TEOREME DE TIP STURM PENTRU EXTREMELE INTEGRALELOR UNEI ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE ŞI OMOGENE DE ORDINUL AL DOILEA

DE

FLORIN CONSTANTINESCU

Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 17 aprilie 1957 a Institutului de calcul — Cluj.

Pornind de la cazuri simple, cercetările clasice ale lui Sturm [1] au dat proprietăţi ale soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene de ordinul al doilea, fără a mai trece prin faza integrării ecuaţiei. Sturm a demonstrat o teoremă de separaţie pentru soluţiile liniar-independente ale unei astfel de ecuaţii şi o teoremă de comparaţie pentru soluţiile a două ecuaţii în ipoteza unor relaţii între coeficienţi. Cercetările lui Sturm au fost continuate de M. Bôcher [2], care a stabilit existenţa valorilor proprii ale unui sistem Sturm.

În această lucrare se face un studiu analog cu cel al lui Sturm, însă nu pentru zerourile soluţiilor, ci pentru punctele de maximum şi de minimum ale acestora. La sfîrşitul lucrării se dă o delimitare pentru distanţa dintre două puncte de extremum ale unei soluţii.

1. Să considerăm ecuaţia diferenţială :

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0 \tag{1}$$

unde presupunem că $f(x)$ şi $g(x)$ sînt funcţii continue pe un interval $[a,b]$, iar $g(x)>0$ pe acest interval.

Dacă $y(x)$ este o soluţie a acestei ecuaţii, avem :

L e m a 1. *Mulţimea punctelor de extremum ale soluţiei $y(x)$ coincide cu mulţimea punctelor în care se anulează derivata acesteia $y'(x)$.*

Evident, mulţimea punctelor de extremum este inclusă în mulţimea zerourilor derivatei. Dacă admitem că incluziunea contrară nu este adevărată, înseamnă că în x_0 avem :

$$y'(x_0)=y''(x_0)=0.$$

Deoarece $g(x_0) \neq 0$, avem : $y(x_0)=0$ şi conform teoremei lui Cauchy $y(x) \equiv 0$, soluţie pe care o excludem din consideraţiile noastre.

L e m a 2. *Punctele de extremum ale soluţiei $y(x)$ sînt puncte izolate.*

Să admitem că x_0 ar fi un punct de acumulare pentru punctele de extremum ale lui $y(x)$, adică pentru zerourile derivatei $y'(x)$. Atunci există un şir$\{x_n\}$; $y'(x_n)=0$, $n=1, 2, \ldots$ care pentru $n \to \infty$; tinde către x_0; $y'(x_0)=0$. Oricare ar fi n, avem :

$$\frac{y'(x_n)-y'(x_0)}{x_n-x_0}=0$$

şi trecînd la limită pentru $n \to \infty$: $y''(x_0)=0$. Deoarece $g(x_0)>0$, înseamnă că avem şi $y(x_0)=0$ şi conform teoremei lui Cauchy $y(x) \equiv 0$, soluţie pe care am exclus-o.

L e m a 3. *Zerourile şi punctele de extremum ale unei soluţii $y(x)$ se separă pe intervalul $[a, b]$.*

Demonstraţia acestei leme a fost dată de acad. M. N i c o l e s c u [3], atunci cînd $f(x)$ şi $g(x)$ sînt derivabile, şi de E. K a m k e [4] pentru $f(x)$ şi $g(x)$ numai continue.

2. TEOREMA 1. *Punctele de extremum a două soluţii liniar-independente ale ecuaţiei* (1) *se separă pe intervalul $[a, b]$.*

Fie $y_1(x)$, $y_2(x)$ cele două soluţii liniar-independente. Wronskianul acestor soluţii

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Fie x_1 şi x_2 două extreme consecutive ale soluţiei $y_1(x)$. Avem :

$$W(x_1) \cdot W(x_2)>0 \tag{3}$$

adică

$$y_1(x_1)\, y_2'(x_1)\, y_1(x_2)\, y_2'(x_2)>0.$$

Pe de altă parte, după lema 3 :

$$y_1(x_1) y_1(x_2)<0. \tag{4}$$

Rezultă :

$$y_2'(x_1) y_2'(x_2)<0. \tag{5}$$

Aşadar, între x_1 şi x_2 se găseşte cel puţin un extrem al soluţiei $y_2(x)$. Demonstrăm analog că între două extreme consecutive ale lui $y_2(x)$ există un extrem pentru $y_1(x)$. Din aceste două afirmaţii rezultă teorema 1.

3. Să considerăm două ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea aduse la forma autoadjunctă :

$$(f_1 y')'+g_1 y=0, \qquad (f_2 z')'+g_2 z=0 \tag{6}$$

cu f_1, f_2, f_1', f_2', g_1, g_2 continue pe intervalul $[a, b]$.

TEOREMA 2. *Dacă pe intervalul $[a, b]$ avem :*

$$f_1(x) \geqslant f_2(x)>0, \qquad g_2(x) \geqslant g_1(x)>0 \tag{7}$$

atunci între două extreme ale oricărei soluţii $y(x)$ se găseşte cel puţin un extrem al fiecărei soluţii $z(x)$.

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe următoarea identitate cunoscută sub numele de indentitatea lui Picone [5] :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{z}(y'zf_1-z'yf_2)\right]=(g_2-g_1)y^2+(f_1-f_2)y'^2+f_2\left(y'-\frac{y}{z}z'\right)^2 \tag{8}$$

Fie x_1, x_2 două extreme consecutive ale unei soluţii $y(x)$. După cum rezultă din lema 3, între x_1 şi x_2 există un punct x_0 pentru care $y(x_0)=0$.

Este suficient să ne situăm în cazul $y'(x)>0$, deoarece celălalt caz $(y'(x)<0)$ revine la acesta prin înmulţire cu -1.

Să construim soluţia particulară $z(x)$ care satisface la următoarele condiţii iniţiale :

$$z(x_0)=y(x_0)=0, \qquad z'(x_0)=y'(x_0). \tag{9}$$

Admitem că pe intervalul $(x_0, x_2]$, $z(x)$ nu are nici un extrem. Atunci $z(x)$ şi $z'(x)$ păstrează semnul pe intervalul $(x_0, x_2]$, iar în punctul x_2 avem :

$$y(x_2)>0, \qquad y'(x_2)=0, \qquad z(x_2)>0, \qquad z'(x_2)>0.$$

Apoi :

$$\frac{y(x_0)}{z(x_0)}=\lim_{x \to x_0}\frac{y(x)}{z(x)}=\lim\frac{y'(x)}{z'(x)}=\frac{y'(x_0)}{z'(x_0)}=1.$$

Să integrăm identitatea lui Picone între limitele x_0 şi x_2 :

$$\left|\frac{y}{z}(y'zf_1-yzf_2)\right|_{x_0}^{x_2}=\int_{x_0}^{x_2}\left[(g_2-g_1)y^2+(f_1-f_2)y'^2+f_2\left(y'-\frac{y}{z}z'\right)^2\right]dx$$

$$-\left(\frac{y'z'}{z}f_2\right)_{x=x_2}=\int_{x_0}^{x_2}\left[(g_2-g_1)y^2+(f_1-f_2)y'^2+f_2\left(y'-\frac{y}{z}z'\right)^2\right]dx. \tag{10}$$

În egalitatea (10) primul membru este negativ, pe cînd al doilea este pozitiv. Rezultă că ipoteza noastră este falsă şi între x_0 şi x_2 se găseşte un extrem al soluţiei $z(x)$. Analog se demonstrează că şi între x_1 şi x_0 există un extrem al lui $z(x)$. Prin urmare pe intervalul $[x_1, x_2]$, $z(x)$ are cel puţin două extreme şi conform teoremei 1 orice soluţie $z(x)$ are pe acest interval cel puţin un extrem. Teorema 2 este demonstrată. Ca un rezultat intermediar avem :

TEOREMA 3. *Dacă pe intervalul $[a, b]$:*

$$f_1 \geqslant f_2>0, \qquad g_2 \geqslant g_1>0$$

atunci fiind dată o soluţie $y(x)$ a primei ecuaţii şi două extreme consecutive x_1, x_2, există o soluţie $z(x)$ a celei de a doua ecuaţii care are cel puţin două extreme pe intervalul $[x_1, x_2]$

Această teoremă rezultă din demonstraţia teoremei 2.

În cazul $f_1=f_2=1$ relativ la soluţia definită de (9) mai putem adăuga:

TEOREMA 4. *In vecinătatea punctului x_0 există puncte în care avem:*

$$|y(x)| \geqslant |z(x)|$$

Să presupunem că nu este aşa; adică pe intervalul $(x_0, x_0+\delta)$ avem:

$$z(x)>y(x).$$

Vom folosi o funcţie auxiliară:

$$\varphi(x)=z(x)-y(x).$$

Avem: $\varphi(x_0)=0$, $\varphi(x)>0$ pentru $x\epsilon(x_0, x_0+\delta)$; δ poate fi ales destul de mic pentru ca să avem şi:

$$\varphi'(x)=z'(x)-y'(x)>0.$$

Pe de altă parte:

$$y''(x)=-g_1y(x), \qquad z''(x)=-g_2z(x)$$

integrăm între x_0 şi $x\epsilon(x_0, x_0+\delta)$:

$$y'(x)-y'(x_0)=-\int_{x_0}^{x} g_1ydz, \qquad z'(x)-z'(x_0)=-\int_{x_0}^{x} g_2zdx.$$

Deoarece $g_2\geqslant g_1>0$, $z>y$ avem şi $g_2z>g_1y$ şi $\int_{x_0}^{x} g_2zdx > \int_{x_0}^{x} g_1ydx$, deci

$$y'(x)-y'(x_0)>z'(x_0); \quad z'(x_0)=y'(x_0), \quad \varphi'(x)=z'(x)-y'(x)<0.$$

Contradicţia obţinută demonstrează afirmaţia noastră.

Demonstraţia este analoagă pentru intervalul $(x_0-\delta, x_0)$.

Fie acum $y(x)$ şi $z(x)$ soluţiile ecuaţiilor (6), definite în modul următor:

$$\begin{aligned} y(a)&=\alpha_1\\ y'(a)&=\alpha_1'\\ z(a)&=\alpha_2\\ z'(a)&=\alpha_2'. \end{aligned} \tag{11}$$

Vom studia următoarele două cazuri:

$$a)\quad \alpha_1=\alpha_2=0$$
$$b)\quad \alpha_1\neq 0, \quad \alpha_2\neq 0$$

în care caz mai presupunem:

$$\frac{f_1(a)\alpha_1'}{\alpha_1} \geqslant \frac{f_2(a)\alpha_2'}{\alpha_2}, \qquad \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1'\cdot\alpha_2'>0.$$

Deoarece printr-o înmulţire cu o constantă putem face $\alpha_1\cdot\alpha_2>0$, rezultă că curbele integrale cresc amîndouă sau descresc în punctul a.

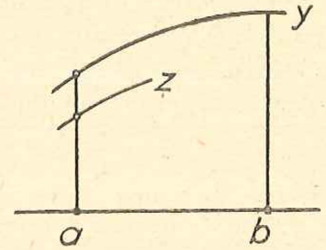

Fig. 1

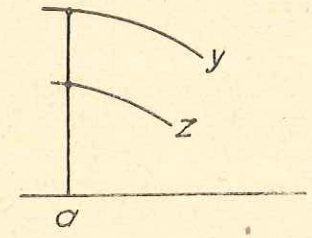

Fig. 2

TEOREMA 5. *In intervalul $[a, b]$ soluţia $z(x)$ are cel puţin tot atîtea extreme cîte are $y(x)$ în acest interval şi numerotînd cu $x_1, x_2, x_3,\ldots$ extremele lui $y(x)$ iar cu $x_1', x_2', x_3',\ldots$ extremele lui $z(x)$ în ordine crescătoare, avem:*

$$x_k'\leqslant x_k$$

pentru orice valoare k corespunzătoare unui extrem al lui $y(x)$ şi $z(x)$.

Aceasta este analoagă cu teorema generală de comparaţie a lui Sturm, care este de bază în teoria sistemelor Sturm.

Ne vom servi de această teoremă şi de aceea o enunţăm independent:

În intervalul $[a, b]$ soluţia $z(x)$ are cel puţin tot atîtea zerouri cîte are $y(x)$ în acest interval şi numerotînd cu $x_1, x_2, x_3,\ldots$ zerourile lui $y(x)$ iar cu $x_1', x_2', x_3',\ldots$ zerourile lui $z(x)$ în ordine crescătoare, avem:

$$x_k'\leq x_k$$

pentru orice valoare k corespunzătoare unui zero al lui $y(x)$ şi $z(x)$.

Să trecem la demonstraţia teoremei 5.

Cazul *a*), este evident, deoarece revine la teorema de comparaţie 2 prin înmulţirea uneia dintre soluţii cu o constantă.

În cazul *b*), tot după teorema de comparaţie 2 rezultă că $z(x)$ are cel puţin un extrem între x_1 şi x_2; x_2 şi x_3 etc. Rămîne de demonstrat că $z(x)$ are cel puţin un extrem între a şi x_1. Dacă $\alpha_1'=0$, acest lucru rezultă imediat din teorema 2.

Presupunem:

$$\alpha_1'\neq 0.$$

Cazul 1. Presupunem că pe intervalul $(\alpha, x_1]$, $z(x)$ nu are nici un extrem. Evident, $z(x)$ nu se anulează atunci pe acest interval şi putem integra identitatea lui Picone între a şi x_1:

$$\left|\frac{y}{z}(y'zf_1-z'yf_2)\right|_a^{x_1}=\int_a^{x_1}\left[(g_2-g_1)y^2+(f_1-f_2)y'^2+f_2\left(y'-\frac{y}{z}z'\right)^2\right]dx$$

$$-\frac{y^2(x_1)z'(x_1)}{z(x_1)}f_2(x_1)-\alpha_1^2\left[\frac{\alpha_2'}{\alpha_1}f_1-\frac{\alpha_2'}{\alpha_2}f_2\right]=$$

$$=\int_a^{x_1}\left[(g_1-g_1)y^2+(f_1-f_2)y'^2+f_2\left(y'-\frac{y}{z}z'\right)^2\right]dx.$$

Contradicţia obţinută ne arată că între a şi x_1 există un punct de extremum pentru $z(x)$.

Cazul 2. Fie ξ_1 primul punct la dreapta lui a, în care $y(x)$ se anulează. După teorema generală de comparaţie a lui Sturm, există un punct $\xi_1' \in (a, \xi_1]$ în care avem şi $z(\xi_1')=0$. Dacă între a şi ξ_1 există mai multe puncte în care $z(x)$ se anulează, teorema este demonstrată. Vom presupune existenţa unui singur punct ξ_1' în care $z(\xi_1')=0$.

De asemenea vom presupune că între ξ_1' şi x_1, $z(x)$ nu se anulează, căci altfel teorema ar fi demonstrată. Aşadar, presupunem că $z(x)$ şi $z'(x)$ păstrează semnul pe intervalul (ξ'_1, x_1). Integrăm identitatea lui Picone între ξ_1 şi x:

$$\left|\frac{y}{z}(y'zf_1-z'yf_2)\right|_{\xi_1}^{x_1}=\int_{\xi_1}^{x_1}\left[(g_2-g_1)y^2+(f_1-f_2)y'^2+f_2\left(y'-\frac{y}{z}z'\right)^2\right]dx$$

$$-\frac{y^2(x_1)z'(x_1)}{z(x_1)}f_2(x_1)=\int_{\xi_1}^{x_1}\left[(g_2-g_1)y^2+(f_1-f_2)y'^2+f_2\left(y'-\frac{y}{z}z'\right)^2\right]dz.$$

Contradicţia obţinută ne arată că între ξ_1 şi x_1 există un extrem pentru $z(x)$. Teorema este în întregime demonstrată.

4. În încheiere vom folosi teorema 2 pentru a deduce margini (inferioară şi superioară) pentru intervalul dintre două puncte de extremum consecutive ale ecuaţiei:

$$(fy')'+gy=0 \tag{12}$$

unde presupunem că pe intervalul $[a, b]$ avem: $f(x)>0$, $g(x)>0$. Notînd cu m_f, M_f minimul şi maximul lui $f(x)$ iar cu m_g, M_g minimul şi maximul lui $g(x)$ pe $[a, b]$:

TEOREMA 6. *Distanţa dintre două extreme consecutive ale ecuaţiei* (12) *este cuprinsă între*:

$$\pi\sqrt{\frac{m_f}{M_g}} \quad \text{şi} \quad \pi\sqrt{\frac{M_f}{m_g}}.$$

Pentru demonstraţie, să comparăm ecuaţia (12) cu ecuaţiile

$$(m_f z')'+M_g z=0$$
$$(M_f z')'+m_g z=0$$

care se reduc la:

$$m_f z''+M_g z=0$$
$$M_f z''+m_g z=0. \tag{13}$$

Aplicînd teorema 2 şi integrînd ecuaţiile (13), teorema 6 rezultă imediat.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Sturm, *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre.* Journ. de Math. pur. et appl., 1 (1836), 106–186.
2. M. Bôcher, *Leçons sur les méthodes du Sturm.* Paris, 1917.
3. M. Nocolesco, *Sur le théorème de Sturm.* Mathematica, 1 (1929), 111–114.
4. E. Kamke, *Bemerkungen zu einigen Trennungssätzen von M. Nicolesco.* Mathematica (1939), 201–203.
5. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale.* Bologna, 1948, 161–170.

Теоремы типа Штурма для экстремумов интегралов одного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

(Краткое содержание)

В работе исследуются точки экстремума решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, причем $g(x)>0$ в этом отрезке. В первой части доказываются следующие две теоремы: **Теорема** 1. Точки экстремума двух линейно независимых решений уравнения (1) отделяются на интервале $[a, b]$.

Рассматриваются уравнения:

$$\begin{aligned}(f_1y')'+g_1y&=0\\(f_2z')'+g_2z&=0.\end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 2. Если на отрезке $[a, b]$ имеем: $f_1 \geqq f_2 > 0$; $g_2 \geqq g_1 > 0$, тогда между двумя экстремумами любого решения $y(x)$ находится по крайней мере один экстремум каждого решения $z(x)$.

В заключении находятся границы (верхняя и нижняя) для расстояния между двумя последовательными экстремумами.

Théorèmes du type Sturm pour les extrêmes des intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène du deuxième ordre

(Résumé)

On fait une étude des points d'extremum des solutions de l'équation différentielle linéaire et homogène du deuxième ordre:

$$y''+f(x)\,y'+g(x)\,y=0 \tag{1}$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont continues dans l'intervalle $[a, b]$ et $g(x) > 0$ sur cet intervalle. Dans la première partie on démontre les deux théorèmes suivants :

1^er^ *théorème.* Les points d'extremum de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1) se séparent sur l'intervalle $[a,b]$.

On considère les équations :

$$\begin{aligned}(f_1 y')' + g_1 y &= 0\\ (f_2 z')' + g_2 z &= 0.\end{aligned} \tag{6}$$

2^e^ *théorème.* Si dans l'intervalle $[a, b]$ on a : $f_1 \geqslant f_2 > 0$, $g_2 \geqslant g_1 > 0$, alors entre les deux extrêmes de n'importe quelle solution $y(x)$ il existe au moins un extrême de chaque solution $z(x)$.

Dans la conclusion on trouve des limites (inférieure et supérieure) pour la distance entre deux point d'extremum consécutifs.