# STUDIU ASUPRA UNOR ECUAŢII DIFERENŢIALE

DE

H. ROŞCĂU şi I. STAMATE

(Cluj)

**1.** Prof. T. Popoviciu, cu ocazia unui referat ţinut la Institutul de calcul din Cluj, a propus restudierea unor ecuaţii diferenţiale integrate de G. D a r b o u x [1, 2].

Ecuaţiile considerate de G. Darboux sînt de forma

$$\Delta_n[f] = \begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & y^{(n+1)} & \dots & y^{(2n)} \end{vmatrix} = m \tag{1}$$

unde

$$m = 0, \quad m = 1 \text{ şi } m = e^{ax+b}.$$

A. S e l l e r i o [4] a studiat de asemenea ecuaţia diferenţială.

D. V. I o n e s c u [3] dă o metodă directă de integrare a ecuaţiilor diferenţiale

$$\Delta_n[f] = 0, \quad \Delta_n[f] = 1 \quad \text{şi} \quad \Delta_n[f] = Ae^{ax}.$$

Noi, pornind de la aceeaşi indicaţie, ne-am propus să studiem ecuaţii diferenţiale ca acelea ale lui Darboux, sau extinderi ale acestora. Metoda utilizată de noi coincide cu aceea a prof. D. V. Ionescu, astfel că nu insistăm asupra părţilor comune cu această lucrare.

Voim să semnalăm că studiind ecuaţia funcţională

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \dots & f(x+nh) \\ f(x+h) & f(x+2h) & \dots & f(x+\overline{n+1}h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x+nh) & f(x+\overline{n+1}h) & \dots & f(x+2nh) \end{vmatrix} = 0$$

în ipoteza că funcţia $f(x)$ este derivabilă sau că este o funcţie mărginită sau măsurabilă şi că $h^{-k}\Delta_k^h f(x)$ tinde uniform către o funcţie $g(x)$ cînd $h \to 0$, se ajunge la ecuaţia diferenţială $\Delta_n[f] = 0$.

**2.** Pentru ecuaţia diferenţială $\Delta\,[f] = 0$, s-au obţinut următoarele rezultate :

Orice integrală a ecuaţiei diferenţiale $\Delta_n[f] = 0$, pentru care $\Delta_{n-1}[f] \neq 0$ este integrala ecuaţiei diferenţiale

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_n y = 0 \tag{2}$$

cu coeficienţii $A_1, A_2, \ldots, A_n$ determinaţi prin un sistem de ecuaţii liniare date de condiţiile lui Cauchy.

Invers, orice integrală a ecuaţiei cu coeficienţii constanţi (2) este integrală a ecuaţiei diferenţiale $\Delta_n[f] = 0$ în care $\Delta_{n-1}[f] \neq 0$.

Fie acum ecuaţia diferenţială

$$\begin{vmatrix} y & y' & \ldots & y^{(n)} \\ y^{(k_1)} & y^{(k_1+1)} & \ldots & y^{(k_1+n)} \\ y^{(k_2)} & y^{(k_2+1)} & \ldots & y^{(k_2+n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(k_n)} & y^{(k_n+1)} & \ldots & y^{(k_n+n)} \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

unde $1 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n$, iar $k_n > n$.

Pentru integrarea acestei ecuaţii putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că determinantul

$$\begin{vmatrix} y & y' & \ldots & y^{(n-1)} \\ y^{(k_1)} & y^{(k_1+1)} & \ldots & y^{(k_1+n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(k_{n-1})} & y^{(k_{n-1}+1)} & \ldots & y^{(k_{n-1}+n-1)} \end{vmatrix} \tag{4}$$

nu este identic nul.

Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca determinantul din (3) să fie nul, oricare ar fi $x$, sînt

$$\begin{aligned} &y^{(k_n)} + a_1 y^{(k_{n-1})} + \ldots + a_n y = 0 \\ &y^{(k_n+1)} + a_1 y^{(k_{n-1}+1)} + \ldots + a_n y' = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y^{(k_n+n)} + a_1 y^{(k_{n-1}+n)} + \ldots + a_n y^{(n)} = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

unde coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vom arăta că nu depind de $x$.



Prin derivarea unei relaţii din (5) şi ţinînd seama de relaţia următoare celei derivate, rezultă sistemul

$$\begin{aligned} &a_1' y^{(k_{n-1})} + a_2' y^{(k_{n-2})} + \ldots + a_n' y = 0 \\ &a_1' y^{(k_{n-1}+1)} + a_2' y^{(k_{n-2}+1)} + \ldots + a_n' y' = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_1' y^{(k_{n-1}+n-1)} + a_2' y^{(k_{n-2}+n-1)} + \ldots + a_n' y^{(n-1)} = 0, \end{aligned}$$

Cum integrarea se face în ipoteza că determinantul (4) este diferit de zero, înseamnă că

$$a_1' = a_2' = \ldots = a_n' = 0,$$

deci

$$a_1 = \text{const.},\ a_2 = \text{const.}, \ldots, a_n = \text{const.}$$

Astfel prima relaţie din (5) este o ecuaţie cu coeficienţii constante arbitrare.

Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_{k_n} e^{r_{k_n} x}, \tag{6}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_{k_n}$ sînt constante arbitrare, iar $r_1, r_2, \ldots, r_{k_n}$ sînt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$r^{k_n} + a_1 r^{k_{n-1}} + \ldots + a_{n-1} r^{k_1} + a_n = 0. \tag{7}$$

Desigur că în cazul rădăcinilor multiple ale acestei ecuaţii, soluţia (6) ia forma bine cunoscută din teoria ecuaţiilor diferenţiale.

Relaţia (6) dă soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (3) dacă $C_1, \ldots, C_{k_n}$ şi $a_1, \ldots, a_n$ din (7) sînt constante arbitrare, adică $r_1, r_2, \ldots, r_{k_n}$ sînt funcţii de constantele arbitrare $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Astfel (6) conţine $k_n + n$ constante arbitrare cît este ordinul ecuaţiei (3). Cum ecuaţia (7) este necompletă, rădăcinile ei, $r_i$ cu $i = 1, 2, \ldots, k_n$ sînt legate prin $k_n - n$ relaţii, primite utilizînd relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei (7).

Soluţia generală a ecuaţiei (3) s-a obţinut în ipoteza că determinantul (4) nu este identic nul. În cazul cînd este identic nul, problema se reduce la integrarea unei ecuaţii de forma (3), de ordinul $k_{n-1}$, a cărei soluţie este

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_k e^{r_{k_{n-1}} x}$$

dar aceasta este o soluţie particulară a ecuaţiei (3).

**3.** Integrarea ecuaţiei considerate de G. Darboux

$$\begin{vmatrix} y & y' & \ldots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \ldots & y^{(n+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n)} & y^{(n+1)} & \ldots & y^{(2n)} \end{vmatrix} = 1$$

sau

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & y^{(n+1)} & \dots & y^{(2n)} \end{vmatrix} = k \tag{8}$$

unde $k$ este o constantă, revine la integrarea unei ecuaţii de forma ecuaţiei (3).

În adevăr, derivînd ecuaţia (8) se găseşte ecuaţia

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)} & y^{(n)} & \dots & y^{(2n-1)} \\ y^{(n+1)} & y^{(n+2)} & \dots & y^{(2n+1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

care fiind de tipul ecuaţiei (3), are soluţia

$$y = C_1 e^{r_1 x} + \dots + C_{n+1} e^{r_{n+1} x} \tag{10}$$

unde $C_1, \dots, C_{n+1}$ sînt constante arbitrare, iar $r_1, \dots, r_{n+1}$ constante arbitrare, ce trebuie să verifice relaţia

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{n+1} = 0.$$

Deci soluţia ecuaţiei (9) s-ar putea scrie

$$y = C_1 e^{r_1 x} + \dots + C_n e^{r_n x} + C_{n+1} e^{-(r_1 + r_2 + \dots + r_n) x}$$

unde $C_i$ $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ şi $r_1, \dots, r_n$ sînt constante arbitrare. Punînd apoi condiţia ca funcţia din (10) să verifice ecuaţia (8), se va găsi o relaţie între aceste $2n+1$ constante arbitrare, care împreună cu (10) dă integrala generală a ecuaţiei (8).

4. Să considerăm acum ecuaţia diferenţială

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & y^{(n+1)} & \dots & y^{(2n)} \end{vmatrix} = e^{(n+1)(ax+b)}$$

Ea se reduce la cazul precedent prin substituţia

$$y = z e^{ax+b}$$



obţinîndu-se

$$\begin{vmatrix} z e^{ax+b} & [z+a]^{(1)} e^{ax+b} & \dots & [z+a]^{(n)} e^{ax+b} \\ [z+a]^{(1)} e^{ax+b} & [z+a]^{(2)} e^{ax+b} & \dots & [z+a]^{(n+1)} e^{ax+b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [z+a]^{(n)} e^{ax+b} & [z+a]^{(n+1)} e^{ax+b} & \dots & [z+a]^{(2n)} e^{ax+b} \end{vmatrix} = e^{(n+1)(ax+b)}$$

unde am notat prin $[z+a]^{(n)}$ pe $z^{(n)} + C_n^1 z^{(n-1)} a + \dots + C_n^p z^{(n-p)} a^p + \dots + a^n z$. Dînd factor comun pe $e^{ax+b}$, din fiecare coloană şi apoi simplificînd cu $e^{(n+1)(ax+b)}$ obţinem astfel ecuaţia

$$\begin{vmatrix} z & [z+a]^{(1)} & \dots & [z+a]^{(n)} \\ [z+a]^{(1)} & [z+a]^{(2)} & \dots & [z+a]^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [z+a]^{(n)} & [z+a]^{(n+1)} & \dots & [z+a]^{(2n)} \end{vmatrix} = 1$$

care se reduce la una în $z$ de forma (8), făcînd asupra determinantului precedent următoarele transformări: la elementele liniei a $n+1$ — a se adună acelea ale liniilor $1, 2, \dots, n$ înmulţite respectiv cu $(-1)^n a^n C_n^0$, $(-1)^{n-1} a^{n-1} C_n^1, \dots, -a C_n^{n-1}$, la elementele liniei a $n$-a se adună acelea ale liniilor $1, 2, \dots, n-1$ înmulţite respectiv cu $(-1)^{n-1} a^{n-1} C_{n-1}^0$, $(-1)^{n-2} a^{n-2} C_{n-1}^1, \dots, -a C_{n-1}^{n-2}$ ş.a.m.d.; la elementele liniei a 2-a se adună elementele liniei 1-a înmulţite cu $-a C_1^0$. Se va proceda apoi absolut la fel şi pe coloane. În felul acesta se găseşte ecuaţia

$$\begin{vmatrix} z & z' & \dots & z^{(n)} \\ z' & z'' & \dots & z^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{(n)} & z^{(n+1)} & \dots & z^{(2n)} \end{vmatrix} = 1$$

a cărei integrare se cunoaşte.

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исходя от дифференциальных уравнений (1), которые были интегрированы Г. Дарбу [1, 2] и недавно Д. В. Ионеску [3], исследуются дифференциальные уравнения типов (3), (8) и (11).

# ÉTUDE SUR QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RÉSUMÉ

En partant des équations différentielles (1) qui ont été intégrées par G. Darboux [1, 2] et, récemment, par D. V. Ionescu [3], on étudie des équations différentielles des types (3), (8) et (11).

BIBLIOGRAFIE

1. Darboux G., *Sur une équation différentielle du quatrième ordre.* C. R. Acad. Sci. Paris, **141**, 415–7 (1905).
2. — *Sur une équation différentielle du quatrième ordre*; C. R. Acad. Sci. Paris, **141**, 483–4 (1905).
3. Ionescu D. V., *Integrarea unei ecuaţii diferenţiale*; Studii şi cercet. de matem, (Cluj), VIII, 275–289 (1957).
4. Sellerio A., *Su una particolare equazione differenziale*, Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo, **40**, 27–8 (1915).
5. Stamate I., *Contribuţiuni la integrarea unei ecuaţii funcţionale*; Lucrări ştiinţifice, Institutul politehnic din Cluj, 1960, 47–50.

Primit la 1. VIII. 1959.