ASUPRA UNEI MULŢIMI DE NUMERE TRANSCENDENTE

DE

ŞTEFAN N. BERŢI

(Cluj)

Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 6 martie 1962 a Institutului de calcul al Filialei din Cluj a Academiei R.P.R.

Primele exemple de numere transcendente au fost construite de J. Liouville. Aceste numere au forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n!}},$$

unde şirul $a_1, a_2, \ldots$ are o infinitate de termeni diferiţi de zero, formaţi din numerele $0, 1, 2, \ldots, 9$.

DEFINIŢIA 1. *Orice număr de forma*

$$\lambda_{A,B,\{a_n\}} = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{B^{n!}},$$

unde A este un număr întreg, B este un număr întreg supraunitar, iar şirul $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este un şir de numere întregi situate în intervalul $[0, B-1]$, care are o infinitate de termeni diferiţi de zero, se numeşte **număr de tip Liouville.** *Prin $\mathcal{L}_{A,B}$ se va nota mulţimea tuturor numerelor de tip Liouville pentru A şi B fixaţi. De asemenea se vor introduce notaţiile*

$$\mathcal{L}_B = \bigcup_{A=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{A,B}, \qquad \mathcal{L} = \bigcup_{B=2}^{\infty} \mathcal{L}_B.$$

Se arată, ca şi în cazul numerelor lui Liouville (a se vedea [1], [2]) că mulţimea $\mathcal{L}$ este o mulţime constituită din numere transcendente.

În lucrare se stabilesc cîteva proprietăţi ale mulţimilor liniare $\mathcal{L}_{A,B}$ $\mathcal{L}_B$ şi $\mathcal{L}$.

LEMA 1. *Are loc incluziunea* $\mathcal{L}_{A,B} \subset (A,\ A+1)$.

Într-adevăr, pentru partea fracţionară a unui număr din $\mathcal{L}_{A,B}$ este valabilă inegalitatea : $0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{B^{n!}} < 1$, de unde rezultă că orice număr din $\mathcal{L}_{A,B}$ aparţine intervalului $(A,\ A+1)$, ceea ce demonstrează lema.

LEMA 2. *Mulţimile* $\mathcal{L}_{A,B}$, $\mathcal{L}_B$ *şi* $\mathcal{L}$ *au puterea continuumului.*

Într-adevăr, din corespondenţa biunivocă între mulţimile $\mathcal{L}_{A,B}$ şi $[0,\ 1)$;

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{B^{n!}} \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{B^n},$$

rezultă că $\mathcal{L}_{A,B}$ are puterea continuumului. Ţinînd seama de incluziunile

$$\mathcal{L}_{A,B} \subset \mathcal{L}_B \subset \mathcal{L} \subset (-\infty, \infty)$$

şi de faptul că mulţimile $\mathcal{L}_{A,B}$ şi $(-\infty, \infty)$ au puterea continuumului, rezultă că şi mulţimile $\mathcal{L}_B$, $\mathcal{L}$ au puterea continuumului.

LEMA 3. *Mulţimile* $\mathcal{L}_{A,B}$, $\mathcal{L}_B$ *şi* $\mathcal{L}$ *au măsura zero.*

Demonstraţie. Mai întîi se va arăta că mulţimea $\mathcal{L}_{A,B}$ are măsura zero. Mulţimea $\mathcal{L}_B$ fiind o reuniune numărabilă de mulţimi de forma $\mathcal{L}_{A,B}$, iar $\mathcal{L}$ fiind o reuniune numărabilă de mulţimi de forma $\mathcal{L}_B$, rezultă că şi mulţimile $\mathcal{L}_B$ şi $\mathcal{L}$ au măsura zero.

Fie ε un număr pozitiv arbitrar. Prin $\mathcal{L}_{A,B,\{a_1,\dots,a_i\}}$ se va nota mulţimea numerelor din $\mathcal{L}_{A,B}$ care au primii i termeni $a_1, a_2, \dots, a_i$ fixaţi.

Mulţimea $\mathcal{L}_{A,B,\{a_1,\dots,a_i\}}$ este inclusă în intervalul de lungime $\frac{1}{B^{i!}}$:

$$\left(A + \sum_{n=1}^{i} \frac{a_n}{B^{n!}},\ A + \sum_{n=1}^{i} \frac{a_n}{B^{n!}} + \frac{1}{B^{i!}}\right).$$

Astfel $\mathcal{L}_{A,B,\{a_1,\dots,a_i\}}$ este acoperită de un interval de lungime $\frac{1}{B^{i!}}$. Mulţimea $\mathcal{L}_{A,B}$ este reuniunea unui număr B^i de mulţimi de forma $\mathcal{L}_{A,B,\{a_1,\dots,a_i\}}$, prin urmare $\mathcal{L}_{A,B}$ poate fi acoperită cu B^i intervale de lungime totală $\frac{B^i}{B^{i!}}$. Alegînd numărul i suficient de mare $(i\,! > 1 - \log_B \varepsilon)$, mulţimea $\mathcal{L}_{A,B}$ este acoperită cu B^i intervale de lungime totală mai mică decît ε.

DEFINIŢIA 2. *Prin* $\mathcal{S}_{A,B}$ *se va nota mulţimea intervalelor deschise* $(a,\ b)$ *care au proprietatea : oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *au loc relaţiile :*

$$(a,\ b) \cap \mathcal{L}_{A,B} = \Delta,\quad (a - \varepsilon,\ b) \cap \mathcal{L}_{A,B} \neq \Delta,\quad (a,\ b + \varepsilon) \cap \mathcal{L}_{A,B} \neq \Delta,$$

unde prin Δ *s-a notat mulţimea vidă. De asemenea se va introduce notaţia :*

$$\mathcal{S}_B = \bigcup_{A=-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_{A,B}$$

LEMA 4. *Dacă pentru* $i \geqq 1$ *are loc inegalitatea* $a_i < B - 1$, *atunci intervalul :*

$$(\alpha,\ \beta) = \left(A + \sum_{n=1}^{i} \frac{a_n}{B^{n!}} + (B-1) \cdot \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{B^{n!}},\ A + \sum_{n=1}^{i} \frac{a_n}{B^{n!}} + \frac{1}{B^{i!}}\right)$$

va aparţine mulţimii $\mathcal{S}_{A,B}$.

Într-adevăr, din $x \in (\alpha,\ \beta)$, rezultă că în reprezentarea în baza B a numărului x :

$$x = A,\ a_1\ a_2\ 0\ 0\ 0\ a_3\ 0 \dots 0\ a_4\ 0 \dots$$
$$\dots 0\ a_i\ 0\ \dots 0\ (B-1)\ 0\quad \dots 0\ (B-1)\ 0\quad \dots +$$
$$+\ 0,\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \dots$$
$$\dots 0\ 0\ \lambda_1 \dots \lambda_k\ \lambda_{k+1}\ \lambda_{k+2} \dots \lambda_l\ \lambda_{l+1}\ \lambda_{l+2} \dots$$

există cifre $\lambda_j\ (j = 1, 2, 3, \dots)$ care să fie diferite de zero. Astfel numărul x nu va aparţine mulţimii $\mathcal{L}_{A,B}$. Pentru orice ε pozitiv are loc relaţia :

$$\lambda_{A,B,\{a_1,\dots,a_i,B-1,B-1,\dots\}} \in (\alpha - \varepsilon,\ \beta).$$

În fine trebuie să se arate că

$$\mathcal{L}_{A,B} \cap (\alpha,\ \beta + \varepsilon) \neq \Delta$$

Pentru $k > i$ şi $\frac{1}{A^{k!}} < \varepsilon$, toate numerele din $\mathcal{L}_{A,B}$ de forma

$$\lambda_{A,B,\{a_1,\dots,a_i,0,\dots,0,a_{k+1},a_{k+2},\dots\}}$$

cu $a_1, \dots, a_i$ fixaţi, vor aparţine mulţimii $(\alpha,\ \beta + \varepsilon) \cap \mathcal{L}_{A,B}$.

Astfel lema este demonstrată.

Se poate observa că mulţimea $(\alpha,\ \beta + \varepsilon) \cap \mathcal{L}_{A,B}$ are puterea continuumului.

LEMA 5. *Intervalul* $(\alpha,\ \beta) = \left(A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B-1}{B^{n!}},\ A + 1\right)$ *aparţine mulţimii* $\mathcal{S}_{A,B}$.

Această lemă se demonstrează ca şi lema precedentă.

DEFINIŢIA 3. *Prin* $l_{A,B,\{a_1,\dots,a_i\}}$ *se notează numărul raţional*

$$A + \sum_{n=1}^{i} \frac{a_n}{B^{n!}},$$

iar prin $\rho_{A,B,i}$ *se va nota mulţimea numerelor de forma* $l_{A,B,\{a_1,\ldots,a_i\}}$ *cu* $a_i \neq 0$. *Se mai introduc notaţiile*

$$\rho_{A,B} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho_{A,B,i}, \quad \rho_B = \bigcup_{A=-\infty}^{\infty} \rho_{A,B}, \quad \rho = \bigcup_{B=2}^{\infty} \rho_B .$$

LEMA 6. *Dacă* α *este un număr real şi* $a \notin \mathcal{L}_B \cup \rho_B$, *atunci există un interval* (α, β) *care aparţine mulţimii* $\mathcal{S}_B$, *astfel încît să fie valabilă apartenenţa* $a \in (\alpha, \beta)$.

Într-adevăr, a scris ca fracţie în baza de numeraţie B, are cel puţin o cifră diferită de zero scrisă în loc diferit de $n\,!$. Fie l prima cifră de acest fel situată în locul $i\,! + k$ $(0 < k < i \cdot i\,! - 1)$. Fie $l_{A,B,\{a_1,\ldots,a_i\}}$ numărul obţinut prin înlăturarea din numărul a scris ca fracţie în baza B a cifrei l precum şi a cifrelor următoare.

Se pot prezenta următoarele cazuri:

$$1°.\ a_i < B - 1,\ 2°.\ a_i = \ldots = a_{i-t} = B - 1 > 0_{i-t-1},\ 3°.\ a_i = \ldots = a_1 = B - 1.$$

Referitor la aceste cazuri au loc relaţiile de apartenenţă:

În cazul 1°:

$$a \in \left(A + \sum_{n=1}^{i} \frac{a_n}{B^{n!}} + (B-1) \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{B^{n!}},\ A + \sum_{n=1}^{i} \frac{a_n}{B^{n!}} + \frac{1}{B^{i!}}\right) \in \mathcal{S}_{A,B} .$$

În cazul 2°:

$$a \in \left(A + \sum_{n=1}^{i-t-1} \frac{a_n}{B^{n!}} + (B-1) \sum_{n=i-t}^{\infty} \frac{1}{B^{n!}},\ A + \sum_{n=1}^{i-t-1} \frac{a_n}{B^{n!}} + \frac{1}{B^{(i-t-1)!}}\right) \in \mathcal{S}_{A,B} .$$

În cazul 3°:

$$a \in \left(A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{B^{n!}},\ A + 1\right) \in \mathcal{S}_{A,B} .$$

Din aceste relaţii rezultă lema.

LEMA 7. *Dacă intervalul* (α, β) *aparţine mulţimii* $\mathcal{S}_{A,B}$, *atunci acest interval are forma indicată în lema 4 sau 5.*

Într-adevăr, din $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}_{A,B}$ rezultă că oricare ar fi numărul a din (α, β) are loc relaţia de apartenenţă $a \in \mathcal{L}_{A,B}$, adică există un interval (α_1, β_1) astfel încît $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{S}_{A,B}$. În baza lemei 6 intervalul (α_1, β_1) are una din formele indicate în lema 4 sau 5.

Observaţie. Intervalele maximale disjuncte cu $\mathcal{L}_{A,B}$ sînt intervale deschise la stînga şi închise la dreapta de forma $(\alpha, \beta]$, unde α este un număr de tip Liouville din $\mathcal{L}_{A,B}$, iar β este un număr raţional din $\rho_{A,B}$.

LEMA 8. *Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii* $\mathcal{L}_{A,B}$ *este dată de reuniunea*

$$\rho_{A,B} \cup \mathcal{L}_{A,B} .$$

Într-adevăr, aceste puncte sînt puncte de acumulare ale mulţimii $\mathcal{L}_{A,B}$. Dacă $a \notin \mathcal{L}_{A,B} \cup \rho_{A,B}$, atunci există un interval (α, β) care aparţine mulţimii $\mathcal{S}_{A,B}$, astfel încît punctul a să aparţină acestui interval.

Se poate alege un număr pozitiv ε, astfel încît intervalul $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ să fie inclus în intervalul (α, β). Prin această alegere, vecinătatea $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ a lui a este disjunctă cu mulţimea $\mathcal{L}_{A,B}$.

LEMA 9. *Dacă intervalul* (α, β) *aparţine mulţimii* $\mathcal{S}_{A,B}$, *atunci oricare ar fi numărul întreg c, intervalul* $(\alpha + c, \beta + c)$ *va aparţine mulţimii* $\mathcal{S}_B$.

Într-adevăr, din $\lambda_{A,B,\{a_n\}} \in \mathcal{L}_{A,B}$ rezultă că $\lambda_{A+C,B,\{a_n\}} \in \mathcal{L}_{A+C,B}$.

LEMA 10. *Are loc relaţia:*

$$\sup_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{S}_B} (\beta - \alpha) = 1 - \lambda_{0,B,\{B-1,B-1,\ldots\}} .$$

Într-adevăr, dacă intervalul (α, β) are forma din lema 4, atunci lungimea acestui interval va fi:

$$\beta - \alpha = (B-1) \cdot \left[\frac{1}{B^{i!+1}} + \ldots + \frac{1}{B^{(i+1)!-1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{B^{(i+1)!+1}} + \ldots + \frac{1}{B^{(i+2)!-1}} + \ldots\right],$$

iar pentru $i \geqq 2$ este valabilă inegalitatea:

$$\frac{1}{B^{i!+1}} + \ldots + \frac{1}{B^{(i+1)!-1}} + \frac{1}{B^{(i+1)!+1}} + \ldots < \frac{1}{B^{2!+1}} + \ldots .$$

Astfel lema este demonstrată.

LEMA 11. *Sînt valabile inegalităţile*

$$\frac{1}{B^2} - \frac{1}{B^5} < \sup_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{S}_B} (\beta - \alpha) < \frac{1}{B^2} .$$

Într-adevăr, în scrierea în baza B este valabilă inegalitatea

$$0{,}00\,(B-1)\,(B-1)\,(B-1) = \frac{1}{B^2} - \frac{1}{B^5} < \sup_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{S}_B} (\beta - \alpha),$$

iar din lema 10 şi inegalitatea evidentă $\lambda_{0,B\{B-1,B-1,\dots\}} < \frac{1}{B^2}$ se obţin inegalităţile

$$\frac{1}{B^2}-\frac{1}{B^5} < \sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}_B}(\beta-\alpha) < \frac{1}{B^2}\cdot$$

Astfel lema este demonstrată.

LEMA 12. *Din $B_1 < B_2$ rezultă inegalitatea*

$$\sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}_{B_1}}(\beta-\alpha) > \sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}_{B_2}}(\beta-\alpha).$$

Într-adevăr, va fi suficient să se arate valabilitatea inegalităţii

$$\sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}_B}(\beta-\alpha) > \sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}_{B+1}}(\beta+\alpha).$$

Pentru aceasta se ţine seama de relaţia $\frac{1}{B^2}-\frac{1}{B^5} > \frac{1}{(B+1)^2}$, care se deduce din inegalitatea evidentă :

$$B(B-1)(2B^2+3B+2) > 1.$$

TEOREMĂ. *Mulţimea $\mathcal{L}$ este o mulţime de măsura zero de puterea continuumului şi orice punct de pe axa numerelor reale este un punct de condensare pentru această mulţime.*

Demonstraţie. Din lemele 2 şi 3 rezultă că mulţimea $\mathcal{L}$ este de puterea continuumului şi are măsura zero. Trebuie arătat că orice număr real este punct de condensare pentru $\mathcal{L}$ (prin definiţie un punct este punct de *condensare* pentru o mulţime nenumărabilă, dacă în orice vecinătate a acestui punct se află o mulţime de puterea continuumului de puncte din mulţime). Mai întîi se va arăta că orice număr raţional este punct de condensare pentru mulţimea $\mathcal{L}$. Dacă $\frac{p}{q}$ este un număr raţional, atunci oricare ar fi baza $B = m \cdot q \geq 2$ (B este un multiplu a lui q), numărul raţional $\frac{p}{q}$ se va putea reprezenta sub forma $A + \frac{a}{B}$, unde $0 \leq a < q$. Deoarece $A + \frac{a}{B} \in \rho_{A,B}$, rezultă că $\frac{p}{q}$ este un punct de condensare pentru $\mathcal{L}_B$, deci şi pentru $\mathcal{L}$. Pentru a stabili că orice număr real este punct de condensare pentru mulţimea $\mathcal{L}$, este suficient ca să se observe că în orice vecinătate a unui număr real, este inclusă o vecinătate a unui număr raţional.

Astfel teorema este demonstrată.

О НЕКОТОРОМ МНОЖЕСТВЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Имеется множество $\mathcal{L}_{A,B}$ чисел вида

$$A + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{B^{n!}},$$

где A — целое число, B — натуральное число больше единицы, а $\{a_n\}$ — последовательность числе, лежащих между 0 и B — 1, с бесконечным числом членов отличающихся от нуля.

В труде устанавливается несколько свойств множеств

$$\mathcal{L}_{A,B}, \quad \mathcal{L}_B = \bigcup_{A=-\infty}^{\infty}\mathcal{L}_{A,B}, \quad \mathcal{L} = \bigcup_{B=2}^{\infty}\mathcal{L}_B,$$

и в заключении показано, что $\mathcal{L}$ является множеством мощности континуума, имеет нулевую меру, а любая точка на оси действительных чисел является точкой сгущения для $\mathcal{L}$.

SUR UN ENSEMBLE DE NOMBRES TRANSCENDANTS

RÉSUMÉ

On considère l'ensemble $\mathcal{L}_{A,B}$ des nombres de la forme

$$A + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{B^{n!}},$$

où A est un nombre entier, B un nombre naturel plus grand que l'unité et $\{a_n\}$ une suite de nombres compris entre 0 et B —1, avec un nombre infini de termes différents de zéro.

Dans le travail on établit quelques propriétés des ensembles

$$\mathcal{L}_{A,B}, \quad \mathcal{L}_B = \bigcup_{A=-\infty}^{\infty}\mathcal{L}_{A,B}, \quad \mathcal{L} = \bigcup_{B=2}^{\infty}\mathcal{L}_B,$$

et, dans la partie finale, on montre que $\mathcal{L}$ est un ensemble de la puissance du continu, qu'il a la mesure zéro et que n'importe quel point situé sur l'axe des nombre réels est un point de condensation pour $\mathcal{L}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Гельфонд А. О., *Трансченндентные и алгебрические числа*, Москва, 1952.
2. Valiron G., *Cours d'analyse math. Théorie des fonctions*, Paris, 1955.

Primit la 1. II. 1962