CARACTERIZAREA MULŢIMII INTEGRALELOR TUTUROR ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE LINIARE OMOGENE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI, DE ORDIN DAT*)

DE

F. RADÓ

(Cluj)

1. Fie $\mathcal{L}_n$ clasa de funcţii reale $y = f(x)$, definite pe toată axa reală, care verifică o ecuaţie diferenţială de forma

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_n y = 0, \tag{1.1}$$

unde $A_1, \ldots, A_n$ sînt constante reale oarecari. Se ştie că funcţiile din $\mathcal{L}_n$ sînt funcţii întregi. Scopul lucrării de faţă este caracterizarea clasei $\mathcal{L}_n$ prin proprietăţile în termeni finiţi.

Se arată uşor că pentru orice $f(x) \in \mathcal{L}_n$ există o formulă de adunare

$$f(x + y) = \varphi_1(x) \cdot \psi_1(y) + \varphi_2(x) \cdot \psi_2(y) + \ldots + \varphi_n(x) \cdot \psi_n(y), \tag{1.2}$$

unde funcţiile φ_i, ψ_i, $i = 1, \ldots, n$, sînt de asemenea întregi şi depind evident de f. Membrul II în (1.2) este un cvasipolinom. Condiţii pentru ca o funcţie de două variabile să fie un cvasipolinom au fost date de T. Popoviciu în [8]. De asemenea se arată uşor că orice $f(x) \in \mathcal{L}_n$ verifică o relaţie de forma

$$a_0(h) f(x + nh) + a_1(h) f(x + \overline{n-1}h) + \ldots + a_n(h) f(x) = 0, \tag{1.3}$$

unde $a_i(h)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, sînt funcţii întregi (care depind de f) şi $a_0(h) \not\equiv 0$. Zerourile funcţiilor întregi nu au nici un punct de acumulare la distanţă finită, deci există un interval $(0, H)$ astfel ca $a_0(h) \neq 0$, cînd $h \in (0, H)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Vom arăta că din proprietatea (1.2) respectiv (1.3), presupuse pentru funcţii continue, rezultă că $f(x) \in \mathcal{L}_n$. Cu alte cuvinte, rezolvăm în cadrul mulţimii funcţiilor continue ecuaţiile funcţionale (1.2) şi (1.3), în care toate funcţiile ce intervin sînt funcţii necunoscute ; vom stabili că funcţiile

*) Această lucrare apare şi în limba franceză în revista „Mathematica", vol. 4 (27), 1962.

f din mulţimea soluţiilor acestor ecuaţii funcţionale aparţin clasei $\mathcal{L}_n$. În cazul ecuaţiei (1.3) va trebui să presupunem că $a_0(h) \neq 0$ într-un interval $(0, H)$.

Ecuaţia funcţională (1.2) a fost studiată de C. Stéphanos [12], T. Levi-Civita [6] şi P. Stäckel [10, 11]. Relativ la demonstraţiile date de C. Stéphanos şi T. Levi-Civita putem face observaţia că ei utilizează afirmaţia inexactă că „anularea identică a wronskianului atrage după sine dependenţa liniară a funcţiilor considerate". În referatul [11], P. Stäckel schiţează următorul mod de a rezolva ecuaţia (1.2) : Funcţiile de variabilă $xf(x+y)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sînt liniar dependente, deci wronskianul lor este nul; înlocuind în acest wronskian $x = 0$, se obţine pentru $f(y)$ o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă cu coeficienţi constanţi. Relativ la această metodă, facem observaţia că nu s-a demonstrat că există cel puţin un coeficient diferit de zero în ecuaţia diferenţială obţinută şi astfel această ecuaţie poate să fie iluzorie, cu toţi coeficienţii nuli. Demonstraţia dată de P. Stäckel în [10] pentru clasa funcţiilor odată derivabile, este corectă. Aici se ajunge la un sistem liniar de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi şi de aceea considerăm că demonstraţia dată pentru acest caz în lucrarea noastră este mai directă. I. Fenyő a considerat ecuaţia (1.2) în cadrul funcţiilor generalizate [1], însă soluţia dată se referă la cazul în care funcţiile generalizate care corespund la $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sînt liniar independente într-un sens introdus de autor. N-a demonstrat şi pare că nu e uşor de a arăta că un sistem de n funcţii continue liniar independente în sens obişnuit, sînt şi liniar independente în sensul autorului şi astfel rezultatul lui Fenyő nu rezolvă ecuaţia funcţională (1.2) pentru funcţii continue.

Problema caracterizării clasei $\mathcal{L}_n$ prin ecuaţia funcţională (1.3), aplicată funcţiilor continue, a fost pusă de T. Popoviciu.

Metoda de rezolvare a ecuaţiei funcţionale (1.2) şi a ecuaţiei (1.3), în cazul particular în care funcţiile $a_i(h)$, $i = 0, \ldots, n$, sînt presupuse odată continuu derivabile, utilizează ideea lui Kac aplicată în [5] pentru rezolvarea ecuaţiei funcţionale a lui Cauchy, şi anume prin integrarea ecuaţiei funcţionale se arată că din continuitatea lui $f(x)$ rezultă derivabilitatea ei. Rezolvarea ecuaţiei (1.3), fără nicio restricţie de derivabilitate, se bazează pe lema de la nr. 4. În nr. 4, ca o aplicaţie a lemei, se stabilesc rezultatele fundamentale bine cunoscute din teoria şirurilor recurente, pe de o parte cu scopul de a pune în evidenţă utilitatea acestei leme, pe de altă parte pentru a pregăti nr. următor.

O altă proprietate a funcţiilor din clasa $\mathcal{L}_n$ este

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \cdots f(x+nh) \\ f(x+h) & f(x+2h) & \cdots f(x+\overline{n+1}h) \\ f(x+nh) & f(x+\overline{n+1}h) & \cdots f(x+2nh) \end{vmatrix} = 0. \tag{1.4}$$

Această ecuaţie funcţională a fost rezolvată pentru funcţii de n ori derivabile de D. V. Ionescu [3] şi I. Stamate [9]. Ea a fost

rezolvată în mulţimea funcţiilor continue pentru cazul $n = 2$ de D. V. Ionescu în [4], iar recent în lucrarea [2] N. Ghircoiaşiu şi M. Roşcău au demonstrat că dacă funcţia continuă f verifică ecuaţia (1.4), atunci ea verifică o ecuaţie de forma (1.3).

2. Demonstrăm

TEOREMA 1. *Mulţimea funcţiilor reale continue $f(x)$, care verifică ecuaţia (1.2) împreună cu funcţii continue ψ_i şi φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, pentru x şi y numere reale oarecari, coincide cu clasa $\mathcal{L}_n$.*

Fie $f(x) \in \mathcal{L}_n$; ea este o integrală a unei ecuaţii diferenţiale (1.1). Se observă că $f(x+a)$, unde a este o constantă, verifică aceeaşi ecuaţie. Notînd cu $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ un sistem fundamental de integrale ale ecuaţiei (1.1), avem

$$f(x+a) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x),$$

deci

$$f(x+y) = \psi_1(y)\varphi_1(x) + \psi_2(y)\varphi_2(x) + \ldots + \psi_n(x)\varphi_n(x). \tag{2.1}$$

Funcţiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fiind liniar independente, există punctele $x_1, \ldots, x_n$ [8], astfel ca

$$|\varphi_j(x_i)| \neq 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Înlocuind în (2.1) x succesiv prin $x_1, \ldots, x_n$, obţinem un sistem de n ecuaţii liniare cu necunoscutele $\psi_1(y), \ldots, \psi_n(y)$ avînd determinantul diferit de zero. Scriind formulele lui Cramer, fiecare funcţie $\psi_i(y)$ apare ca o combinaţie liniară a funcţiilor întregi $f(x_1+y), \ldots, f(x_n+y)$. Deci $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sînt funcţii întregi ca şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Astfel orice $f(x) \in \mathcal{L}_n$ verifică o ecuaţie (1.2) cu funcţii continue φ_i şi ψ_i (chiar întregi).

Să presupunem acum că funcţiile continue f, φ_i, ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, verifică ecuaţia (1.2) pentru x şi y numere reale oarecari. Vom demonstra că atunci $f(x) \in \mathcal{L}_n$.

Putem admite că funcţiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sînt liniar independente. Într-adevăr, să presupunem că în acest caz s-a demonstrat $f(x) \in \mathcal{L}_n$. Cazul în care $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sînt liniar dependenţi, revine la acest caz cu un număr mai mic de termeni în membrul II al ecuaţiei (1.2) ; deci $f(x) \in \mathcal{L}_{n'}$, unde $n' < n$. Dar atunci $f(x) \in \mathcal{L}_n$. În mod analog, putem admite că funcţiile $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sînt liniar independente.

Integrăm egalitatea (1.2) în raport cu y între limitele 0 şi y. Notînd

$$F(y) = \int_0^y f(t)dt, \quad \Psi_i(y) = \int_0^y \psi_i(t)dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

obţinem

$$F(x+y) - F(x) = \varphi_1(x)\Psi_1(y) + \varphi_2(x)\Psi_2(y) + \ldots + \varphi_n(x)\Psi_n(y). \tag{2.2}$$

Dacă ar exista o relaţie liniară între funcţiile $\psi_1, \ldots, \psi_n$ cu nu toţi coeficienţii nuli, prin derivare am obţine că funcţiile $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sînt liniar dependente, contrar ipotezei. Aşadar, funcţiile $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sînt liniar independente şi în conformitate cu [8] putem alege punctele $y_1, \ldots, y_n$ astfel ca

$$|\psi_j(y_i)| \neq 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Punem în (2.2) succesiv $y = y_1, \ldots, y = y_n$; aplicînd formulele lui Cramer sistemului de ecuaţii liniare astfel obţinut, putem exprima funcţiile $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, ca nişte combinaţii liniare ale funcţiilor $F(x)$, $F(x + y_1), \ldots, F(x + y_n)$. Rezultă că funcţiile $\varphi_i(x)$ admit derivate de ordinul întîi continue. Aceeaşi concluzie rezultă pentru $\psi_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; iar din (1.2) deducem că şi f are o derivată continuă.

Să presupunem acum că f admite derivata de ordinul r continuă. Atunci $F(x)$ are o derivată de ordinul $r + 1$ continuă. Din formulele lui Cramer, considerate mai sus, rezultă că $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ admit derivate de ordinul $r + 1$ continue, şi acelaşi lucru este valabil pentru $\psi_1, \ldots, \psi_n, f$. Prin urmare cele $2n + 1$ funcţii φ_i, ψ_i, f sînt indefinit derivabile. Acum putem aplica rezultatele lui P. S t a c k e l [10], dar putem continua şi în felul următor:

Notăm wronskianul funcţiilor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ cu

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n | x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Deşi funcţiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sînt liniar independente, se poate întîmpla ca $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n \,|\, x) = 0$ pentru fiecare număr real x. Ţinînd seamă că $\varphi_i(x) \not\equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, există un şir $n_1, \ldots, n_q$, extras din $1, 2, \ldots, n$, astfel ca $W(\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_q} | \, x) \not\equiv 0$ şi $W(\varphi_{m_1}, \ldots, \varphi_{m_{q+1}} | \, x) \not\equiv 0$ pentru orice şir $m_1, \ldots, m_{q+1}$ extras din $1, 2, \ldots, n$. Punem, pentru a fixa ideile, $n_1 = 1$, $n_2 = 2, \ldots, n_q = q$. Atunci există x_0 astfel ca

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_q | x_0) \neq 0.$$

Dacă $q < n$, facem următorul raţionament: există o vecinătate I a punctului x_0 astfel ca

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q | x) \neq 0, \text{ dacă } x \in I;$$

în acelaşi timp $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_q, \varphi_i | x) \equiv 0$, $i = q + 1, \ldots, n$, deci în conformitate cu problema nr. 60 cap. VII din cartea lui G. P ó l y a şi G. S z e g ő [7], funcţia φ_i, $i = q + 1, \ldots, n$, restrînsă pe I, este o combinaţie liniară a funcţiilor $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$. Aşadar avem pentru $x \in I$ şi y număr real oarecare

$$f(x + y) = \varphi_1(x)\chi_1(y) + \ldots + \varphi_q(x)\chi_q(y), \tag{2.3}$$

unde $\chi_1(y), \ldots, \chi_q(y)$ sînt combinaţii liniare ale funcţiilor $\psi_1(y), \ldots, \psi_n(y)$. Dacă $q = n$, formula (2.3) de asemenea are loc, ea fiind identică cu formula (1.2).

Din (2.3) deducem pentru $x \in I$, $y \in (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} f(x + y) &= \varphi_1(x)\chi_1(y) + \ldots + \varphi_q(x)\chi_q(y), \\ f'(x + y) &= \varphi_1'(x)\chi_1(y) + \ldots + \varphi_q'(x)\chi_q(y) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(q)}(x + y) &= \varphi_1^{(q)}(x)\chi_1(y) + \ldots + \varphi_q^{(q)}(x)\chi_q(y), \end{aligned}$$

din care se obţine

$$\begin{vmatrix} f(x + y) & \varphi_1(x) \ldots \varphi_q(x) \\ f'(x + y) & \varphi_1'(x) \ldots \varphi_q'(x) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ f^{(q)}(x + y) & \varphi_1^{(q)}(x) \ldots \varphi_1^{(q)} \end{vmatrix} = 0.$$

Punem aici $x = x_0$, $y = x - x_0$ şi dezvoltăm determinantul după coloana întîia

$$A_0 f^{(q)}(x) + A_1 f^{(q-1)}(x) + \ldots + A_q f(x) = 0.$$

Ţinînd seamă că $A_0 = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_q | x_0) \neq 0$, avem $f(x) \in \mathcal{L}_q$. Dar din $q \leqslant n$ rezultă $\mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_n$, deci $f(x) \in \mathcal{L}_n$. Teorema 1 este demonstrată.

3. Teorema următoare se demonstrează în acest punct într-un caz particular. Demonstraţia completă se găseşte la punctul 5.

TEOREMA 2. *Mulţimea funcţiilor reale continue $f(x)$, care, pentru x, h numere reale oarecari, verifică ecuaţia (1.3) împreună cu funcţii continue $a_i(h)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, ($a_0(h) \neq 0$ pentru $x \in (0, H)$), coincide cu clasa de funcţii $\mathcal{L}_n$.*

Fie $f(x) \in \mathcal{L}_n$; am văzut că funcţia $f(x)$ verifică relaţia (1.2), unde putem presupune că $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ formează un sistem fundamental de integrale ale ecuaţiei diferenţiale (1.1). Din (1.2) se deduce

$$f(x + ih) = \varphi_1(ih)\psi_1(x) + \ldots + \varphi_n(ih)\psi_n(x), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

deci

$$\begin{vmatrix} f(x) & \varphi_1(0) \ldots \varphi_n(0) \\ f(x + h) & \varphi_1(h) \ldots \varphi_n(h) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ f(x + nh) & \varphi_1(nh) \ldots \varphi_n(nh) \end{vmatrix} = 0$$

și dezvoltînd acest determinant după elementele primei coloane, obținem

$$a_0(h)f(x+nh)+a_1(h)f(x+\overline{n-1}\,h)+\ldots+a_n(h)f(x)=0.$$

Funcția $a_0(h)$ este

$$a_0(h)=\begin{vmatrix}\varphi_1(0) & \ldots\ \varphi_n(0)\\ \varphi_1(h) & \ldots\ \varphi_n(h)\\ \vdots & \vdots\\ \varphi_1(\overline{n-1}h) & \ldots\ \varphi_n(\overline{n-1}h)\end{vmatrix}=h^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}\varphi_1(0) & \ldots\ \varphi_n(0)\\ \frac{1}{h}\Delta\varphi_1(0) & \ldots\ \frac{1}{h}\Delta\varphi_n(0)\\ \vdots & \vdots\\ \frac{1}{h^{n-1}}\Delta^{n-1}\varphi_1(0) & \ldots\ \frac{1}{h^{n-1}}\Delta^{n-1}\varphi_n\end{vmatrix}$$

deci

$$\lim_{h\to 0}\frac{a_0(h)}{h^{\frac{n(n-1)}{2}}}=W(\varphi_1,\ldots,\varphi_n|0)\neq 0.$$

Rezultă că există un interval $(0, H)$, astfel ca $a_0(h)\neq 0$ pentru $x\in(0, H)$. Astfel am demonstrat că orice $f(x)\in\mathcal{L}_n$ verifică o ecuație de forma (1.3) cu funcții continue (chiar întregi) $a_i(h)$, $i=0, 1, \ldots, n$ și $a_0(h)\neq 0$ într-un anumit interval $(0, H)$.

Să presupunem acum că relația (1.3) are loc pentru $x\in(-\infty, \infty)$ și $h\in(0, H)$, funcția $f(x)$ este continuă pe toată axa reală, funcțiile $a_0(h), \ldots, a_n(h)$ admit derivate continue de ordinul 1 în intervalul $(0, H)$ și $a_0(h)\neq 0$ pentru $0<h<H$. Vom demonstra că $f(x)\in\mathcal{L}_n$. Cazul în care despre $a_i(h)$, $i=0, \ldots, n$ se presupune numai continuitatea, va fi tratat, precum s-a spus mai sus, la nr. 5. De fapt demonstrăm mai mult decît s-a enunțat, căci variația lui h este restrînsă pe intervalul $(0, H)$. Considerăm că acest detaliu nu este prea important și de aceea nu l-am pus în evidență în enunțul teoremei 2.

Putem admite că $a_n(h)\not\equiv 0$ în $(0, H)$, căci în caz contrar avem o ecuație de aceeași formă cu un număr mai mic de termeni, care verifică această ipoteză. Atunci există $h_0\in(0, H)$ astfel ca

$$A=-\int_0^{h_0}a_n(h)dh\neq 0.$$

Integrăm egalitatea (1.3) între limitele 0 și h_0

$$Af(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{h_0}a_{n-i}(h)f(x+ih)dh. \tag{3.1}$$

Avem

$$F(x)=\int_0^{h_0}a_{n-i}(h)f(x+ih)dh=\frac{1}{i}\int_x^{x+ih_0}a_{n-i}\left(\frac{u-x}{i}\right)f(u)du,$$

$i=1, 2, \ldots, n$. Dacă funcția f admite o derivată continuă de ordinul r ($r=0, 1, \ldots$), atunci $F_i(x)$ admite derivata

$$F'(x)=-\frac{1}{i^2}\int_x^{x-ih_0}a'_{n-i}\left(\frac{u-x}{i}\right)f(u)du+\frac{1}{i}a_{n-i}(h_0)f(x+ih_0)-$$

$$-\frac{1}{i}a_{n-i}(0)f(x)=-\frac{1}{i}\int_0^{h_0}a'_{n-i}(h)f(x+ih)dh+$$

$$+\frac{1}{i}a_{n-i}(h_0)f(x+ih_0)-\frac{1}{i}a_{n-i}(0)f(x),$$

care este o funcție de r ori continuu derivabilă. Astfel $F_i(x)$ admite o derivată de ordinul $r+1$ continuă. Din (3.1) rezultă că funcția $f(x)$ admite o derivată de ordinul $r+1$ continuă. În acest fel am demonstrat că funcția $f(x)$ este indefinit derivabilă.

Din (1.3) deducem

$$a_0(h)f(x_i+nh)+a_1(h)f(x+\overline{n-1}\,h)+\ldots+a_n(h)f(x_i)=0, \quad i=1, \ldots, n+1, \tag{3.2}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind numere reale oarecari. Ținînd seamă că pentru $h\in(0, H)$ sistemul omogen (3.2) admite o soluție nebanală $a_0(h), \ldots, a_n(h)$, rezultă pentru $h\in(0, H)$ și $x_i\in(-\infty, \infty)$, $i=1, 2, \ldots, n+1$

$$\begin{vmatrix}f(x_1+nh) & \ldots\ f(x_1+h) & f(x_1)\\ f(x_2+nh) & \ldots\ f(x_2+h) & f(x_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ f(x_{n+1}+nh) & \ldots\ f(x_{n+1}+h) & f(x_{n+1})\end{vmatrix}=0,$$

sau

$$\begin{vmatrix}\frac{\Delta^n f(x_1)}{h^n} & \ldots\ \frac{\Delta f(x_1)}{h} & f(x_1)\\ \frac{\Delta^n f(x_2)}{h^n} & \ldots\ \frac{\Delta f(x_2)}{h} & f(x_2)\\ \vdots & \vdots & \\ \frac{\Delta^n f(x_{n+1})}{h^n} & \ldots\ \frac{\Delta f(x_{n+1})}{h} & f(x_{n+1})\end{vmatrix}=0.$$

Făcînd $h \to 0$, obținem

$$\begin{vmatrix} f^{(n)}(x_1) & \dots & f'(x_1) & f(x_1) \\ f^{(n)}(x_2) & \dots & f'(x_2) & f(x_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x_{n+1}) & \dots & f'(x_{n+1}) & f(x_{n+1}) \end{vmatrix} = 0$$

pentru numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ oarecari. Rezultă că funcțiile $f^{(n)}, \dots, f', f$ sînt liniar dependente [8], deci $f(x) \in \mathcal{L}_n$.

4. La demonstrația teoremei 2, fără restricția de derivabilitate pentru coeficienții $a(h)$, avem nevoie de următoarea

LEMĂ. *Fie $r_1, r_2, \dots, r_s$ numere complexe distincte și diferite de zero, $P_k(x)$, $k = 1, \dots, s$, polinoame peste corpul numerelor complexe de grade $p_k - 1$ și $n = \sum_{k=1}^{s} p_k$. Din relațiile*

$$\sum_{k=1}^{s} r_k^m P_k(m) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1 \tag{4.1}$$

rezultă

$$P_k(x) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \tag{4.2}$$

Într-adevăr, scriind polinomul $P_k(x)$ sub forma

$$P_k(x) = a_{k0} + \frac{a_{k1}}{r_k} x + \frac{a_{k2}}{r_k^2} x(x-1) + \dots + \frac{a_{k, p_k - 1}}{r_k^{p_k - 1}} x(x-1)\dots(x - p_k + 2),$$

relațiile (4.1) devin

$$\sum_{k=1}^{s} \Big[r_k^m a_{k0} + m r_k^{m-1} a_{k1} + m(m-1) r_k^{m-2} a_{k2} + \\ + \dots + m(m-1)\dots(m - p_k + 2) r_k^{m - p_k + 1} a_{k, p_k - 1} \Big] = 0, \\ m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Am obținut un sistem de n ecuații liniare și omogene în cele n necunoscute a_{kj}. Ținînd seamă că determinantul acestui sistem este diferit de zero, rezultă lema.

CONSECINȚĂ. *Numerele r_k fiind date în felul precizat în lemă și b_m fiind de asemenea numere complexe date, condițiile*

$$\sum_{k=1}^{s} r_k^m P_k(m) = b_m, \quad m = 0, 1, \dots, \sum_{k=1}^{s} p - 1 \tag{4.3}$$

determină în mod unic polinoamele $P_k(x)$ de grad $p_k - 1$, $k = 1, \dots, s$.

Condițiile (4.3) formează un sistem de n ecuații liniare avînd ca necunoscute cei n coeficienți ai polinoamelor P_k, $k = 1, \dots s$. Deoarece sistemul omogen atașat are numai soluția banală, sistemul (4.3) are o soluție unică.

APLICAȚIE. Să se determine șirul de numere complexe $\{\dots, f_{-n}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_m, \dots\}$, care verifică relația de recurență

$$f_{m+n} + c_1 f_{m+n-1} + \dots + c_n f_m = 0, \quad m \text{ întreg oarecare}, \tag{4.4}$$

unde $c_1, \dots, c_n$ sînt numere complexe date și $c_n \neq 0$.

Dacă șirul $\{f_m\}$, $m = \dots, 1, 0, 1, \dots$, satisface relația de recurență (4.4), zicem că el este o soluție a acesteia. O combinație liniară de soluții este o soluție. Fie $r_1, r_2, \dots, r_s$ rădăcinile distincte ale ecuației

$$r^n + c_1 r^{n-1} + \dots + c_n = 0, \tag{4.5}$$

numită ecuație caracteristică, avînd multiplicitățile $p_1, p_2, \dots, p_s$ ($p_1 + p_2 + \dots + p_s = n$). Se constată prin înlocuire în (4.4) că șirul

$$\left\{ \sum_{k=1}^{s} r_k^m P_k(m) \right\} \tag{4.6}$$

este o soluție a relației (4.4), oricare ar fi polinoamele $P_k(x)$ de gradele $p_k - 1$, $k = 1, \dots, s$.

Se observă imediat că există o singură soluție $\{f_m\}$, pentru care $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ iau valori date (căci celelalte valori f_m se calculează din aproape în aproape folosind (4.4)). Pe de altă parte din consecința lemei rezultă că există o soluție de forma (4.6), care pentru $m = 0, 1, \dots, n-1$ ia valori date. *Deci șirurile* (4.6) *reprezintă toate soluțiile relației de recurență* (4.4).

Fie acum $c_1, \dots, c_n$ numere reale, $c_n \neq 0$; să determinăm în acest caz soluțiile reale ale relației de recurență. Acestea sînt șirurile (4.6), care au toți termenii reali. Rădăcinile complexe ale ecuației caracteristice apar în perechi conjugate $r_k = e^{\alpha_k + i\beta_k}$, $\bar{r}_k = e^{\alpha_k - i\beta_k}$, $k = 1, \dots, \sigma$, deci termenul general al unui șir (4.6) se scrie acum

$$f_m = \sum_{k=1}^{\sigma} [r_k^m P_k(m) + \bar{r}_k^m Q_k(m)] + \sum_{k=2\sigma+1}^{s} r_k^m R_k(m).$$

Trecînd în această relaţie la numere complexe conjugate şi ţinînd seamă că $f_m, r_{2\sigma+1}, \dots, r_s$ sînt numere reale, obţinem

$$f_m = \sum_{k=1}^{\sigma}\left[\bar r_k^m \bar P_k(m) + r_k^m \bar Q_k(m)\right] + \sum_{k=2\sigma+1}^{s} r_k^m \bar R_k(m),$$

(s-a notat cu $\bar P(x)$ polinomul dedus din $P(x)$ prin schimbarea coeficienţilor în numere complexe conjugate). Ultimele două egalităţi ne dau

$$\sum_{k=1}^{\sigma} r_k^m\left[P_k(m) - \bar Q_k(m)\right] + \sum_{k=1}^{\sigma}\bar r_k^m\left[Q_k(m) - \bar P_k(m)\right] + \sum_{k=2\sigma+1}^{s} r_k^m\left[R_k(m) - \bar R_k(m)\right] = 0,$$

pentru $m = 0, 1, \dots$ Aplicînd lema, găsim că

$$Q_k(x) \equiv \bar P_k(x); \text{ şi } R_k(x) \equiv \bar R_k(x),$$

deci polinoamele $R_k(x)$ sînt reale şi

$$r_k^m P_k(m) + \bar r_k^m Q_k(m) = e^{(\alpha_k + i\beta_k)m}\sum_j a_{kj} m^j + e^{(\alpha_k - i\beta_k)m}\sum_j \bar a_{kj} m^j =$$

$$= e^{\alpha_k m}\left[\sum_j (a_{kj}+\bar a_{kj})\cos(\beta_k m) + i(a_{kj}-\bar a_{kj})\sin(\beta_k m)\right] m^j =$$

$$= e^{\alpha_k m}\left[P_k^{(1)}(m)\cos(\beta_k m) + P_k^{(2)}(m)\sin(\beta_k m)\right],$$

unde $P_k^{(1)}(x)$ şi $P_k^{(2)}(x)$ sînt polinoame reale de grad $p_k - 1$.

Astfel, orice soluţie reală a relaţiei de recurenţă (4.4) *cu coeficienţii* $c_1, \dots, c_n$ *reali, are forma*

$$\left\{\sum_{k=1}^{\sigma} e^{\alpha_k m}\left[P_k^{(1)}(m)\cos(\beta_k m) + P_k^{(2)}(m)\sin(\beta_k m)\right] + \sum_{k=2\sigma+1}^{\sigma} r_k^m R_k(m)\right\}. \tag{4.7}$$

5. Trecem la demonstraţia teoremei 2, pentru cazul general. Fie $f(x)$ o funcţie reală continuă pentru $-\infty < x < \infty$, $a_0(h) \neq 0$, $a_1(h), \dots, a_n(h)$ funcţii reale continue pentru $0 < h < H$, care verifică ecuaţia funcţională (1.3). Vom arăta că $f(x) \in \mathcal{L}_n$. Lăsăm la o parte cazul trivial $f(x) \equiv 0$.

Să presupunem că h este un număr fix din $(0, H)$. Punem, în (1.3), $x = mh$ şi notăm $f_m = f(mh)$, $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$; obţinem relaţia de recurenţă

$$a_0(h) f_{m+n} + a_1(h) f_{m+n-1} + \dots + a_n(h) f_m = 0, \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Rezultă că şirul $\{f_m\}$ este de forma (4.6), adică

$$f(mh) = \sum_{k=1}^{s} r_k^m P_k(m), \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots, \tag{5.1}$$

unde $r_1, \dots, r_s$ sînt rădăcinile distincte şi diferite de zero ale ecuaţiei caracteristice

$$a_0(h) r^n + a_1(h) r^{n-1} + \dots + a_n(h) = 0,$$

$P_1, P_2, \dots, P_s$ sînt polinoame neidentic nule avînd respectiv gradele efective, $p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_s - 1$ şi $\sum_{k=1}^{s} p_k \leq n$ (dacă se întîmplă ca, pentru anumiţi indici k, $P_k \equiv 0$ în (4.6), atunci termenii respectivi sînt suprimaţi în (5.1), s devenind mai mic). Polinoamele P_k şi $P_{k'}$, care corespund la rădăcini complexe conjugate r_k şi $r_k' = \bar r_k$, sînt conjugate, iar polinoamele care corespund la rădăcini reale sînt reale, după cum s-a arătat la sfîrşitul punctului precedent.

Dacă luăm o altă valoare fixă pentru h din $(0, H)$, avem de asemenea o egalitate de forma (5.1) cu alte valori pentru $r_1, r_2, \dots, r_s$, numărul lor schimbîndu-se şi de asemenea alte polinoame P_k. Astfel $s = s(h)$ şi fie

$$s_0 = \max_{0<h<H} s(h) = s(h_0);$$

acest maxim există pentru că s este un număr întreg $\leq n$. Avem $s_0 \geq 1$, căci dacă $s_0 = 0$, din (5.1) rezultă imediat că $f(x) \equiv 0$, caz pe care l-am lăsat la o parte.

Scriem formula (5.1) pentru cazurile $h = h_0$ şi $h = \frac{h_0}{q}$, unde q este un număr natural

$$f(mh_0) = \sum_{k=1}^{s_0} r_k^m P_k(m), \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{5.2}$$

$$f\left(m\frac{h_0}{q}\right) = \sum_{k=1}^{s_1} \rho_k^m Q_k(m), \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{5.3}$$

Punem în (5.3) qm în locul lui m şi comparăm cu (5.2)

$$\sum_{k=1}^{s_0} r_k^m P_k(m) - \sum_{k=1}^{s_1} (\rho_k^q)^m Q_k(qm) \equiv 0, \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Fiecare r_k trebuie să figureze printre $\rho_1^q, \dots, \rho_{s_1}^q$, căci altfel ar rezulta din lemă că polinomul respectiv $P_k(x) \equiv 0$, contrar celor precizate mai sus. Deoarece numerele r_k sînt toate diferite şi $s_1 \leq s_0$, avem $s_1 = s_0$ şi fiecare r_k este egal cu exact unul dintre numerele $\rho_1^q, \dots, \rho_s^q$. Dacă presupunem că acestea sînt aşezate în ordine convenabilă, rezultă din lemă

$$r_k = \rho_k^q, \quad P_k(x) \equiv Q_k(qx), \quad k = 1, 2, \dots, s_0.$$

Notăm $r_k = e^{\mu_k}$; avem

$$\rho_k = e^{\frac{\mu_k + 2\pi\nu_k i}{q}} \quad \text{și} \quad Q_k(x) \equiv P_k\left(\frac{x}{q}\right),$$

unde despre întregul $\nu_k = \nu_k(q)$ putem presupune

$$-\frac{q}{2} < \nu_k(q) \leqslant \frac{q}{2}. \tag{5.4}$$

Formula (5.3) devine (scriind p în loc de m)

$$f\left(\frac{p}{q}\right)h_0) = \sum_{k=1}^{s_0} e^{\mu_k \frac{p}{q}} P_k\left(\frac{p}{q}\right) e^{2\pi\nu_k \frac{p}{q} i}, \quad p, q \text{ întregi}, \ q > 0. \tag{5.5}$$

Fie

$$P_k\left(\frac{p}{q} + x\right) = \sum_{j=0}^{p_k - 1} a_{kj} x^j$$

și $N = \sum_{k=1}^{s_0} p$; coeficienții a_{kj} depind de $\frac{p}{q}$, cu excepția lui $a_{k, p_k - 1}$ care este o constantă diferită zero, polinomul P_k avînd gradul efectiv $p_k - 1$. Substituim în (5.5) pentru p succesiv $p, p + q, \ldots, p + (N - 1)q$

$$f\left[\left(\frac{p}{q} + m\right)h_0\right] = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{p_k - 1} e^{\mu_k m} m^j \left(a_{kj} e^{\mu_k \frac{p}{q}} e^{2\pi\nu_k \frac{p}{q} i}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, N - 1. \tag{5.6}$$

Sistemul de N ecuații liniare (5.6) determină cele N necunoscute $a_{kj} e^{\mu_k \frac{p}{q}} e^{2\pi\nu_k \frac{p}{q} i}$, $j = 0, 1, \ldots, p_k - 1$, $k = 1, 2, \ldots, s_0$, căci din lemă rezultă că determinantul sistemului este diferit de zero. Urmează că aceste necunoscute sînt combinații liniare ale lui $f\left(\frac{p}{q} h_0\right)$, $f\left[\left(\frac{p}{q} + 1\right) h_0\right]$, $\ldots$, $f\left[\left(\frac{p}{q} + N - 1\right)h_0\right]$. Ținînd seamă că $a_{k, p_k - 1} \neq 0$, rezultă că

$$\varphi_k\left(\frac{p}{q}\right) = e^{2\pi\nu_k(q)\frac{p}{q} i}, \quad k = 1, 2, \ldots, s_0 \tag{5.7}$$

sînt funcții continue pe mulțimea $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ a numerelor raționale (funcțiile φ_k definite pentru numere reale raționale iau valori complexe). Nu putem afirma același lucru despre $2\pi\nu_k(q)\,\frac{p}{q}$, despre care nici nu putem spune că e o funcție de $\frac{p}{q}$, căci dacă amplificăm fracția $\frac{p}{q}$, $\nu_k(q)$ se schimbă și astfel $2\pi\nu_k(q)\,\frac{p}{q}$ nu ia o valoare determinată pentru un număr rațional $\frac{p}{q}$.

Din continuitatea funcției

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = e^{2\pi\nu(q)\frac{p}{q} i}, \quad \nu = \nu(q) \text{ întreg}, \ -\frac{q}{2} < \nu(q) \leqslant \frac{q}{2}$$

vom trage acum concluzia că $\nu(q) = \text{const.}$, pentru q suficient de mare. Avem $\varphi(0) = 1$. Deci

$$\varphi\left(\frac{1}{q}\right) = e^{2\pi\frac{\nu(q)}{q} i} \to 1, \text{ dacă } q \to \infty;$$

ținînd seamă că în baza relației (5.4), $\arg \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = 2\pi\,\frac{\nu(q)}{q}$ verifică inegalitatea $-\pi < \arg \varphi\left(\frac{1}{q}\right) \leqslant \pi$, rezultă

$$\arg \varphi\left(\frac{1}{q}\right) \to 0, \text{ dacă } q \to \infty,$$

deci

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\nu(q)}{q} = 0.$$

Așadar există numărul natural q_0, astfel ca

$$\left|\frac{\nu(q)}{q}\right| < \frac{1}{6}, \text{ dacă } q > q_0. \tag{5.8}$$

Fie $\eta > 0$ astfel ca

$$\left|\varphi\left(\frac{p}{q}\right) - \varphi\left(\frac{p'}{q'}\right)\right| < 1, \text{ dacă } 0 \leqslant \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'} \leqslant 1, \left|\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right| < \eta \tag{5.9}$$

și

$$N = \max\left(q_0, \left[\frac{1}{\eta}\right] + 1\right).$$

Să presupunem că există $q_1 > N$ și $q_2 > N$ astfel ca $\nu_1 = \nu(q_1) \neq \neq \nu_2 = \nu(q_2)$. Să considerăm punctul $x_0 = \frac{1}{2\,|\nu_1 - \nu_2|}$ și să determinăm p_1 și p_2 astfel ca

$$\frac{p_1}{q_1} \leqslant x_0 < \frac{p_1 + 1}{q_1} \quad \frac{p_2}{q_2} \leqslant x_0 < \frac{p_2 + 1}{q_2}.$$

Pentru a evalua diferența $\varphi\left(\frac{p_1}{q_1}\right) - \varphi\left(\frac{p_2}{q_2}\right)$, să calculăm întîi diferența argumentelor lor

$$2\pi\nu_1 \frac{p_1}{q_1} - 2\pi\nu_2 \frac{p_2}{q_2} = 2\pi\left[\nu_1\left(\frac{p_1}{q_1} - x_0\right) - \nu_2\left(\frac{p_2}{q_2} - x_0\right) + \frac{\nu_1 - \nu_2}{2\,|\nu_1 - \nu_2|}\right].$$

Valoarea absolută a primului termen din paranteza mare este

$$\left|\nu_1\left(\frac{p_1}{q_1} - x_0\right)\right| < \nu_1 \; \frac{1}{q_1} = \frac{\nu(q_1)}{q_1}.$$

Ținînd seamă de (5.8) și de faptul că $q_1 > N \geqslant q_0$, vedem că acest termen din paranteza mare și la fel următorul sînt mai mici în valoare absolută decît $\frac{1}{6}$, în timp ce termenul al treilea are valoarea absolută $\frac{1}{2}$. Astfel avem

$$\frac{\pi}{3} < \left|2\pi\nu_1 \frac{p_1}{q_1} - 2\pi\nu_2 \frac{p_2}{q_2}\right| < \frac{5\pi}{3};$$

deci

$$\left|\varphi\left(\frac{p_1}{q_1}\right) - \varphi\left(\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > 1,$$

ceea ce este în contradicție cu (5.9), căci $\left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right| \leqslant$

$$\leqslant \max\left(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}\right) < \frac{1}{N} < \eta \quad \text{și} \quad 0 \leqslant \frac{p_1}{q_1} < 1,\ 0 \leqslant \frac{p_2}{q_2} < 1.$$

Am demonstrat că pentru $q > N$, $\nu(q) = \text{const}$.

Aplicînd acest rezultat funcțiilor (5.7), găsim pentru fiecare φ_k un $N = N_k$, $k = 1, \ldots, s_0$ și $\nu_k(q) = \nu_k^*$, dacă $q > N_k$. Notăm $N_0 = \max(N_1, \ldots, N_{s_0})$ și $l_k = \frac{1}{h_0}(\mu_k + 2\pi\nu_k^* i)$, $k = 1, 2, \ldots, s_0$. Formula (5.5) aplicată pentru $q > N_0$ devine

$$f\left(\frac{p}{q}h_0\right) = \sum_{k=1}^{s_0} e^{h_0 l_k \frac{p}{q}} P_k\left(\frac{p}{q}\right), \quad p, q \text{ întregi}, \ q > N_0. \tag{5.10}$$

Orice număr real x fiind limita unui șir de forma $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}$, $q_i > N_0$, și f fiind o funcție continuă, avem

$$f(xh_0) = \sum_{k=1}^{s_0} e^{h_0 l_k x} P_k(x),$$

sau

$$f(x) = \sum_{k=1}^{s_0} e^{l_k x} Q_k(x), \tag{5.11}$$

unde polinomul $Q_k(x) = P_k\left(\frac{1}{h_0} x\right)$, $k = 1, 2, \ldots, s_0$. Rezultă că $f(x) \in \mathscr{L}_n$ și astfel am demonstrat teorema 2.

ХАРАКТЕРИЗОВАНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ВСЕХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАДАННОГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть $\mathscr{L}_n$ — класс вещественных функций $y = f(x)$, определённых на всей вещественной оси, удовлетворяющих дифферециальному уравнению вида (1.), где $A_1, \ldots, A_n$ суть некоторые вещественные постоянные. Если $f(x) \in \mathscr{L}_n$ то $f(x)$ удовлетворяет соотношение вида (1.2) и (1.3) с $a_0(h) \neq 0$ для $h \in (0, H)$

Автор доказывает:

Теорема 1. *Множество вещественных непрерывных функций* $f(x)$, *которые удовлетворяют уравнению (1.2), вместе с непрерывными функциями* φ_i *и* ψ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *для любых вещественных* x *и* y, *совпадает с классом* $\mathscr{L}_n$.

Теорема 2. *Множество вещественных непрерывных функций* $f(x)$, *которые для любых вещественных чисел* x *и* h, *удовлетворяют уравнению (1.3) вместе с непрерывными функциями* $a_i(h)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $(a_0(h) \neq 0$ для $x \in (0, H))$, совпадает с классом $\mathscr{L}_n$.

Таким образом, каждое из функциональных уравнений (1.2) и (1.3), в которых все функции считаются неизвестными, характеризует класс $\mathscr{L}_n$ из класса непрерывных функций.

Вопрос решения функционального уравнения (1.3) был поставлен Т. Поповичу.

Для дифференцируемых функций, уравнение (1.2) было решено Штекелем [10]. Решения, данные С. Штефансом [12] и Т. Леви.-Чивита [6] пользуются неверным утверждением, что „тождественное обращение к нулю определителя Вронского влечает за собой линейную зависимость рассматрваемых функций", а относительно схемы доказательства П. Штекеля в [11], можно возражать что линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, полученное им, может быть иллюзорным, со всеми коэффициентами равными нулю.

И. Феньё [1] рассматрвал уравнение (1.2) в рамках обобщенных функций, при предположении, что обобщеные функции, соответствующие функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ являются „лнейно-независимыми" в введенном автором смысле. Так как неизвестно если n непрерывных линейно-независимых функций в обычном смысле являются или не являются линейно-независмыми в этом смысле, результат И. Феньё не решает функционального уравнения (1.2) для непрерывных функций.

Функциональное уравнение (1.4) было сведено к функциональному уравнению типа (1.3), в работе [2] Н. Гиркояшу и Х. Рошкэу, так что, применяя теорему 2, можем прийти к выводу что уравнение

(1.4), в рамках непрерывных функций, имеет в качестве множества решений как раз класс $\mathcal{L}_n$.

Для доказательства теоремы 2, являющейся главной частью труда, применяется лема:

Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — комплексные различные числа, отличные от нуля, $P_k(x)$, $k = 1, \ldots, s$ — многочислены с комплексными коэффициентами степени $p_k - 1$ и $n = \sum_{k=1}^{s} p_k$; из соотношений (4.1) вытекает (4.2).

Дается другой метод для того случая, когда $a_i(h)$ являются дифференцируемыми функциями; доказывается, что в этом случае функция $f(x)$ является сколько угодно раз дифференцируемой.

LA CARACTÉRISATION DE L'ENSEMBLE DES INTÉGRALES DE TOUTES LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES HOMOGÈNES AUX COEFFICIENTS CONSTANTS, D'ORDRE DONNÉ

RÉSUMÉ

Soit $\mathcal{L}_n$ la classe des fonctions réelles $y = f(x)$, définies sur l'axe réel, qui vérifient une équation différentielle de la forme (1.1), où $A_1, \ldots, A_n$ sont des constantes réelles quelconques. Si $f(x) \in \mathcal{L}_n$, alors $f(x)$ vérifie une relation de la forme (1.2) et (1.3) avec $a_0(h) \neq 0$ pour $h \in (0, H)$.

L'auteur démontre :

THÉORÈME 1. *L'ensemble des fonctions réelles continues $f(x)$ qui vérifient l'équation* (1.2) *avec des fonctions continues φ_i et ψ_i, $i = 1, \ldots, n$ pour x et y nombres réels quelconques, coïncide avec la classe $\mathcal{L}_n$.*

THÉORÈME 2. *L'ensemble des fonctions réelles continues $f(x)$ qui, pour x et h nombres réels quelconques, vérifient l'équation* (1.3) *avec des fonctions continues $a_i(h)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, ($a_0(h) \neq 0$ pour $x \in (0, H)$), coïncide avec la classe de fonctions $\mathcal{L}_n$.*

Ainsi chacune des équations fonctionnelles (1.2) et (1.3), pour les fonctions continues, dans lesquelles toutes les fonctions qui interviennent sont considérées comme inconnues, caractérise la classe $\mathcal{L}_n$. Le problème de la résolution de l'équation fonctionnelle (1.3) a été proposé par T. Popoviciu.

Pour des fonctions dérivables, l'équation (1.2) a été résolue par Stäckel [10]. Les solutions données par C. Stéphanos [12] et T. Levi-Civita [6] utilisent l'affirmation inexacte que „l'annulation identique du wronskien entraîne la dépendance linéaire des fonctions considérées", et l'esquisse de démonstration donnée par P. Stäckel dans [11] peut susciter la remarque que l'équation différentielle linéaire et homogène aux coefficients constants, à laquelle il aboutit, peut être illusoire, avec tous les coefficients nuls.

I. Fenyő [1] a considéré l'équation (1.2) dans le cadre des fonctions généralisées, dans l'hypothèse que les fonctions généralisées qui correspondent à $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sont „linéairement dépendantes" dans un sens introduit par l'auteur. Puisqu'on ne sait pas si n fonctions continues, linéairement indépendantes dans le sens habituel, sont ou ne sont pas aussi linéairement indépendantes dans ce sens, le résultat donné par I. Fenyő ne résout pas l'équation fonctionnelle (1.2) pour les fonctions continues.

L'équation fonctionnelle (1.4) a été réduite à une équation fonctionnelle de la forme (1.3) par N. Ghircoiaşiu et H. Roşcău [2], telle que, en appliquant le théorème 2, on peut conclure que l'équation (1.4) a, dans le cadre des fonctions continues, comme ensemble de solutions précisément la classe $\mathcal{L}_n$.

Pour démontrer le théorème 2, qui constitue la partie principale du travail, on utilise le lemme : Soient $r_1, r_2, \ldots, r_s$ des nombres complexes distincts et différents de zéro, $P_k(x)$, $k = 1, \ldots, s$ des polynomes sur le corps des nombres complexes de degrés $p_k - 1$ et $n = \sum_{k=1}^{s} p_k$; des relations (4.1) résulte (4.2). On donne une autre méthode pour le cas où $a_i(h)$ sont des fonctions une fois dérivables ; on montre que, dans ce cas, la fonction $f(x)$ est indéfiniment dérivable.

BIBLIOGRAFIE

1. Fenyő I., *Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen.* Acta Math. Acad Sc. Hung., **7**, 383–396 (1956).
2. Ghircoiaşiu N., Roşcău H., *Integrarea unei ecuaţii funcţionale* (în acest volum).
3. Ionescu D. V., *Integrarea unei ecuaţii diferenţiale.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), VIII, 274–288 (1957).
4. — *Sur une èquation fonctionnelle.* Mathematica, **1** (**24**), 11–26 (1959).
5. Kac M., *Une remarque sur les équations fonctionnelles.* Comm. Math. Helvetici, **9**, 170–171 (1936).
6. Levi-Civita T., *Sulla funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo* $f(x + y) = \Sigma X_i(x) T_i(y)$. Rend. Accad. Lincei, **22/2**, 181–183 (1913).
7. Pólya G., Szegő G., *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II.* Die Grundlehren der Math. Wiss., XX, 1925, cap. VII, probl. 60, p. 113.
8. Popoviciu T., *Asupra unor ecuaţii funcţionale.* Studii şi cercetări ştiinţifice — Acad. R.P.R. Fil. Cluj, VI, Ser. I, nr. 3–4, 37–49 (1955).
9. Stamate I., *Contribuţiuni la integrarea unei ecuaţii funcţionale.* Lucrări ştiinţifice, Institutul politehnic Cluj, 1960, 47–51.
10. Stäckel P., *Sulla equazione fuzionale* $f(x + y) = \Sigma X_i(x) T_i(y)$. Rend. Accad. Lincei, **22/2**, 392–393 (1913).
11. — *Referatul articolului* [6]. Jahrbuch über die Fortschritte der Math., **44**, 502–503 (1913).
12. Stéphanos C., *Sur une categorie d'equations fonctionnelles.* Rend. Circ. Mat. Palermo, **18**, 360–362 (1904).

Primit la 19. XII. 1961.