ASUPRA METODEI GENERALIZATE A IPERBOLELOR TANGENTE

DE

BELA JANKÓ

(Cluj)

Fie dată ecuaţia funcţională $F(x) = 0$, unde $F(x)$ este o funcţională neliniară definită în domeniul S complet şi convex din spaţiul lui Banach X. Se mai presupune că funcţionala $F(x)$ este continuă şi admite derivate de tip Fréchet pînă la ordinul 3.

Considerăm metoda de iteraţie [2]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{L_n} y_n \quad n = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

unde

$$L_n = F'(x_n)y_n - \frac{1}{2} \frac{F''(x_n)y_n^2}{F'(x_n)y_n} F(x_n),$$

iar $F'(x_n)$ şi $F''(x_n)$ sînt derivatele Fréchet de ordinul 1, respectiv 2. Presupunem apoi că funcţionala $F(x)$ este astfel încît elementele $y_n \in X$ să satisfacă condiţia [1],

$$|F'(x_n)y_n| = \|F'(x_n)\|, \quad \|y_n\| = 1, \ (n = 0, 1, \ldots) \tag{A}$$

La aplicarea procedeului (1) se alege în prealabil aproximaţia iniţială $x_0 \in S \subset X$ şi apoi elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, X \in$ se calculează succesiv prin formula (1).

În cele ce urmează vom da două teoreme referitoare la existenţa soluţiei $F(x) = 0$, precum şi la convergenţa metodei date prin formula (1).

TEOREMA 1. *Presupunem că pentru aproximaţia iniţială* x_0 *sînt îndeplinite următoarele condiţii :*

1°. *Pentru derivata Fréchet* $F'(x_0)$) *există delimitarea*

$$\frac{1}{\|F'(x_0)\|} \leqslant B_0 < +\infty$$

şi este satisfăcută condiţia (A).

2°. *Are loc inegalitatea*

$$\frac{|F(x_0)|}{|L_0|} \leqslant \eta_0 < +\infty.$$

3°. *Derivatele Fréchet de ordinul 2, respectiv 3 sînt uniform mărginite în domeniul* $S(x_0, r)$,

$$\|F''(x)\| \leqslant M, \quad \|F'''(x)\| \leqslant N,$$

unde $S(x_0, r)$ *este o sferă în spațiul Banach* X, *avînd centrul în* x_0 *și raza* $r = 2\eta_0$. *Această sferă este definită de inegalitatea* $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta_0$.

4°. $h_0 = B_0 M \eta_0 \leqslant \frac{1}{2}$.

5°. $\rho_0 = \frac{5}{4 - 2h_0} + \frac{5N}{6B_0M^2} \leqslant 4.$

În aceste condiții pentru ecuația funcțională $F(x) = 0$ *există în sfera* $S(x_0, r)$ *o soluție* x^*, *care este limita aproximațiilor* x_n. *Rapiditatea convergenței este caracterizată prin delimitarea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant 2^{1-n}(2h_0)^{3^n-1}\eta_0.$$

Demonstrație. Se arată că trecînd de la x_0 la x_1 condițiile 1°–5° rămîn valabile.

a) Folosindu-ne de inegalitatea cunoscută

$$\|F'(x_1)\| \geqslant \|F'(x_0)\| \left(1 - \frac{\|F'(x_0) - F'(x_1)\|}{\|F'(x_0)\|}\right)$$

și de formula generalizată a lui Lagrange, rezultă că

$$\|F'(x_1)\| \geqslant \|F'(x_0)\| (1 - h_0),$$

de unde

$$\frac{1}{\|F'(x_1)\|} \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1 \quad (B_0 < B_1 \leqslant 2B_0). \tag{2}$$

Prin urmare condiția 1° este satisfăcută pentru x_1.

b) Considerăm formula generalizată a lui Taylor pentru funcționala $F(x)$

$$|F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x_1 - x_0) - \tfrac{1}{2} F''(x_0)(x_1 - x_0)^2| \leqslant \leqslant \tfrac{1}{6} \|F'''(\xi_0)\| \, \|x_1 - x_0\|^3, \tag{3}$$

unde $\xi_0 = x_0 + t_0(x_1 - x_0)$. Folosind formula (1) pentru $n = 0$, se obține ușor că

$$F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0) + \tfrac{1}{2} F''(x_0)(x_1 - x_0)^2 = \tag{4}$$

$$= \frac{F^3(x_0)(F''(x_0)y_0^2)^2}{4(F'(x_0)y_0)^2\left[F'(x_0)y_0 - \frac{1}{2}\frac{F''(x_0)y_0^2F(x_0)}{F'(x_0)y_0}\right]^2} = \frac{F(x_0)F''(x_0)(x_1 - x_0)^2 F''(x_0)y_0^2}{4(F'(x_0)y_0)^2}$$

Ținînd seama de relațiile (3), (4) precum și de condițiile 1°–4°, rezultă delimitarea

$$|F(x_1)| \leqslant \frac{1}{4} B_0 \bar{\eta}_0 M^2 \eta_0^2 + \frac{N}{6} \eta_0^3, \tag{5}$$

unde s-a notat

$$\bar{\eta}_0 = \frac{|F(x_0)|}{\|F'(x_0)\|}.$$

Pentru aceasta putem stabili ușor delimitarea

$$\bar{\eta}_0 = \frac{\eta_0}{1 - \frac{h_0}{2}}, \tag{6}$$

ceea ce se obține imediat din formula (1) considerată pentru cazul $n = 0$ folosindu-ne de inegalitatea

$$\bar{\eta}_0 \leqslant (1 + \tfrac{1}{2} B_0 M \bar{\eta}_0)\eta_0.$$

Astfel relația (5) poate fi scrisă sub forma

$$|F(x_1)| \leqslant \frac{1}{4} B_0 M^2 \frac{\eta_0^3}{1 - \frac{h_0}{2}} + \frac{N}{6} \eta^3. \tag{7}$$

Apoi din (2) și (7) obținem

$$\frac{|F(x_1)|}{\|F'(x_1)\|} \leqslant \frac{h_0^2 \eta_0}{1 - h_0}\left(\frac{1}{4 - 2h_9} + \frac{N}{6B_0M^2}\right) = \Delta_1.$$

De aici rezultă

$$\left|\frac{F(x_1)}{L_1}\right| = \eta_1 \leqslant \frac{\Delta_1}{1 - B_0 M \Delta_1}.$$

Folosind delimitarea (8), cu ajutorul condiției 5° poate fi stabilită inegalitatea

$$\eta_1 \leqslant 2h_0^2\eta_0 \leqslant \frac{\eta_0}{2}.$$

Astfel condiția 2° este verificată pentru aproximația x_1.

c) Condiția 3° este de asemenea satisfăcută fiindcă, după cum vom vedea la sfîrșitul demonstrației, x_1 și ξ_0 rămîn în sfera $S(x_0, 2\eta_0)$.

d) Din inegalitățile (9) și (2) obținem

$$h_1 \leqslant 4h_0^3 \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2},$$

deci și condiția 4° este îndeplinită.

e) În fine, din $B_1 > B_0$ și $h_1 \leqslant h_0$ urmează că $\rho_1 < \rho_0 < 4$.

În consecință, condițiile 1°—5° rămîn valabile pentru aproximația x_1 în care cantitățile B_0, η_0, h_0, ρ_0 au fost înlocuite cu B_1, η_1, h_1, ρ_1. În baza inducției complete se ajunge la relațiile

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}} \leqslant 2B_{n-1}, \tag{10}$$

$$\eta_n \leqslant 2h_{n-1}^2\eta_{n-1}, \tag{11}$$

$$h_n \leqslant 4h_{n-1}^3, \tag{12}$$

$$\rho_n = \frac{5}{4 - 2h_n} + \frac{5N}{6B_n M^2} \leqslant 4. \tag{13}$$

Apoi din (11) și (12) rezultă

$$\eta_n \leqslant 2^{-n}(2h_0)^{3^n-1}\eta_0. \tag{14}$$

Se știe că $||x_{n+1} - x_n|| \leqslant \eta_n$; folosind relația (14) obținem

$$\|x_{n+p} - x_n\| < 2^{1-n}(2h_0)^{3^n-1}(1 - 2^{-p})\eta_0. \tag{15}$$

Spațiul X fiind complet, rezultă că există limita $x^* = \lim x_n$. Dacă în relația (15) facem $p \to \infty$, atunci se obține

$$\|x^* - x_n\| < 2^{1-n}(2h_0)^{3^n-1}\eta_0.$$

Trebuie să mai arătăm că atît x_n, cît și ξ_{n-1} rămîn în sfera $S(x_0, 2\eta_0)$, unde

$$\xi_{n-1} = x_{n-1} + t_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Într-adevăr

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\| \leqslant \eta_0 + \\ + \frac{\eta_0}{2} + \ldots + \frac{\eta_0}{2^n} < 2\eta_0.$$

În mod analog se demonstrează și inegalitatea $\|x_0 - \xi_{n-1}\| < 2\eta_0$.

Rămîne să mai verificăm că x^* satisface ecuația funcțională $F(x) = 0$. În adevăr, dacă considerăm relația (7) pentru cazul n, atunci obținem ușor că

$$|F(x_n)| \leqslant \frac{h_n^2\eta_{n-1}}{B_{n-1}}\left[\frac{1}{4 - 2h_{n-1}} + \frac{N}{6B_{n-1}M^2}\right] < \frac{\eta_0}{2^{n-1}B_0}.$$

Dacă $n \to \infty$, atunci $\lim |F(x_n)| = 0$. În baza continuității funcționale $F(x)$ și ținînd seamă de faptul că $x_n \to x^*$ se obține

$$\lim F(x_n) = F(x^*) = 0.$$

Observație. Menționăm că $\Delta_1 < \delta_1$, unde δ_1 este delimitarea corespunzătoare din lucrarea [2]. Observăm totodată că condiția $\rho_0 \leqslant 4$ este mai puțin restrictivă decît condiția $R_0 \leqslant 9$ (vezi lucrarea [2]).

TEOREMA 2. *Dacă sînt satisfăcute următoarele condiții:*

1°. $\frac{1}{\|F'(x)\|} \leqslant B$ *pentru orice* $x \in S$, *unde* S *este o sferă a spațiului* X, *definită de inegalitatea* $\|x - x_0\| \leqslant K\eta$ *și mai este îndeplinită condiția* (A);

2°. *pentru aproximația inițială* x_0 *are loc inegalitatea*

$$\frac{|F(x_0)|}{|L_0|} \leqslant \eta < +\infty;$$

3°. *există derivatele de tip Fréchet pînă la ordinul* 3 *și*

$$\|F''(x)\| \leqslant M, \quad \|F'''(x)\| \leqslant N$$

pentru orice $x \in S$;

4°. *sînt satisfăcute relațiile*

$$h < 2, \quad hf < 1;$$

atunci ecuația funcțională $F(x) = 0$ *admite o soluție* $x^* \in S$ *către care tind aproximațiile succesive date prin procedeul* (1). *Rapiditatea convergenței se exprimă prin evaluarea*

$$\|x^* - x_n\| < K\eta(hf)^{3^n-1}.$$

Aici s-au notat

$$h = B\eta M, \quad f^2 = \frac{1}{1-\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{4-2h} + \frac{N}{6BM^2}\right) \text{ şi } K = \sum_{i=0}^{\infty} (hf)^{3^i-1}.$$

Demonstraţie. Pornind de la formula generalizată a lui Taylor şi folosind procedeul (1), în condiţiile teoremei 2 se ajunge uşor la

$$|F(x_1)| \leqslant \left(\frac{BM^2}{4-2h} + \frac{N}{6}\right)\eta^3,$$

de unde

$$\frac{|F(x_1)|}{\|F'(x_1)\|} \leqslant B\left(\frac{BM^2}{4-2h} + \frac{N}{6}\right)\eta^3 = \Delta.$$

De aici găsim că

$$\frac{|F(x_1)|}{|L_1|} \leqslant \frac{\Delta}{1-\frac{h}{2}},$$

sau

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \frac{B^2M^2}{1-\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{4-2h} + \frac{N}{6BM^2}\right)\|x_1 - x_0\|^3.$$

Prin inducţie completă se stabileşte uşor următoarea formulă de recurenţă

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{B^2M^2}{1-\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{4-2h} + \frac{N}{6BM^2}\right)\|x_n - x_{n-1}\|^3,$$

din care se poate ajunge la delimitarea

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant (hf)^{3^n-1}\eta. \tag{16}$$

Cu ajutorul inegalităţilor

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \eta\sum_{i=0}^{n-1}(hf)^{3^i-1} < K\eta$$

se demonstrează că aproximaţiile x_n rămîn în sfera S, pentru orice n.

Ţinînd seama de faptul că X este un spaţiu complet, pe baza relaţiei

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \eta \sum_{i=n}^{n+p-1} (hf)^{3^i-1} < K\eta(hf)^{3^n-1}$$

care se obţine imediat din (16), rezultă că x_n converge spre o limită $x^* \in S \subset X$. Atunci pentru $p \to \infty$ avem

$$\|x^* - x_n\| < K\eta(hf)^{3^n-1}.$$

Faptul că x^* satisface ecuaţia $F(x) = 0$ rezultă din continuitatea funcţionalei $F(x)$ şi din relaţia

$$|F(x_n)| \leqslant \left(\frac{BM^2}{4-2h} + \frac{N}{6}\right)\|x_n - x_{n-1}\|^3.$$

Observaţie. Remarcăm că $\Delta < \delta_1'$ şi în consecinţă $f < g$, unde δ_1' şi g sînt notaţiile corespunzătoare utilizate în teorema 2 din lucrarea [2].

ОБ ОБОБЩЕННОМ МЕТОДЕ КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде даются две теоремы о существовании решения нелинейного функционального уравнения $F(x) = 0$, а также и для сходимости метода касательных гипербол, определённого формулой (1).

Условия этих теорем более общие по сравнению с условиями, формулированными в труде [2].

SUR LA MÉTHODE GÉNÉRALISÉE DES HYPERBOLES TANGENTES

RÉSUMÉ

Dans le cadre de ce travail l'auteur a élaboré deux théorèmes relatifs à l'existence de la solution de l'équation fonctionnelle non linéaire $F(x) = 0$, ainsi que pour la convergence de la méthode des hyperboles tangentes données par la formule (1).

Les conditions données dans ces théorèmes sont plus générales que celles qui ont été formulées dans le travail [2].

BIBLIOGRAFIE

1. Altman M., *Concerning approximate solutions of non-linear functional equations.* Bulletin de l'Acad. Polon., V, *5*, 461–465 (1957).
2. Jankó B., *Despre o nouă generalizare a metodei iperbolelor tangente pentru rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare definite în spații Banach.* Studii și cercet. de matem. (Cluj), XI, *2*, 307–317 (1960).

Primit la 20. II. 1962.