} \tag{9}$$

Să derivăm parţial, în raport cu y, această egalitate; avem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = [1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2]\frac{\partial f}{\partial y} + A + 2B(x - x_0).$$

Din (8), avem

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2,$$

care, înlocuit mai sus, ne dă

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)[1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2] = A + 2B(x - x_0). \tag{10}$$

Pe nodul $x = x_0$, avem

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = A,$$

de unde rezultă că

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 - A.$$

Pentru ca să fie satisfăcută prima condiţie din (6), trebuie să avem

$$A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 \tag{11}$$

Să determinăm pe B, astfel ca să fie satisfăcută şi a doua condiţie din (6).

Pentru aceasta, derivînd parţial, în raport cu x, egalitatea (10), avem

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)[1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2] +$$
$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)[A + 2B(x - x_0)] = 2B.$$

Făcînd $x = x_0$ şi ţinînd seamă că

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0, \quad A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0$$

rezultă că

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0^2 = 2B.$$

Pentru ca a doua condiţie din (6) să fie satisfăcută, trebuie să avem

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0^2\right]. \tag{12}$$

Înlocuind în (8), constantele A şi B prin valorile lor, date de egalităţile (11) şi (12), obţinem relaţia între funcţiile $z(x)$ şi $y(x)$, care satisface condiţiile (4), (5), (6) şi (7), adică tocmai transformarea ce trebuie s-o facem asupra ecuaţiei diferenţiale (1), dată iniţial.

Din (9), în care A şi B sînt daţi de relaţiile (11) şi (12), se obţine funcţia $f(x, y)$, care figurează în membrul al doilea al ecuaţiei diferenţiale transformată (3) :

$$\begin{aligned} f(x, y) = \frac{1}{1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2}\Big\{ & \varphi[x, \theta(x, y)] - \\ & - z_0' - z_0''(x - x_0) - \frac{1}{2!} z_0'''(x - x_0)^2 - \ldots - \\ & - \frac{1}{(n-2)!} z_0^{(n-1)}(x - x_0)^{n-2} - \frac{1}{(n-1)!} z_0^{(n)}(x - x_0)^{n-1} - \\ & - A(y - y_0) - 2B(x - x_0)(y - y_0)\Big\}. \end{aligned} \tag{13}$$

În concluzie, integrarea ecuaţiei diferenţiale (1), cu condiţia iniţială (2), se reduce, prin transformarea (8), unde constantele A şi B sînt date de egalităţile (11) şi (12), la integrarea ecuaţiei diferenţiale transformată (3), cu condiţia iniţială (4), unde funcţia $f(x, y)$, care figurează în membrul al doilea, este dată de (13).

Integrala $y(x)$ şi funcţia $f(x, y)$ satisfac pe nodul x_0, la condiţiile (5), (6) şi (7).

Dacă se integrează numeric ecuaţia diferenţială transformată (3), şi se obţine integrala ei aproximativă $\tilde{y}(x)$, atunci formula (8) ne dă integrala aproximativă $\tilde{z}(x)$ a ecuaţiei diferenţiale iniţiale (1), înlocuind în (8), unde A şi B sînt daţi de (11) şi (12), pe $y(x)$ cu $\tilde{y}(x)$.

4. Să stabilim procedeul de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale transformată.

Pentru aceasta presupunem că integrala $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale transformată, se poate dezvolta într-o vecinătate oarecare a nodului x_0, după formula lui Taylor ; avem

$$\begin{aligned} y(x) = y_0 & + \frac{y_0^{(n+1)}}{(n+1)!} h^{n+1} + \frac{y_0^{(n+2)}}{(n+2)!} h^{n+2} + \\ & + \frac{y_0^{(n+3)}}{(n+3)!} h^{n+3} + \frac{y_0^{(n+4)}}{(n+4)!} h^{n+4} + \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

S-a notat $x = x_0 + h$, unde $h < a$ şi $y_0^{(k)} = y^{(k)}(x_0)$. S-a ţinut seamă, de asemenea, de faptul că sînt satisfăcute condiţiile (5).

Numerele $y_0^{(k)}$ care figurează în relaţia (14), pot fi exprimate cu ajutorul derivatelor parţiale ale funcţiei $f(x, y)$, în raport cu x şi y, pe nodul x_0. Dacă ţinem seamă de condiţiile 5), (6) şi (7), avem

$$y_0^{(n+1)} = \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0, \quad y_0^{(n+2)} = \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right)_0,$$

$$y_0^{(n+3)} = \left(\frac{\partial^{n+2} f}{\partial x^{n+2}}\right)_0, \quad y_0^{(n+4)} = \left(\frac{\partial^{n+3} f}{\partial x^{n+3}}\right)_0 + \frac{(n+2)(n+3)}{2}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0. \tag{15}$$

În felul acesta, egalitatea (14) se pot scrie

$$\begin{aligned} y(x) = y_0 & + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 h^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right)_0 h^{n+2} + \\ & + \frac{1}{(n+3)!}\left(\frac{\partial^{n+2} f}{\partial x^{n+2}}\right)_0 h^{n+3} + \frac{1}{(n+4)!}\left[\left(\frac{\partial^{n+3} f}{\partial x^{n+3}}\right)_0 + \right. \\ & \left. + \frac{(n+2)(n+3)}{2}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0\right] h^{n+4} + \ldots \end{aligned} \tag{14'}$$

Pentru calculul numeric al integralei $y(x)$ a ecuației diferențiale transformate, pe nodul $x = x_0 + h$, unde $h < a$, să scriem următoarele formule de tip Runge-Kutta :

$$\left\{\begin{aligned} k_1 &= f(x_0 + \alpha_1 h,\ y_0)h, \\ k_2 &= f(x_0 + \alpha_2 h,\ y_0 + \beta k_1)h, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

$$\tilde{y}(x) = y_0 + c_1 k_1 + c_2 k_2, \tag{17}$$

unde $\tilde{y}(x)$ este integrala aproximativă, calculată cu formulele de mai sus, pe nodul x.

Presupunem că și integrala aproximativă $\tilde{y}(x)$ a ecuației diferențiale transformate, se poate dezvolta într-o vecinătate oarecare a nodului x_0, după formula lui Taylor, ; avem

$$\begin{aligned} k_1 = f(x_0 + \alpha_1 h,\ y_0)h &= \frac{1}{n!}\alpha_1^n \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 h^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\alpha_1^{n+1}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right)_0 h^{n+2} + \\ &+ \frac{1}{(n+2)!}\alpha_1^{n+2}\left(\frac{\partial^{n+2} f}{\partial x^{n+2}}\right)_0 h^{n+3} + \frac{1}{(n+3)!}\alpha_1^{n+3}\left(\frac{\partial^{n+3} f}{\partial x^{n+3}}\right)_0 h^{n+4} + \ldots, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} k_2 = f(x_0 + \alpha_2 h,\ y_0 + \beta k_1)h &= \frac{1}{n!}\alpha_2^n \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 h^{n+1} + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\alpha_2^{n+1}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right)_0 h^{n+2} + \frac{1}{(n+2)!}\alpha_2^{n+2}\left(\frac{\partial^{n+2} f}{\partial x^{n+2}}\right)_0 h^{n+3} + \\ &+ \left[\frac{1}{2(n!)}\alpha_1^n \alpha_2^2 \beta \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 + \frac{1}{(n+3)!}\alpha_2^{n+3}\left(\frac{\partial^{n+3} f}{\partial x^{n+3}}\right)_0\right] h^{n+4} + \ldots \end{aligned} \tag{19}$$

Ținînd seamă de relațiile (18) și (19), egalitatea (17) se poate scrie

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) = y_0 &+ \frac{1}{n!}(c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n)\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 h^{n+1} + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}(c_1\alpha_1^{n+1} + c_2\alpha_2^{n+1})\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right)_0 h^{n+2} + \\ &+ \frac{1}{(n+2)!}(c_1\alpha_1^{n+2} + c_2\alpha_2^{n+2})\left(\frac{\partial^{n+2} f}{\partial x^{n+2}}\right)_0 h^{n-3} + \\ &+ \frac{1}{(n+3)!}(c_1\alpha_1^{n+3} + c_2\alpha_2^{n+3})\left(\frac{\partial^{n+3} f}{\partial x^{n+3}}\right)_0 h^{n+4} + \\ &+ \frac{1}{2(n!)} c_2\alpha_1^n\alpha_2^2 \beta \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 h^{n+4} + \ldots \end{aligned} \tag{17'}$$

5. Vom determina cele cinci constante α_1, α_2, c_1, c_2 și β, scriind că coeficienții acelorași puteri ale lui h, din relațiile (14′) și (17′), sînt egali. Sîntem conduși astfel la următorul sistem de ecuații :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 h^{n+1}: && c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n = \frac{1}{n+1}, \\ &\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right)_0 h^{n+2}: && c_1\alpha_1^{n+1} + c_2\alpha_2^{n+1} = \frac{1}{n+2}, \\ &\left(\frac{\partial^{n+2} f}{\partial x^{n+2}}\right)_0 h^{n+3}: && c_1\alpha_1^{n+2} + c_2\alpha_2^{n+2} = \frac{1}{n+3}, \\ &\left(\frac{\partial^{n+3} f}{\partial x^{n+3}}\right)_0 h^{n+4}: && c_1\alpha_1^{n+3} + c_2\alpha_2^{n+3} = \frac{1}{n+4}, \\ &\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 h^{n+4}: && c_2\alpha_1^n\alpha_2^2\beta = \frac{1}{(n+1)(n+4)}. \end{aligned} \tag{20}$$

Scriind că primele patru ecuații ale sistemului de mai sus sînt compatibile în raport cu c_1 și c_2, unde α_1 și α_2 sînt presupuși diferiți de zero și diferiți între ei, avem

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dfrac{1}{n+1} \\ \alpha_1^{n+1} & \alpha_2^{n+1} & \dfrac{1}{n+2} \\ \alpha_1^{n+2} & \alpha_2^{n+2} & \dfrac{1}{n+3} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1^{n+1} & \alpha_2^{n+1} & \dfrac{1}{n+2} \\ \alpha_1^{n+2} & \alpha_2^{n+2} & \dfrac{1}{n+3} \\ \alpha_1^{n+3} & \alpha_2^{n+3} & \dfrac{1}{n+4} \end{vmatrix} = 0.$$

Calculul acestor determinanți, în condițiile specificate mai sus, ne conduce la relațiile

$$\frac{1}{n+1}\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{n+2}(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{1}{n+3},$$

$$\frac{1}{n+2}\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{n+3}(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{1}{n+4}.$$

De aici, obținem

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\,\frac{n+2}{n+4},\quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)},$$

sau

$$\alpha_1 = \frac{n+2}{n+4} - \frac{1}{n+4}\sqrt{\frac{2(n+2)}{n+3}}, \tag{21}$$

$$\alpha_2 = \frac{n+2}{n+4} + \frac{1}{n+4}\sqrt{\frac{2(n+2)}{n+3}}, \tag{22}$$

unde $n \geqslant 2$.

Rezolvînd primele două ecuaţii din sistemul (20), în raport cu c_1 şi c_2, avem

$$c_1 = \frac{\dfrac{\alpha_2}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}}{\alpha_1^n(\alpha_2 - \alpha_1)}, \tag{23}$$

$$c_2 = \frac{\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{\alpha_1}{n+1}}{\alpha_2^n(\alpha_2 - \alpha_1)}, \tag{24}$$

unde α_1 şi α_2 sînt daţi de formulele (21) şi (22).

Din ultima ecuaţie a sistemului (20), unde α_1, α_2 şi c_2 sînt daţi de formulele (21), (22) şi (24), se obţine β :

$$\beta = \frac{1}{(n+1)(n+4)c_2\alpha_1^n\alpha_2^2}. \tag{25}$$

Aplicarea procedeului astfel determinat, avînd ordinul $n+4 (n \geqslant 2)$ de exactitate, necesită numai două substituţii în ecuaţia diferenţială transformată. Nodurile şi coeficienţii formulelelor (16) şi (17), care se folosesc pentru aplicarea acestui procedeu, sînt daţi de relaţiile (21), (22), (23), (24) şi (25).

СПОСОБ ТИПА РУНГЕ-КУТТА, ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ $n + 4$ ($n \geqq 2$) НА ДВУХ УЗЛАХ, ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде показывается, что интегрирование дифференциального уравнения (1) при начальном условии (2) преобразованием (8), где A и B данны формулами (11) и (12) сводится к интегрированию дифференциального уравнения (3) при начальном условии (4), где фунция $f(x, y)$, фигурирующая во второй части, дается формулой (13). Решение $y(x)$ и функция $f(x, y)$ на узле x_0 удовлетворяют условиям (5), (6) и (7).

Данным преобразованием, для численного итегрирования преобразованного дифференциального уравнения устанавливается способ типа Рунге-Кутта, порядка точности $n + 4$ ($n \geqq 2$) на двух узлах интервала интегрироваия. Формулы (16) и (17), которые используются для применения этого способа, содержат пять констант; применение способа требует только двух замен в преобразованном дифференциальном уравнении. Узлы и коэффициенты этих формул даются соотношениями (21), (22), (23), (24) и (25).

Если численно интегрируется преобразованное дифферециальное уравнение (3) и получается его приближенный интеграл $\tilde{y}(x)$, то формула (8), где A и B даются равенствами (11) и (12), даёт приближенное решение $\tilde{z}(x)$ начального дифференциального уравнения (1), заменяя $y(x)$ через $\tilde{y}(x)$.

UN PROCÉDÉ DU TYPE RUNGE-KUTTA, D'ORDRE $n+4$ ($n \geqslant 2$) D'EXACTITUDE, SUR DEUX NOEUDS, D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

RÉSUMÉ

Il est montré que l'intégration de l'équation différentielle (1), à la condition initiale (2), se réduit par la transformation (8), où A et B sont donnés par (11) et (12), à l'intégration de l'équation différentielle transformée (3), à la condition initiale (4), où la fonction $f(x, y)$, qui figure au deuxième membre, est donnée par (13). L'intégrale $y(x)$ et la fonction $f(x, y)$ satisfont sur le noeud x_0, aux conditions (5), (6) et (7).

Pour l'intégration numérique de l'équation différentielle transformée, on établit, par la transformation donnée, un procédé de type Runge-Kutta, sur deux noeuds de l'intervalle d'intégration, d'ordre $n+4$ ($n \geqslant 2$) d'exactitude. Les formules (16) et (17) utilisées à l'application de ce procédé contiennent cinq constantes ; l'application du procédé réclame seulement deux substitutions dans l'équation différentielle transformée. Les noeuds et les coefficients de ces formules sont données par les relations (21), (22), (23), (24) et (25).

Si l'on procède à l'intégration numérique de l'équation différentielle transformée (3) et l'on obtient son intégrale approximative $\tilde{y}(x)$, alors la formule (8), où A et B sont donnés par les égalités (11) et (12), nous donne l'intégrale aproximative $\tilde{z}(x)$ de l'équation différentielle initiale (1), en remplacant $y(x)$ par $\tilde{y}(x)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Collatz L., *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1951, (trad. în limba rusă, Moscova, 1953, p. 11–12).

2. Coţiu A., *Un procedeu de ordinul şase de exacticitate, pe două noduri, de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întîi.* Studii şi cercet. de matem. (Cluj), XIII, *1* (1962).

3. — *Stabilirea unor procedee de ordin înalt de exactitate, de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale.* An. şt. Univ. Iaşi, s.n., s.I, VI, *3* (supliment), 585–598 (1960)

4. — *Un procedeu de ordinul opt de exactitate, de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi.* Studii și cercet. de matem. (Cluj), XII, *1*, 29–40 (1961).
5. Fehlberg E., *Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge-Kutta-Verfahren.* Z. angew. Math. Mech., *38*, 421–426 (1958).
6. — *Neue genauere Runge-Kutta-Formeln für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Z. angew. Math. Mech., *40*, 252–259 (1960).
7. Ionescu D. V., *O generalizare a unei proprietăți ce intervine în metoda lui Runge-Kutta pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.* Bul. științ. — Acad. R.P.R., Secț. de științe matem. și fiz., VI, *2*, 229–241 (1954).
8. — *O generalizare a unei proprietăți care intervine în metoda lui Runge și Kutta, pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.* Bul. științ. — Acad. R.P.R., Secț. de științe matem. și fiz., VIII, *1*, 67–100 (1956).

Primit la 11. VI. 1962.