# DESPRE COMPLETITUDINEA UNOR CLASE DE FUNCŢII

DE

KALIK CAROL

(Cluj)

1. Vom studia completitudinea unor clase de funcţii care servesc la rezolvarea problemei lui Dirichlet respectiv a problemei lui Neumann, relativ la ecuaţia

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

într-un domeniu multiplu-conex din spaţiu euclidian cu trei dimensiuni.

Considerăm un domeniu multiplu-conex mărginit de suprafeţele închise $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$. Presupunem că suprafeţele $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$ două cîte două nu au puncte comune şi sînt situate în domeniul mărginit de $\Gamma_0$. Dacă $\Omega_{ji}$ $(j = 0, 1, \ldots, l)$ este domeniul interior mărginit de $\Gamma_j$ şi $\Omega_{je}$ domeniul exterior mărginit de această suprafaţă, atunci domeniul multiplu-conex considerat de noi este $\Omega_i = \Omega_{0i} \cap \Omega_{1e} \cap \Omega_{2e} \cap \ldots \cap \Omega_{le}$. Fie de asemenea $\Omega_e = \Omega_{0e} \cup \Omega_{1i} \cup \Omega_{2i} \cup \ldots \cup \Omega_{li}$, şi $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_l$.

Urmînd ideea lui L. Amerio (vezi [2]), considerăm o clasă de soluţii ale ecuaţiei (1), pe care o vom nota cu $S_k$. Anume, vom spune că o funcţie $u(P)$ aparţine clasei $S_k$ atunci şi numai atunci dacă sînt îndeplinite următoarele trei condiţii :

1. *Aproape pentru fiecare punct $M$ de pe $\Gamma$ există limitele*

$$\lim_{P \to M} u(P) = \mu(M) ; \quad \lim_{P \to M} \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_M} = \delta(M),$$

*iar $\mu(M)$, $\delta(M) \in L_2(\Gamma)$, deci sînt la patrat integrabile. Menţionăm că limitele de mai sus sînt considerate presupunînd că $P$ tinde către $M$ de-a lungul normalei la $\Gamma$ în punctul $M$.*[1]) *Aici $\nu_M$ reprezintă normala interioară la $\Gamma$ în punctul $M$.*

---

[1]) **Această presupunere o menţinem peste tot în lucrare, cînd un punct din $\Omega_i$ sau $\Omega_e$ tinde către un punct de pe frontieră.**

2. *Dacă* $P \in \Omega_i$, *atunci*

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\left\{\mu(Q)\frac{\partial}{\partial \nu_Q}\left(\frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}}\right) - \delta(Q)\frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}}\right\} d\sigma_Q. \tag{2}$$

3. *Dacă* $P \in \Omega_e$, *atunci*

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\left\{\mu(Q)\frac{\partial}{\partial \nu_Q}\left(\frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}}\right) - \delta(Q)\frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}}\right\} d\sigma_Q = 0. \tag{3}$$

Vom nota cu $D(\Gamma)$ respectiv cu $N(\Gamma)$ mulţimea funcţiilor $\mu(M)$ respectiv $\delta(M)$ din definiţia de mai sus. Mulţimea $N(\Gamma)$ coincide tocmai cu clasa funcţiilor la patrat integrabile pe $\Gamma$, deci putem scrie $N(\Gamma) = L_2(\Gamma)$.

Problemele la limită relative la ecuaţia (1), considerate de noi, le formulăm în felul următor.

*Problema lui Dirichlet* : fiind dată funcţia $\mu(M) \in D(\Gamma)$ să se găsească funcţia $u(P) \in S_k$ pentru care să avem

$$\lim_{P\to M} u(P) = \mu(M).$$

*Problema lui Neumann* : fiind dată funcţia $\delta(M) \in N(\Gamma)$ să se găsească funcţia $u(P) \in S_k$ pentru care să avem

$$\lim_{P\to M} \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_M} = \delta(M).$$

În general aceste probleme nu au soluţii unice din cauza funcţiilor proprii care pot interveni atît în rezolvarea problemei lui Dirichlet, cît şi în rezolvarea problemei lui Neumann. Fără să intrăm în detalii, menţionăm că funcţiile proprii de la ambele probleme fac parte din clasa $S_k$.

Ideea rezolvării este aceea de a găsi funcţia necunoscută $\delta(M)$ în cazul problemei lui Dirichlet, respectiv funcţia necunoscută $\mu(M)$ în cazul problemei lui Neumann. Iar după acesta, soluţia este dată de formula 2).

**2.** Fie $O_0$ un punct arbitrar fixat din $\Omega_i$, iar $O_j$ un punct arbitrar fixat din $\Omega_{ji}$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$. Vom considera următoarele funcţii

$$I_n^{(m)}(Q_0) = \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(kr_0)}{\sqrt{kr_0}} P_n^{(m)}(\cos\theta_0) \begin{matrix}\cos m\varphi_0\\ \sin m\varphi_0\end{matrix}$$

$$H_n^{(m)}(Q_j) = \frac{H_{n+\frac{1}{2}}(kr_j)}{\sqrt{kr_j}} P_n^{(m)}(\cos\theta_j) \begin{matrix}\cos m\varphi_j\\ \sin m\varphi_j\end{matrix} \quad (j = 1, 2, \ldots, l),$$



unde $n = 0, 1, 2, \ldots$ ; $m = 0, 1, \ldots, n$. Aici $I_{n+\frac{1}{2}}(kr_0)$ reprezintă funcţia lui Bessel de indice $n + \frac{1}{2}$ iar $H_{n+\frac{1}{2}}(kr_j)$ funcţia lui Hankel de indice $n+\frac{1}{2}$; $P_n^{(m)}(\cos\theta_0)$ şi $P_n^{(m)}(\cos\theta_j)$ reprezintă funcţiile asociate polinoamelor lui Legendre ; $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ sînt coordonatele polare faţă de punctul $O_0$ iar $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ — coordonatele polare faţă de punctul $O_j$.

Punctul de plecare a consideraţiunilor noastre este următoarea teoremă a lui L. Amerio (vezi [2]) :

TEOREMA 1. *Dacă* $\mu(M)$ *şi* $\delta(M)$ *sînt două funcţii date, la patrat integrabile pe* $\Gamma$, *şi dacă*

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\left\{\mu(Q)\frac{\partial}{\partial \nu_Q}\left(\frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}}\right) - \delta(Q)\frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}}\right\} d\sigma_Q = 0 \tag{3}$$

*pentru orice* $P \in \Omega_e$, *atunci funcţia* $u(P)$ *dată de formula*

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\left\{\mu(Q)\frac{\partial}{\partial \nu_Q}\left(\frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}}\right) - \delta(Q)\frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}}\right\} d\sigma_Q \quad (P\in\Omega_i) \tag{2}$$

*aparţine clasei* $S_k$.

Trecem la formularea şi demonstrarea teoremei care are un rol de bază în cele ce urmează.

TEOREMA 2. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţiile* $\mu(M)$ *şi* $\delta(M)$ *să satisfacă identitatea* (3) *este îndeplinirea următoarelor relaţii* :

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\Gamma}\left\{\mu(Q_0)\frac{\partial I_n^{(m)}(Q_0)}{\partial \nu_{Q_0}} - \delta(Q_0)I_n^{(m)}(Q_0)\right\}d\sigma_{Q_0} = 0\\ &\int_{\Gamma}\left\{\mu(Q_j)\frac{\partial H_n^{(m)}(Q_j)}{\partial \nu_{Q_j}} - \delta(Q_j)H_n^{(m)}(Q_j)\right\}d\sigma_{Q_j} = 0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$j = 1, 2, \ldots, l;\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 0, 1, \ldots, n.$$

*Demonstraţie*. Înainte de a trece la demonstrarea efectivă a teoremei, menţionăm că soluţia fundamentală a ecuaţiei (1) se poate dezvolta în serie :

$$\frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} c_n I_n^{(m)}(Q) H_n^{(m)}(P), \tag{5}$$

unde $c_n$ sînt nişte constante pozitive. Această serie se obţine din formula de adunare [1] pentru funcţiile cilindrice, în care am înlocuit polinoamele lui Legendre cu expresia cunoscută :

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^{(m)}(\cos\theta) P_n^{(m)}(\cos\theta')\,[\cos m\varphi \cos m\varphi' +$$

$$+ \sin m\varphi \sin m\varphi'],$$

unde $\gamma$ este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{OQ}$ şi $\overrightarrow{OP}$ iar $Q(r, \theta, \varphi)$, $P(r', \theta', \varphi')$.

Seria (5) este uniform convergentă relativ la $Q$ în sfera cu centrul $O$ şi raza $\overline{OP}$, şi uniform convergentă relativă la $P$ în exteriorul sferei cu centrul în $O$ şi raza $\overline{OQ}$.

Vom nota mai jos cu $\psi(P)$ membrul întîi din formula (3).

Trecem la demonstrarea necesităţii condiţiei formulate în teorema 2. Fie deci $\psi(P) \equiv 0$ pentru $P \in \Omega_e$. Considerăm o sferă $\Sigma(R_0)$, avînd centrul în punctul $O_0$ şi raza $R_0$, şi care conţine în interiorul său pe $\Omega_i \cup \Gamma$. Fie de asemenea $\Sigma(R_j)$ o sferă cu centrul în $O_j$, avînd raza $R_j$ şi care este situată în $\Omega_{ji}$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$. Notăm cu $\Sigma_i(R_j)$, respectiv cu $\Sigma_e(R_j)$ domeniul interior respectiv domeniul exterior mărginit de sfera $\Sigma(R_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, l)$.

Pe baza formulei (5) şi pe baza condiţiei $\psi(P) \equiv 0$, putem scrie :

$$\psi(P_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} c_n H_n^{(m)}(P_0) \int_\Gamma \left\{ \mu(Q_0) \frac{\partial I_n^{(m)}(Q_0)}{\partial \nu_{Q_0}} - \delta(Q_0) I_n^{(m)}(Q_0) \right\} d\sigma_{Q_0} \equiv 0 \tag{6}$$

cînd $P_0 \in \Sigma_e(R_0)$, şi

$$\psi(P_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} c_n I_n^{(m)}(P_j) \int_\Gamma \left\{ \mu(Q_j) \frac{\partial H_n^{(m)}(Q_j)}{\partial \nu_{Q_j}} - \delta(Q_j) H_n^{(m)}(Q_j) \right\} d\sigma_{Q_j} \equiv 0 \tag{7}$$

cînd $P_j \in \Sigma_i(R_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$.

Din aceste identităţi rezultă tocmai condiţiile (4).

Pentru demonstrarea suficienţei să presupunem că relaţiile (4) sînt satisfăcute. Urmînd aceeaşi idee ca şi mai înainte, obţinem că $\psi(P_0) \equiv 0$ în $\Sigma_e(R_0)$ şi $\psi(P_j) \equiv 0$ în $\Sigma_i(R_j)$. Pe de altă parte $\psi(P)$ este o soluţie a ecuaţiei (1) în $\Omega_e$. Avînd în vedere că această soluţie este analitică şi că ea se anulează în exteriorul sferei $\Sigma(R_0)$, respectiv în interiorul sferelor $\Sigma(R_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, rezultă că $\psi(P) \equiv 0$ în $\Omega_e$. Astfel teorema este complet demonstrată.

Formulăm şi demonstrăm două teoreme de completitudine :

TEOREMA 3. *Sistemul de funcţii*

$$\{I_n^{(m)}(Q_0)\}, \{H_n^{(m)}(Q_j)\} \quad j = 1, 2, \ldots, l; \; n = 0, 1, 2, \ldots; \; m = 0, 1, \ldots, n$$



*este complet în subspaţiul lui $L_2(\Gamma)$ format din elementele ortogonale pe funcţiile*

$$\frac{\partial u_1(M)}{\partial \nu_M}, \frac{\partial u_2(M)}{\partial \nu_M}, \ldots, \frac{\partial u_p(M)}{\partial \nu_M} \quad (M \in \Gamma)$$

*unde $u_1(P)$, $u_2(P)$, $\ldots$, $u_p(P)$ sînt funcţiile proprii liniar independente corespunzătoare problemei lui Dirichlet.*

*Demonstraţie.* Fie $\delta(Q)$ o funcţie arbitrară din $L_2(\Gamma)$, pentru care sînt îndeplinite următoarele egalităţi :

$$\left.\begin{aligned} &\int_\Gamma \delta(Q_0) I_n^{(m)}(Q_0)\, d\sigma_{Q_0} = 0 \\ &\int_\Gamma \delta(Q_j) H_n^{(m)}(Q_j)\, d\sigma_{Q_j} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$j = 1, 2, \ldots, l; \; n = 0, 1, 2, \ldots; \; m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Evident că este suficient să arătăm că $\delta\,(\mathrm{M} = \alpha_1 \frac{\partial u_1(M)}{\partial \nu_M} + \ldots + \alpha_p \frac{\partial u_p(M)}{\partial \nu_M}$, unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sînt nişte constante.

Considerăm funcţia $\mu(M) \equiv 0$ pe $\Gamma$. Cuplul de funcţii $\mu$, $\delta$ astfel ales satisface, în mod evident, egalităţile (4), prin urmare funcţia

$$u(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \delta(Q) \frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}} d\sigma_Q \quad (P \in \Omega_i)$$

aparţine lui $S_k$ şi $\lim_{P \to M} u(P) = \mu(M) \equiv 0$. Deci funcţia $u(P)$ este o funcţie proprie, şi ea se poate reprezenta ca o combinaţie liniară :

$$u(P) = \alpha_1 u_1(P) + \ldots + \alpha_p u_p(P). \tag{9}$$

Ne folosim de formula cunoscută din teoria potenţialelor care este valabilă şi în prezent :

$$\delta(M) = \lim_{P_i, P_e \to M} \left[ \frac{\partial u(P_i)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial u(P_e)}{\partial \nu_M} \right],$$

unde $P_i$ şi $P_e$ sînt puncte din $\Omega_i$ respectiv $\Omega_e$ situate pe normala din punctul $M \in \Gamma$, simetric faţă de acest punct. Însă $u(P) \in S_k$, prin urmare $u(P_e) \equiv 0$ cînd $P_e \in \Omega_e$ deci şi $\frac{\partial u(P_e)}{\partial \nu_M} \equiv 0$. Pe lîngă aceastâ, avînd în vedere şi reprezentarea (9) obţinem

$$\delta(M) = \alpha_1 \frac{\partial u_1(M)}{\partial \nu_M} + \ldots + \alpha_p \frac{\partial u_p(M)}{\partial \nu_M},$$

ceea ce demonstrează teorema 3.

TEOREMA 4. *Sistemul de funcţii*

$$\left\{\frac{\partial I_n^{(m)}(Q_0)}{\partial \nu_{Q_0}}\right\}, \left\{\frac{\partial H_n^{(m)}(Q_j)}{\partial \nu_{Q_j}}\right\}, \; j = 1, 2, \ldots, l; \; n = 0, 1, \ldots; \; m = 0, 1, \ldots, n$$

*este complet în subspaţiul lui* $L_2(\Gamma)$ *format din elementele ortogonale pe funcţiile*

$$u_1(M), u_2(M), \ldots, u_p(M) \; (M \in \Gamma),$$

*aceste funcţii fiind funcţiile proprii liniar independente, corespunzătoare problemei lui Neumann.*

*Demonstraţie.* Vom demonstra că dacă pentru o funcţie $\mu(M) \in L(\Gamma)$ sînt îndeplinite egalităţile

$$\int_\Gamma \mu(Q_0) \frac{\partial I_n^{(m)}(Q_0)}{\partial \nu_{Q_0}} d\sigma_{Q_0} = 0,$$

$$\int_\Gamma \mu(Q_j) \frac{\partial H_n^{(m)}(Q_j)}{\partial \nu_{Q_j}} d\sigma_{Q_j} = 0,$$

$j = 1, 2, \ldots, l$; $n = 0, 1, \ldots$; $m = 0, 1, \ldots, n$, atunci $\mu(Q)$ este o combinaţie liniară formată din funcţiile proprii ale problemei lui Neumann.

Calea urmată este aceeaşi ca şi la teorema anterioară. Deci considerăm $\delta(Q) \equiv 0$ pe $\Gamma$. Perechea $\mu$, $\delta$ determină o funcţie $u(P) \in S_k$:

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \mu(Q) \frac{\partial}{\partial \nu_Q}\left(\frac{e^{ik\overline{PQ}}}{\overline{PQ}}\right) d\sigma_Q.$$

şi $\frac{\partial u(M)}{\partial \nu_M} = \delta(M) \equiv 0$. De unde rezultă

$$u(P) = \alpha_1 u_1(P) + \ldots + \alpha_p u_p(P).$$

Avînd în vedere că $u(P_e) \equiv 0$ în $\Omega_e$ şi formula cunoscută din teoria potenţialelor, obţinem

$$\mu(M) = \lim_{P_i \to M} [-u(P_i)] = -\alpha_1 u_1(M) - \ldots - \alpha_p u_p(M),$$

ceea ce demonstrează teorema.

În încheiere facem unele observaţii referitoare la rezolvarea problemelor la limită. În cazul problemei lui *Dirichlet* este dată funcţia $\mu(Q)$, iar funcţia necunoscută $\delta(Q)$ se poate determina cu ajutorul sistemului (4), care reprezintă un sistem Riesz-Fischer. Pentru ca să fim asiguraţi



de existenţa soluţiei sistemului (4), trebuie să presupunem că $\mu(Q) \in D(\Gamma)$. O condiţie suficientă pentru ca funcţia $\mu(Q)$ să aparţină acestei clase este ca ea să admită derivatele parţiale de ordinul întîi pe $\Gamma$ şi acestea să satisfacă condiţia lui Lipschitz. În cazul problemei lui Neumann, deci cînd este dată funcţia $\delta(Q)$ şi se cere $\mu(Q)$, lucrurile sînt mai simple, fiindcă în acest caz pentru orice $\delta(Q) \in L_2(\Gamma)$ sistemul (4) cu necunoscuta $\mu(Q)$ admite soluţie. Observăm de asemenea că sistemul (4) în ambele cazuri are soluţie unică.

Menţionăm că teorema 3 pentru domeniu simplu-conex a fost demonstrată de către I. N. V e k u a [3].

## О ПОЛНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ


### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде доказывается полность системы функций

$$\{I_n^{(m)}(Q_0)\}, \{H_n^{(m)}(Q_j)\} \quad j = 1, 2, \ldots, l; \; n = 0, 1, \ldots; \; m = 0, 1, \ldots, n,$$

соответственно системы

$$\left\{\frac{\partial I_n^{(m)}(Q_0)}{\partial \nu_{Q_0}}\right\}, \left\{\frac{\partial H_n^{(m)}(Q_j)}{\partial \nu_{Q_j}}\right\} j = 1, 2, \ldots, l; \; n = 0, 1, \ldots; \; m = 0, 1, \ldots, n$$

на определённых подпространствах $L_2(\Gamma)$, где $\Gamma$ является поверхностью многосвязной и ограниченной области в эвклидовом трёхмерном пространстве.

Показано как применяются вышеуказанные системы при решении задачи Дирихле и Неймана относительно уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0$$


## SUR LA COMPLÉTITUDE DE QUELQUES CLASSES DE FONCTIONS


### RÉSUMÉ

Dans le travail on démontre la complétitude du système de fonctions

$$\{I_n^{(m)}(Q_0)\}, \{H_n^{(m)}(Q_j)\}, \; j = 1, 2, \ldots, l; \; n = 0, 1, \ldots; \; m = 0, 1, \ldots, n,$$

respectivement du système

$$\left\{\frac{\partial I_n^{(m)}(Q_0)}{\partial \nu_{Q_0}}\right\}, \left\{\frac{\partial H_n^{(m)}(Q_j)}{\partial \nu_{Q_j}}\right\} \; j = 1, 2, \ldots, l; \; n = 0, 1, \ldots; \; m = 0, 1, \ldots, n$$

dans certains sous-espaces de $L_2(\Gamma)$, où $\Gamma$ est la surface d'un domaine multiple-connexe et borné dans l'espace euclidien à trois dimensions.

On montre aussi la manière dont les systèmes ci-dessus s'appliquent à la résolution du problème de Dirichlet et Neumann relatif à l'équation

$$\Delta u + k^2 u = 0 .$$

BIBLIOGRAFIE


1. Lebedev N. N., *Funcţii speciale şi aplicaţiile lor*. Edit. Tehnică, Bucureşti, 1957, p. 185–189 (trad. din limba rusă).
2. Миранда К., *Уравнения с частными производными еллиптического типа*, Москва, 1957, 124—125.
3. Векуа И. Н., *О полноте системы метаармонических функций*. Доклады Акад. Наук СССР, XC, *5*, 715—718 (1953).


Primit la 1. VI. 1962.