

STUDIU ASUPRA UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE

DE

H. ROȘCĂU și I. STAMATE
(Cluj)

1. Prof. T. Popoviciu, cu ocazia unui referat ținut la Institutul de calcul din Cluj, a propus restudierea unor ecuații diferențiale integrate de G. Darboux [1, 2].

Ecuatiile considerate de G. Darboux sunt de forma

$$\Delta_n[f] = \begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & y^{(n+1)} & \dots & y^{(2n)} \end{vmatrix} = m \quad (1)$$

unde

$$m = 0, \quad m = 1 \quad \text{și} \quad m = e^{ax+b}.$$

A. Sellerio [4] a studiat de asemenea ecuația diferențială.

D. V. Ionescu [3] dă o metodă directă de integrare a ecuațiilor diferențiale

$$\Delta_n[f] = 0, \quad \Delta_n[f] = 1 \quad \text{și} \quad \Delta_n[f] = Ae^{ax}.$$

Noi, pornind de la aceeași indicație, ne-am propus să studiem ecuații diferențiale ca acelea ale lui Darboux, sau extinderi ale acestora. Metoda utilizată de noi coincide cu aceea a prof. D. V. Ionescu, astfel că nu insistăm asupra părților comune cu această lucrare.

Vom să semnalăm că studiind ecuația funcțională

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \dots & f(x+nh) \\ f(x+h) & f(x+2h) & \dots & f(x+\overline{n+1}h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x+nh) & f(x+\overline{n+1}h) & \dots & f(x+2nh) \end{vmatrix} = 0$$

în ipoteza că funcția $f(x)$ este derivabilă sau că este o funcție mărginită sau măsurabilă și că $h^{-k} \Delta_h^k f(x)$ tinde uniform către o funcție $g(x)$ cînd $h \rightarrow 0$, se ajunge la ecuația diferențială $\Delta_n[f] = 0$.

2. Pentru ecuația diferențială $\Delta[f] = 0$, s-au obținut următoarele rezultate:

Orice integrală a ecuației diferențiale $\Delta_n[f] = 0$, pentru care $\Delta_{n-1}[f] \neq 0$ este integrală ecuației diferențiale

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_n y = 0 \quad (2)$$

cu coeficienții A_1, A_2, \dots, A_n determinați prin un sistem de ecuații liniare date de condițiile lui Cauchy.

Invers, orice integrală a ecuației cu coeficienții constanți (2) este integrală a ecuației diferențiale $\Delta_n[f] = 0$ în care $\Delta_{n-1}[f] \neq 0$.

Fie acum ecuația diferențială

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y^{(k_1)} & y^{(k_1+1)} & \dots & y^{(k_1+n)} \\ y^{(k_2)} & y^{(k_2+1)} & \dots & y^{(k_2+n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(k_n)} & y^{(k_n+1)} & \dots & y^{(k_n+n)} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

unde $1 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$, iar $k_n > n$.

Pentru integrarea acestei ecuații putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că determinantul

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n-1)} \\ y^{(k_1)} & y^{(k_1+1)} & \dots & y^{(k_1+n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(k_n-1)} & y^{(k_n-1+1)} & \dots & y^{(k_n-1+n-1)} \end{vmatrix} \quad (4)$$

nu este identic nul.

Condițiile necesare și suficiente pentru ca determinantul din (3) să fie nul, oricare ar fi x , sunt

$$\begin{aligned} y^{(k_n)} + a_1 y^{(k_n-1)} + \dots + a_n y &= 0 \\ y^{(k_n+1)} + a_1 y^{(k_n-1+1)} + \dots + a_n y' &= 0 \\ \dots & \dots \\ y^{(k_n+n)} + a_1 y^{(k_n-1+n)} + \dots + a_n y^{(n)} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

unde coeficienții a_1, a_2, \dots, a_n vom arăta că nu depind de x .

Prin derivarea unei relații din (5) și ținînd seama de relația următoare celei derivate, rezultă sistemul

$$\begin{aligned} a'_1 y^{(k_n-1)} + a'_2 y^{(k_n-2)} + \dots + a'_n y &= 0 \\ a'_1 y^{(k_n-1+1)} + a'_2 y^{(k_n-2+1)} + \dots + a'_n y' &= 0 \\ \dots & \dots \\ a'_1 y^{(k_n-1+n-1)} + a'_2 y^{(k_n-2+n-1)} + \dots + a'_n y^{(n-1)} &= 0, \end{aligned}$$

Cum integrarea se face în ipoteza că determinantul (4) este diferit de zero, înseamnă că

$$a'_1 = a'_2 = \dots = a'_n = 0,$$

deci

$$a_1 = \text{const.}, a_2 = \text{const.}, \dots, a_n = \text{const.}$$

Astfel prima relație din (5) este o ecuație cu coeficienții constante arbitrară.

Soluția generală a acestei ecuații este

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_{k_n} e^{r_{k_n} x}, \quad (6)$$

unde C_1, C_2, \dots, C_{k_n} sunt constante arbitrară, iar r_1, r_2, \dots, r_{k_n} sunt rădăcinile ecuației caracteristice

$$r^{k_n} + a_1 r^{k_n-1} + \dots + a_{n-1} r^{k_1} + a_n = 0. \quad (7)$$

Desigur că în cazul rădăcinilor multiple ale acestei ecuații, soluția (6) ia forma bine cunoscută din teoria ecuațiilor diferențiale.

Relația (6) dă soluția generală a ecuației diferențiale (3) dacă C_1, \dots, C_{k_n} și a_1, \dots, a_n din (7) sunt constante arbitrară, adică r_1, r_2, \dots, r_{k_n} sunt funcții de constante arbitrară a_1, a_2, \dots, a_n . Astfel (6) conține $k_n + n$ constante arbitrară cît este ordinul ecuației (3). Cum ecuația (7) este ne-completă, rădăcinile ei, r_i cu $i = 1, 2, \dots, k_n$ sunt legate prin $k_n - n$ relații, primite utilizînd relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației (7).

Soluția generală a ecuației (3) s-a obținut în ipoteza că determinantul (4) nu este identic nul. În cazul cînd este identic nul, problema se reduce la integrarea unei ecuații de forma (3), de ordinul k_{n-1} , a cărei soluție este

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_{k_n} e^{r_{k_n-1} x}$$

dar aceasta este o soluție particulară a ecuației (3).

3. Integrarea ecuației considerate de G. Darboux

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & y^{(n+1)} & \dots & y^{(2n)} \end{vmatrix} = 1$$

sau

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & y^{(n+1)} & \dots & y^{(2n)} \end{vmatrix} = k \quad (8)$$

unde k este o constantă, revine la integrarea unei ecuații de forma ecuației (3).

În adevăr, derivând ecuația (8) se găsește ecuația

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)} & y^{(n)} & \dots & y^{(2n-1)} \\ y^{(n+1)} & y^{(n+2)} & \dots & y^{(2n+1)} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

care fiind de tipul ecuației (3), are soluția

$$y = C_1 e^{r_1 x} + \dots + C_{n+1} e^{r_{n+1} x} \quad (10)$$

unde C_1, \dots, C_{n+1} sunt constante arbitrară, iar r_1, \dots, r_{n+1} constante arbitrară, ce trebuie să verifice relația

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{n+1} = 0.$$

Deci soluția ecuației (9) s-ar putea scrie

$$y = C_1 e^{r_1 x} + \dots + C_n e^{r_n x} + C_{n+1} e^{-(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x}$$

unde C_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) și r_1, \dots, r_n sunt constante arbitrară. Prin apoi condiția ca funcția din (10) să verifice ecuația (8), se va găsi o relație între aceste $2n+1$ constante arbitrară, care împreună cu (10) dă integrala generală a ecuației (8).

4. Să considerăm acum ecuația diferențială

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y' & y'' & \dots & y^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & y^{(n+1)} & \dots & y^{(2n)} \end{vmatrix} = e^{(n+1)(ax+b)}$$

Ea se reduce la cazul precedent prin substituția

$$y = ze^{ax+b}$$

obținându-se

$$\begin{vmatrix} ze^{ax+b} & [z+a]^{(1)} e^{ax+b} & \dots & [z+a]^{(n)} e^{ax+b} \\ [z+a]^{(1)} e^{ax+b} & [z+a]^{(2)} e^{ax+b} & \dots & [z+a]^{(n+1)} e^{ax+b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [z+a]^{(n)} e^{ax+b} & [z+a]^{(n+1)} e^{ax+b} & \dots & [z+a]^{(2n)} e^{ax+b} \end{vmatrix} = e^{(n+1)(ax+b)}$$

unde am notat prin $[z+a]^{(n)}$ pe $z^{(n)} + C_1 z^{(n-1)} a + \dots + C_n z^{(n-p)} a^p + \dots + a^n z$. Dind factor comun pe e^{ax+b} , din fiecare coloană și apoi simplificând cu $e^{(n+1)(ax+b)}$ obținem astfel ecuația

$$\begin{vmatrix} z & [z+a]^{(1)} & \dots & [z+a]^{(n)} \\ [z+a]^{(1)} & [z+a]^{(2)} & \dots & [z+a]^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [z+a]^{(n)} & [z+a]^{(n+1)} & \dots & [z+a]^{(2n)} \end{vmatrix} = 1$$

care se reduce la una în z de forma (8), făcând asupra determinantului precedent următoarele transformări: la elementele liniei a $n+1 - a$ se adună acelea ale liniilor 1, 2, ..., n înmulțite respectiv cu $(-1)^n a^n C_n^0$, $(-1)^{n-1} a^{n-1} C_n^1, \dots, -a C_n^{n-1}$, la elementele liniei a n -a se adună acelea ale liniilor 1, 2, ..., $n-1$ înmulțite respectiv cu $(-1)^{n-1} a^{n-1} C_{n-1}^0$, $(-1)^{n-2} a^{n-2} C_{n-1}^1, \dots, -a C_{n-1}^{n-2}$ și.m.d.; la elementele liniei a 2-a se adună elementele liniei 1-a înmulțite cu $-a C_1^0$. Se va proceda apoi absolut la fel și pe coloane. În felul acesta se găsește ecuația

$$\begin{vmatrix} z & z' & \dots & z^{(n)} \\ z' & z'' & \dots & z^{(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{(n)} & z^{(n+1)} & \dots & z^{(2n)} \end{vmatrix} = 1$$

a cărei integrare se cunoaște.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исходя от дифференциальных уравнений (1), которые были интегрированы Г. Дарбу [1, 2] и недавно Д. В. Ионеску [3], исследуются дифференциальные уравнения типов (3), (8) и (11).

ÉTUDE SUR QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RÉSUMÉ

En partant des équations différentielles (1) qui ont été intégrées par G. Darboux [1, 2] et, récemment, par D. V. Ionescu [3], on étudie des équations différentielles des types (3), (8) et (11).

BIBLIOGRAFIE

1. Darboux G., *Sur une équation différentielle du quatrième ordre*. C. R. Acad. Sci. Paris, **141**, 415–7 (1905).
2. — *Sur une équation différentielle du quatrième ordre*; C. R. Acad. Sci. Paris, **141**, 483–4 (1905).
3. Ionescu D. V., *Integrarea unei ecuații diferențiale*; Studii și cercet. de matem., (Cluj), VIII, 275–289 (1957).
4. Sellerio A., *Su una particolare equazione differenziale*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **40**, 27–8 (1915).
5. Stamate I., *Contribuțuni la integrarea unei ecuații funcționale*; Lucrări științifice, Institutul politehnic din Cluj, 1960, 47–50.

Primit la 1. VIII. 1959.

SOMMAIRE DE TITRE CONCERNANT CERTAINES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Din acestă prezentată lucrare sunt date o metodă și rezultate generale privind rezolvarea unei ecuații diferențiale de ordinul patru care au fost obținute prin integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie generală. Aceste rezultate se aplică și ecuațiilor diferențiale de ordinul patru cu coecizie specială. De asemenea, se prezintă rezultate privind rezolvarea unei ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie generală, rezultatele fiind obținute prin integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie specială. Rezultatele obținute în această lucrare pot fi extinse și pentru ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie generală.

În lucrarea se studiază unele ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie generală și rezultatele obținute sunt următoarele:

$$(1) \quad u_{xx} = f(x, y, u, u_x, u_y).$$

Ecuația (1) este rezolvată prin integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie generală. Rezultatul obținut este următorul: rezolvarea ecuației (1) se poate face prin integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie specială. Rezultatul obținut este următorul: rezolvarea ecuației (1) se poate face prin integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie generală.

Ecuația (1) este rezolvată prin integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie generală. Rezultatul obținut este următorul: rezolvarea ecuației (1) se poate face prin integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie specială. Rezultatul obținut este următorul: rezolvarea ecuației (1) se poate face prin integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul patru cu coecizie generală.

$$(2) \quad F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{16}, f_{17}, f_{18}, f_{19}, f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25}, f_{26}, f_{27}, f_{28}, f_{29}, f_{30}, f_{31}, f_{32}, f_{33}, f_{34}, f_{35}, f_{36}, f_{37}, f_{38}, f_{39}, f_{40}, f_{41}, f_{42}, f_{43}, f_{44}, f_{45}, f_{46}, f_{47}, f_{48}, f_{49}, f_{50}, f_{51}, f_{52}, f_{53}, f_{54}, f_{55}, f_{56}, f_{57}, f_{58}, f_{59}, f_{60}, f_{61}, f_{62}, f_{63}, f_{64}, f_{65}, f_{66}, f_{67}, f_{68}, f_{69}, f_{70}, f_{71}, f_{72}, f_{73}, f_{74}, f_{75}, f_{76}, f_{77}, f_{78}, f_{79}, f_{80}, f_{81}, f_{82}, f_{83}, f_{84}, f_{85}, f_{86}, f_{87}, f_{88}, f_{89}, f_{90}, f_{91}, f_{92}, f_{93}, f_{94}, f_{95}, f_{96}, f_{97}, f_{98}, f_{99}, f_{100}, f_{101}, f_{102}, f_{103}, f_{104}, f_{105}, f_{106}, f_{107}, f_{108}, f_{109}, f_{110}, f_{111}, f_{112}, f_{113}, f_{114}, f_{115}, f_{116}, f_{117}, f_{118}, f_{119}, f_{120}, f_{121}, f_{122}, f_{123}, f_{124}, f_{125}, f_{126}, f_{127}, f_{128}, f_{129}, f_{130}, f_{131}, f_{132}, f_{133}, f_{134}, f_{135}, f_{136}, f_{137}, f_{138}, f_{139}, f_{140}, f_{141}, f_{142}, f_{143}, f_{144}, f_{145}, f_{146}, f_{147}, f_{148}, f_{149}, f_{150}, f_{151}, f_{152}, f_{153}, f_{154}, f_{155}, f_{156}, f_{157}, f_{158}, f_{159}, f_{160}, f_{161}, f_{162}, f_{163}, f_{164}, f_{165}, f_{166}, f_{167}, f_{168}, f_{169}, f_{170}, f_{171}, f_{172}, f_{173}, f_{174}, f_{175}, f_{176}, f_{177}, f_{178}, f_{179}, f_{180}, f_{181}, f_{182}, f_{183}, f_{184}, f_{185}, f_{186}, f_{187}, f_{188}, f_{189}, f_{190}, f_{191}, f_{192}, f_{193}, f_{194}, f_{195}, f_{196}, f_{197}, f_{198}, f_{199}, f_{200}, f_{201}, f_{202}, f_{203}, f_{204}, f_{205}, f_{206}, f_{207}, f_{208}, f_{209}, f_{210}, f_{211}, f_{212}, f_{213}, f_{214}, f_{215}, f_{216}, f_{217}, f_{218}, f_{219}, f_{220}, f_{221}, f_{222}, f_{223}, f_{224}, f_{225}, f_{226}, f_{227}, f_{228}, f_{229}, f_{230}, f_{231}, f_{232}, f_{233}, f_{234}, f_{235}, f_{236}, f_{237}, f_{238}, f_{239}, f_{240}, f_{241}, f_{242}, f_{243}, f_{244}, f_{245}, f_{246}, f_{247}, f_{248}, f_{249}, f_{250}, f_{251}, f_{252}, f_{253}, f_{254}, f_{255}, f_{256}, f_{257}, f_{258}, f_{259}, f_{260}, f_{261}, f_{262}, f_{263}, f_{264}, f_{265}, f_{266}, f_{267}, f_{268}, f_{269}, f_{270}, f_{271}, f_{272}, f_{273}, f_{274}, f_{275}, f_{276}, f_{277}, f_{278}, f_{279}, f_{280}, f_{281}, f_{282}, f_{283}, f_{284}, f_{285}, f_{286}, f_{287}, f_{288}, f_{289}, f_{290}, f_{291}, f_{292}, f_{293}, f_{294}, f_{295}, f_{296}, f_{297}, f_{298}, f_{299}, f_{300}, f_{301}, f_{302}, f_{303}, f_{304}, f_{305}, f_{306}, f_{307}, f_{308}, f_{309}, f_{310}, f_{311}, f_{312}, f_{313}, f_{314}, f_{315}, f_{316}, f_{317}, f_{318}, f_{319}, f_{320}, f_{321}, f_{322}, f_{323}, f_{324}, f_{325}, f_{326}, f_{327}, f_{328}, f_{329}, f_{330}, f_{331}, f_{332}, f_{333}, f_{334}, f_{335}, f_{336}, f_{337}, f_{338}, f_{339}, f_{340}, f_{341}, f_{342}, f_{343}, f_{344}, f_{345}, f_{346}, f_{347}, f_{348}, f_{349}, f_{350}, f_{351}, f_{352}, f_{353}, f_{354}, f_{355}, f_{356}, f_{357}, f_{358}, f_{359}, f_{360}, f_{361}, f_{362}, f_{363}, f_{364}, f_{365}, f_{366}, f_{367}, f_{368}, f_{369}, f_{370}, f_{371}, f_{372}, f_{373}, f_{374}, f_{375}, f_{376}, f_{377}, f_{378}, f_{379}, f_{380}, f_{381}, f_{382}, f_{383}, f_{384}, f_{385}, f_{386}, f_{387}, f_{388}, f_{389}, f_{390}, f_{391}, f_{392}, f_{393}, f_{394}, f_{395}, f_{396}, f_{397}, f_{398}, f_{399}, f_{400}, f_{401}, f_{402}, f_{403}, f_{404}, f_{405}, f_{406}, f_{407}, f_{408}, f_{409}, f_{410}, f_{411}, f_{412}, f_{413}, f_{414}, f_{415}, f_{416}, f_{417}, f_{418}, f_{419}, f_{420}, f_{421}, f_{422}, f_{423}, f_{424}, f_{425}, f_{426}, f_{427}, f_{428}, f_{429}, f_{430}, f_{431}, f_{432}, f_{433}, f_{434}, f_{435}, f_{436}, f_{437}, f_{438}, f_{439}, f_{440}, f_{441}, f_{442}, f_{443}, f_{444}, f_{445}, f_{446}, f_{447}, f_{448}, f_{449}, f_{450}, f_{451}, f_{452}, f_{453}, f_{454}, f_{455}, f_{456}, f_{457}, f_{458}, f_{459}, f_{460}, f_{461}, f_{462}, f_{463}, f_{464}, f_{465}, f_{466}, f_{467}, f_{468}, f_{469}, f_{470}, f_{471}, f_{472}, f_{473}, f_{474}, f_{475}, f_{476}, f_{477}, f_{478}, f_{479}, f_{480}, f_{481}, f_{482}, f_{483}, f_{484}, f_{485}, f_{486}, f_{487}, f_{488}, f_{489}, f_{490}, f_{491}, f_{492}, f_{493}, f_{494}, f_{495}, f_{496}, f_{497}, f_{498}, f_{499}, f_{500}, f_{501}, f_{502}, f_{503}, f_{504}, f_{505}, f_{506}, f_{507}, f_{508}, f_{509}, f_{510}, f_{511}, f_{512}, f_{513}, f_{514}, f_{515}, f_{516}, f_{517}, f_{518}, f_{519}, f_{520}, f_{521}, f_{522}, f_{523}, f_{524}, f_{525}, f_{526}, f_{527}, f_{528}, f_{529}, f_{530}, f_{531}, f_{532}, f_{533}, f_{534}, f_{535}, f_{536}, f_{537}, f_{538}, f_{539}, f_{540}, f_{541}, f_{542}, f_{543}, f_{544}, f_{545}, f_{546}, f_{547}, f_{548}, f_{549}, f_{550}, f_{551}, f_{552}, f_{553}, f_{554}, f_{555}, f_{556}, f_{557}, f_{558}, f_{559}, f_{560}, f_{561}, f_{562}, f_{563}, f_{564}, f_{565}, f_{566}, f_{567}, f_{568}, f_{569}, f_{570}, f_{571}, f_{572}, f_{573}, f_{574}, f_{575}, f_{576}, f_{577}, f_{578}, f_{579}, f_{580}, f_{581}, f_{582}, f_{583}, f_{584}, f_{585}, f_{586}, f_{587}, f_{588}, f_{589}, f_{590}, f_{591}, f_{592}, f_{593}, f_{594}, f_{595}, f_{596}, f_{597}, f_{598}, f_{599}, f_{600}, f_{601}, f_{602}, f_{603}, f_{604}, f_{605}, f_{606}, f_{607}, f_{608}, f_{609}, f_{610}, f_{611}, f_{612}, f_{613}, f_{614}, f_{615}, f_{616}, f_{617}, f_{618}, f_{619}, f_{620}, f_{621}, f_{622}, f_{623}, f_{624}, f_{625}, f_{626}, f_{627}, f_{628}, f_{629}, f_{630}, f_{631}, f_{632}, f_{633}, f_{634}, f_{635}, f_{636}, f_{637}, f_{638}, f_{639}, f_{640}, f_{641}, f_{642}, f_{643}, f_{644}, f_{645}, f_{646}, f_{647}, f_{648}, f_{649}, f_{650}, f_{651}, f_{652}, f_{653}, f_{654}, f_{655}, f_{656}, f_{657}, f_{658}, f_{659}, f_{660}, f_{661}, f_{662}, f_{663}, f_{664}, f_{665}, f_{666}, f_{667}, f_{668}, f_{669}, f_{670}, f_{671}, f_{672}, f_{673}, f_{674}, f_{675}, f_{676}, f_{677}, f_{678}, f_{679}, f_{680}, f_{681}, f_{682}, f_{683}, f_{684}, f_{685}, f_{686}, f_{687}, f_{688}, f_{689}, f_{690}, f_{691}, f_{692}, f_{693}, f_{694}, f_{695}, f_{696}, f_{697}, f_{698}, f_{699}, f_{700}, f_{701}, f_{702}, f_{703}, f_{704}, f_{705}, f_{706}, f_{707}, f_{708}, f_{709}, f_{710}, f_{711}, f_{712}, f_{713}, f_{714}, f_{715}, f_{716}, f_{717}, f_{718}, f_{719}, f_{720}, f_{721}, f_{722}, f_{723}, f_{724}, f_{725}, f_{726}, f_{727}, f_{728}, f_{729}, f_{730}, f_{731}, f_{732}, f_{733}, f_{734}, f_{735}, f_{736}, f_{737}, f_{738}, f_{739}, f_{740}, f_{741}, f_{742}, f_{743}, f_{744}, f_{745}, f_{746}, f_{747}, f_{748}, f_{749}, f_{750}, f_{751}, f_{752}, f_{753}, f_{754}, f_{755}, f_{756}, f_{757}, f_{758}, f_{759}, f_{760}, f_{761}, f_{762}, f_{763}, f_{764}, f_{765}, f_{766}, f_{767}, f_{768}, f_{769}, f_{770}, f_{771}, f_{772}, f_{773}, f_{774}, f_{775}, f_{776}, f_{777}, f_{778}, f_{779}, f_{780}, f_{781}, f_{782}, f_{783}, f_{784}, f_{785}, f_{786}, f_{787}, f_{788}, f_{789}, f_{790}, f_{791}, f_{792}, f_{793}, f_{794}, f_{795}, f_{796}, f_{797}, f_{798}, f_{799}, f_{800}, f_{801}, f_{802}, f_{803}, f_{804}, f_{805}, f_{806}, f_{807}, f_{808}, f_{809}, f_{8010}, f_{8011}, f_{8012}, f_{8013}, f_{8014}, f_{8015}, f_{8016}, f_{8017}, f_{8018}, f_{8019}, f_{8020}, f_{8021}, f_{8022}, f_{8023}, f_{8024}, f_{8025}, f_{8026}, f_{8027}, f_{8028}, f_{8029}, f_{8030}, f_{8031}, f_{8032}, f_{8033}, f_{8034}, f_{8035}, f_{8036}, f_{8037}, f_{8038}, f_{8039}, f_{8040}, f_{8041}, f_{8042}, f_{8043}, f_{8044}, f_{8045}, f_{8046}, f_{8047}, f_{8048}, f_{8049}, f_{8050}, f_{8051}, f_{8052}, f_{8053}, f_{8054}, f_{8055}, f_{8056}, f_{8057}, f_{8058}, f_{8059}, f_{8060}, f_{8061}, f_{8062}, f_{8063}, f_{8064}, f_{8065}, f_{8066}, f_{8067}, f_{8068}, f_{8069}, f_{8070}, f_{8071}, f_{8072}, f_{8073}, f_{8074}, f_{8075}, f_{8076}, f_{8077}, f_{8078}, f_{8079}, f_{8080}, f_{8081}, f_{8082}, f_{8083}, f_{8084}, f_{8085}, f_{8086}, f_{8087}, f_{8088}, f_{8089}, f_{8090}, f_{8091}, f_{8092}, f_{8093}, f_{8094}, f_{8095}, f_{8096}, f_{8097}, f_{8098}, f_{8099}, f_{80100}, f_{80101}, f_{80102}, f_{80103}, f_{80104}, f_{80105}, f_{80106}, f_{80107}, f_{80108}, f_{80109}, f_{80110}, f_{80111}, f_{80112}, f_{80113}, f_{80114}, f_{80115}, f_{80116}, f_{80117}, f_{80118}, f_{80119}, f_{80120}, f_{80121}, f_{80122}, f_{80123}, f_{80124}, f_{80125}, f_{80126}, f_{80127}, f_{80128}, f_{80129}, f_{80130}, f_{80131}, f_{80132}, f_{80133}, f_{80134}, f_{80135}, f_{80136}, f_{80137}, f_{80138}, f_{80139}, f_{80140}, f_{80141}, f_{80142}, f_{80143}, f_{80144}, f_{80145}, f_{80146}, f_{80147}, f_{80148}, f_{80149}, f_{80150}, f_{80151}, f_{80152}, f_{80153}, f_{80154}, f_{80155}, f_{80156}, f_{80157}, f_{80158}, f_{80159}, f_{80160}, f_{80161}, f_{80162}, f_{80163}, f_{80164}, f_{80165}, f_{80166}, f_{80167}, f_{80168}, f_{80169}, f_{80170}, f_{80171}, f_{80172}, f_{80173}, f_{80174}, f_{80175}, f_{80176}, f_{80177}, f_{80178}, f_{80179}, f_{80180}, f_{80181}, f_{80182}, f_{80183}, f_{80184}, f_{80185}, f_{80186}, f_{80187}, f_{80188}, f_{80189}, f_{80190}, f_{80191}, f_{80192}, f_{80193}, f_{80194}, f_{80195}, f_{80196}, f_{80197}, f_{80198}, f_{80199}, f_{80200}, f_{80201}, f_{80202}, f_{80203}, f_{80204}, f_{80205}, f_{80206}, f_{80207}, f_{80208}, f_{80209}, f_{80210}, f_{80211}, f_{80212}, f_{80213}, f_{80214}, f_{80215}, f_{80216}, f_{80217}, f_{80218}, f_{80219}, f_{80220}, f_{80221}, f_{80222}, f_{80223}, f_{80224}, f_{80225}, f_{80226}, f_{80227}, f_{80228}, f_{80229}, f_{80230}, f_{80231}, f_{80232}, f_{80233}, f_{80234}, f_{80235}, f_{80236}, f_{80237}, f_{80238}, f_{80239}, f_{80240}, f_{80241}, f_{80242}, f_{80243}, f_{80244}, f_{80245}, f_{80246}, f_{80247}, f_{80248}, f_{80249}, f_{80250}, f_{80251}, f_{80252}, f_{80253}, f_{80254}, f_{80255}, f_{80256}, f_{80257}, f_{80258}, f_{80259}, f_{80260}, f_{80261}, f_{80262}, f_{80263}, f_{80264}, f_{80265}, f_{80266}, f_{80267}, f_{80268}, f_{80269}, f_{80270}, f_{80271}, f_{80272}, f_{80273}, f_{80274}, f_{80275}, f_{80276}, f_{80277}, f_{80278}, f_{80279}, f_{80280}, f_{80281}, f_{80282}, f_{80283}, f_{80284}, f_{80285}, f_{80286}, f_{80287}, f_{80288}, f_{80289}, f_{80290}, f_{80291}, f_{80292}, f_{80293}, f_{80294}, f_{80295}, f_{80296}, f_{80297}, f_{80298}, f_{80299}, f_{80300}, f_{80301}, f_{80302}, f_{80303}, f_{80304}, f_{80305}, f_{80306}, f_{80307}, f_{80308}, f_{80309}, f_{80310}, f_{80311}, f_{80312}, f_{80313}, f_{80314}, f_{80315}, f_{80316}, f_{80317}, f_{80318}, f_{80319}, f_{80320}, f_{80321}, f_{80322}, f_{80323}, f_{80324}, f_{80325}, f_{80326}, f_{80327}, f_{80328}, f_{80329}, f_{80330}, f_{80331}, f_{80332}, f_{80333}, f_{80334}, f_{80335}, f_{80336}, f_{80337}, f_{80338}, f_{80339}, f_{80340}, f_{80341}, f_{80342}, f_{80343}, f_{80344}, f_{80345}, f_{80346}, f_{80347}, f_{80348}, f_{80349}, f_{80350}, f_{80351}, f_{80352}, f_{80353}, f_{80354}, f_{80355}, f_{80356}, f_{80357}, f_{80358}, f_{80359}, f_{80360}, f_{80361}, f_{80362}, f_{80363}, f_{80364}, f_{80365}, f_{80366}, f_{80367}, f_{80368}, f_{80369}, f_{80370}, f_{80371}, f_{80372}, f_{80373}, f_{80374}, f_{80375}, f_{80376}, f_{80377}, f_{80378}, f_{80379}, f_{80380}, f_{80381}, f_{80382}, f_{80383}, f_{80384}, f_{80385}, f_{80386}, f_{80387}, f_{80388}, f_{80389}, f_{80390}, f_{80391}, f_{80392}, f_{80393}, f_{80394}, f_{80395}, f_{80396}, f_{80397}, f_{80398}, f_{80399}, f_{80400}, f_{80401}, f_{80402}, f_{80403}, f_{80404}, f_{80405}, f_{80406}, f_{80407}, f_{80408}, f_{80409}, f_{80410}, f_{80411}, f_{80412}, f_{80413}, f_{80414}, f_{80415}, f_{80416}, f_{80417}, f_{80418}, f_{80419}, f_{80420}, f_{80421}, f_{80422}, f_{80423}, f_{80424}, f_{80425}, f_{80426}, f_{80427}, f_{80428}, f_{80429}, f_{80430}, f_{80431}, f_{80432}, f_{80433}, f_{80434}, f_{80435}, f_{80436}, f_{80437}, f_{80438}, f_{80439}, f_{80440}, f_{80441}, f_{80442}, f_{80443}, f_{80444}, f_{80445}, f_{80446}, f_{80447}, f_{80448}, f_{8044$$