RESTUL ÎN FORMULA DE INTEGRARE NUMERICĂ A LUI STÖRMER

DE

D. V. IONESCU

(Cluj)

Să considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea

$$y'' = f(x, y) \tag{1}$$

şi fie $y(x)$ soluţia ei care satisface la condiţiile iniţiale $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0$. Să presupunem că această soluţie a fost calculată în prealabil pe nodurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, în progresie aritmetică cu raţia $h = x_1 - x_0$. Valoarea lui $y(x)$ pe nodul $x_6 = x_5 + h$, este dată de o formulă de integrare numerică, numită *formula lui Störmer* (a se vedea volumul [2]), care are următoarea formă

$$y(x_6) = 2y(x_5) - y(x_4) + h^2\Big[g(x_5) + \frac{\Delta_2 g(x_5)}{12} + \frac{\Delta_3 g(x_5)}{12} + \frac{19\,\Delta_4 g(x_5)}{240} + \frac{9\,\Delta_5 g(x_5)}{120}\Big] + R, \tag{2}$$

unde

$$g(x) = f[x, y(x)], \tag{3}$$

R este *restul* formulei, iar

$$\begin{aligned}
\Delta_2 g(x_5) &= g(x_5) - 2g(x_4) + g(x_3)\\
\Delta_3 g(x_5) &= g(x_5) - 3g(x_4) + 3g(x_3) - g(x_2)\\
\Delta_4 g(x_5) &= g(x_5) - 4g(x_4) + 6g(x_3) - 4g(x_2) + g(x_1)\\
\Delta_5 g(x_5) &= g(x_5) - 5g(x_4) + 10g(x_3) - 10gx_{(2)} + 5g(x_1) - g(x_0).
\end{aligned} \tag{4}$$

În această lucrare se determină restul formulei lui Störmer care se pune sub formă de integrală definită, din care se deduce o evaluare a lui.

Vom presupune în ecuația (1) că funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale în raport cu x și y, pînă la ordinul al patrulea, continue în domeniul D definit de inegalitățile :

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \qquad |y - y_0| \leqslant b$$

și că soluția ecuației (1), cu condițiile $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0$ este definită pe intervalul $[x_0, x_0 + a]$.

Dacă în formula (2) se înlocuiesc diferențele din membrul al doilea cu formulele (4) se obține

$$y(x_6) = 2y(x_5) - y(x_4) + \frac{h^2}{60}[71g(x_5) - 28\,g(x_4) + 22g(x_3) -$$

$$- 3g(x_2) - 3g(x_1) + g(x_0)\,] + R. \tag{5}$$

1. Pentru a determina restul formulei de integrare numerică (2) sau (5), vom aplica metoda noastră de lucru [2], și la intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_5, x_6]$ vom atașa funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_6(x)$, care sînt soluții ale ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_1^{(6)}(x) = 0, \;\; \varphi_2^{(6)}(x) = 0, \ldots, \varphi_6^{(6)}(x) = 0 \tag{6}$$

și care satisfac la următoarele condiții la limită

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_0) = 0, \quad \varphi_1'(x_0) = 0, \quad \varphi_1''(x_0) = 0, \quad \varphi_1'''(x_0) = -h^2\\
&\qquad \varphi_1^{(4)}(x_0) = 0, \quad \varphi_1^{(5)}(x_0) = 0,\\
&\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1),\ \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1),\ \varphi_2''(x_1) = \varphi_1''(x_1),\ \varphi_2'''(x_1) - \varphi_1'''(x_1) = 3h^2\\
&\qquad \varphi_2^{(4)}(x_1) = \varphi_1^{(4)}(x_1),\ \varphi_2^{(5)}{}_2(x_1) = \varphi_1^{(5)}(x_1),\\
&\varphi_3(x_2) = \varphi_2(x_2),\ \varphi_1'(x_2) = \varphi_2'(x_2),\ \varphi_3''(x_2) = \varphi_2''(x_2),\ \varphi_3'''(x_2) - \varphi_2'''(x_2) = 3h^2\\
&\qquad \varphi_3^{(4)}(x_2) = \varphi_2^{(4)}(x_2),\ \varphi_3^{(4)}(x_2) = \varphi_2^{(5)}(x_2),\\
&\varphi_4(x_3) = \varphi_3(x_3),\ \varphi_4'(x_3) = \varphi_3'(x_3),\ \varphi_4''(x_3) = \varphi_3''(x_3),\ \varphi_4'''(x_3) - \varphi_3'''(x_3) = -22h^2\\
&\qquad \varphi_4^{(4)}(x_3) = \varphi_3^{(4)}(x_3),\ \varphi_4^{(5)}(x_3) = \varphi_4^{(5)}(x_3),\\
&\varphi_5(x_4) = \varphi_4(x_4),\ \varphi_5'(x_4) = \varphi_4'(x_4),\ \varphi_5''(x_4) = \varphi_4''(x_4),\ \varphi_4'''(x_4) - \varphi_4'''(x_4) = 28\,h^2\\
&\qquad \varphi_5^{(4)}(x_4) = \varphi_4^{(4)}(x_4),\ \varphi_5^{(5)}(x_4) - \varphi_4^{(5)}(x_4) = 60\\
&\varphi_6(x_5) = \varphi_5(x_5),\ \varphi_6'(x_5) = \varphi_5'(x_5),\ \varphi_6''(x_5) = \varphi_5''(x_5),\ \varphi_6'''(x_5) - \varphi_5'''(x_5) = -71h^2\\
&\qquad \varphi_6^{(4)}(x_5) = \varphi_5^{(4)}(x_5),\ \varphi_6^{(5)}(x_5) - \varphi_5^{(5)}(x_5) = -120\\
&\varphi_6(x_6) = 0, \quad \varphi_6'(x_6) = 0, \quad \varphi_6''(x_6) = 0, \quad \varphi_6'''(x_6) = 0,\\
&\qquad \varphi_6^{(4)}(x_6) = 0, \quad \varphi_6^{(5)}(x_6) = -60.
\end{aligned} \tag{7}$$

Dacă $y(x)$ este soluția ecuației diferențiale (1), care satisface la condițiile inițiale $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, este evident că avem

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1^{(6)} y\,dx = 0, \; \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2^{(6)} y\,dx = 0, \ldots, \int_{x_5}^{x_6} \varphi_6^{(6)} y\,dx = 0.$$

Aplicînd la fiecare integrală formula generalizată de integrare prin părți și observînd că în baza ipotezelor făcute, funcția $y(x)$ are derivate succesive pînă la ordinul al șaselea, continue pe intervalul $[x_0, x_0 + a]$, vom avea :

$$\left[\varphi_1^{(5)} y - \varphi_1^{(4)} y' + \varphi_1''' y'' - \varphi_1'' y''' + \varphi_1' y^{(4)} - \varphi_1 y^{(5)}\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1 y^{(6)}\,dx = 0$$

$$\left[\varphi_2^{(5)} y - \varphi_2^{(4)} y' + \varphi_2''' y'' - \varphi_2'' y''' + \varphi_2' y^{(4)} - \varphi_2 y^{(5)}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2 y^{(6)}\,dx = 0$$

. . . .

$$\left[\varphi_6^{(5)} y - \varphi_6^{(4)} y' + \varphi_6''' y'' - \varphi_6'' y''' + \varphi_6' y^{(4)} - \varphi_6 y^{(5)}\right]_{x_5}^{x_6} + \int_{x_5}^{x_6} \varphi_6 y^{(6)}\,dx = 0.$$

Adunînd toate aceste formule membru cu membru și ținînd seama de condițiile la limită (7) se obține formula

$$-60\,[y(x_4) - 2y(x_5) + y(x_6)] + h^2[y''(x_0) - 3y''(x_1) - 3y''(x_2) +$$

$$+ 22y''(x_3) - 28y''(x_4) + 71y''(x_5)] + \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) y^{(6)}(x)\,dx = 0,$$

unde funcția $\varphi(x)$ definită pe intervalul $[x_0, x_6]$, coincide cu $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots, \varphi_6(x)$ pe intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_5, x_6]$.

Formula precedentă este formula de integrare numerică a lui Störmer, în care s-a determinat restul prin formula

$$R = \frac{1}{60}\int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) y^{(6)}(x)\,dx. \tag{8}$$

Pentru ca formula de integrare numerică (5) să existe, rămîne să se arate că se poate determina funcția $\varphi(x)$ de ecuațiile diferențiale (6) și de condițiile la limită (7).

2. Integrînd pe rînd ecuațiile diferențiale (6) cu condițiile la limita (8), avem

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= -h^2 \frac{(x - x_0)^3}{3\,!}\\
\varphi_2(x) &= -h^2 \frac{(x - x_0)^3}{3\,!} + 3h^2 \frac{(x - x_1)^3}{3\,!}\\
\varphi_3(x) &= -h^2 \frac{(x - x_0)^3}{3\,!} + 3h^2 \frac{(x - x_1)^3}{3\,!} + 3h^2 \frac{(x - x_2)^3}{3\,!}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\varphi_4(x) = -h^2 \frac{(x-x_0)^3}{3\,!} + 3h^2 \frac{(x-x_1)^3}{3\,!} + 3h^2 \frac{(x-x_2)^3}{3\,!} - 22h^2 \frac{(x-x_3)^3}{3\,!}$$

$$\begin{aligned} \varphi_5(x) = & -h^2 \frac{(x-x_0)^3}{3\,!} + 3h^2 \frac{(x-x_1)^3}{3\,!} + 3h^2 \frac{(x-x_2)^3}{3\,!} - 22h^2 \frac{(x-x_3)^3}{3\,!} + \\ & + 28h^2 \frac{(x-x_4)^3}{3\,!} + 60 \frac{(x-x_4)^5}{5\,!} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \varphi_6(x) = & -h^2 \frac{(x-x_0)^3}{3\,!} + 3h^2 \frac{(x-x_1)^3}{3\,!} + 3h^2 \frac{(x_2-x)^3}{3\,!} - 22h^2 \frac{(x-x_3)^3}{3\,!} + \\ & + 28h^2 \frac{(x-x_4)^3}{3\,!} + 60 \frac{(x-x_4)^5}{5\,!} - 71h^2 \frac{(x-x_5)^3}{3\,!} - 120 \frac{(x-x_5)^5}{5\,!}. \end{aligned}$$

Funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_6(x)$ verifică ecuațiile diferențiale (6) și condițiile la limită (7) din nodurile $x_1, \ldots, x_5$. Se constată că și condițiile din nodul x_6 sînt satisfăcute, astfel că $\varphi_6(x)$ mai este dat și de ecuația

$$\varphi_6(x) = 60 \frac{(x_6 - x)^5}{5\,!}. \tag{10}$$

Formula de integrare numerică (5) este astfel bine stabilită și restul ei este dat de formula (8).

3. Să facem studiul funcției $\varphi(x)$. Observăm întîi că $\varphi_3(x_3) = 0$. De aici rezultă că avînd $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi(x_3) = 0$, $\varphi(x_6) = 0$, derivata $\varphi'(x)$ se anulează cel puțin odată în intervalul (x_0, x_3) și cel puțin odată în intervalul (x_3, x_6). Să arătăm că acestea sînt singurele rădăcini ale lui $\varphi'(x)$.

1°. Dacă ar exista două rădăcini ξ_1, ξ_2 ale lui $\varphi'(x)$ în intervalul (x_0, x_3) atunci din egalitățile $\varphi'(x_0) = 0$, $\varphi'(\xi_1) = 0$, $\varphi'(\xi_2) = 0$ și din continuitatea lui $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_3]$, rezultă că și $\varphi''(x)$ ar trebui să aibă două rădăcini ξ_1', ξ_2' în intervalul (x_0, x_3). Rădăcina ξ_1' nu poate să aparțină intervalului $(x_0, x_1]$, căci ar trebui ca $\varphi_1'''(x)$ să se anuleze într-un punct din intervalul (x_0, x_1) și aceasta este imposibil căci $\varphi_1''' = -h^2$. Rădăcina ξ_1' nu poate să aparțină intervalului $(x_1, x_2]$, căci funcția $\varphi''(x)$ fiind continuă pe intervalul $[x_0, x_2]$ și avînd o derivată continuă $\varphi'''(x)$ pe acest interval, ar trebui ca $\varphi'''(x)$ să se anuleze într-un punct din intervalul (x_0, x_2), ceea ce este imposibil căci $\varphi_1''' = -h^2$, iar $\varphi_2''' = 2h^2$. Deci punctele ξ_1', ξ_2' aparțin intervalului (x_2, x_3). Avînd $\varphi_3''(\xi_1') = 0$, $\varphi_3''(\xi_2') = 0$, ar urma ca $\varphi_3'''(x)$ să se anuleze într-un punct din intervalul (x_2, x_3). Aceasta este însă imposibil căci $\varphi_3''' = 5h^2$. Ajungînd astfel la o contradicție, $\varphi'(x)$ are o singură rădăcină pe intervalul (x_0, x_3).

Deoarece

$$\varphi_3'(x_2) = -\frac{h^4}{2}, \quad \varphi_3'(x_3) = 3h^4,$$

această rădăcină este cuprinsă între x_2 și x_3.

2°. Dacă ar exista două rădăcini ξ_3, ξ_4 ale lui $\varphi'(x)$ pe intervalul (x_3, x_6), raționînd ca mai sus ar trebui să existe două rădăcini ξ_3', ξ_4' ale lui $\varphi''(x)$ pe același interval.

Punctul ξ_4' nu poate să aparțină intervalului $[x_5, x_6)$, căci dacă am avea $\varphi_6''(\xi_4') = 0$, alăturînd și $\varphi_6''(x_6) = 0$, ar urma ca $\varphi_6'''(x)$ să se anuleze într-un punct de pe intervalul (x_5, x_6). Aceasta este imposibil căci $\varphi_6'''(x) = -30(x_6 - x)^2 \neq 0$. Punctul ξ_4' nu poate să aparțină nici intervalului $[x_4, x_5)$, căci $\varphi''(x)$ fiind o funcție continuă pe intervalul $[x_4, x_6]$ și avînd $\varphi''(\xi_4') = 0$, $\varphi''(x_6) = 0$, ar trebui ca $\varphi'''(x)$ să se anuleze într-un punct situat pe intervalul (x_4, x_5), ceea ce este imposibil, deoarece $\varphi_5'''(x) = 7h^2 + 30(x - x_4)^2$, este diferit de zero pe intervalul (x_4, x_5). Atunci rezultă că punctele ξ_3', ξ_4' trebuie să aparțină intervalului (x_3, x_4). Însă nici aceasta nu este posibil, căci avînd $\varphi_4''(\xi_3') = 0$, $\varphi_4''(\xi_4') = 0$, ar trebui ca $\varphi_4'''(x)$ să se anuleze într-un punct situat pe intervalul (x_3, x_4) ceea ce este imposibil căci $\varphi_4'''(x) = -17\,h^2$. Ajungînd astfel la o contradicție, deducem că derivata $\varphi'(x)$ are o singură rădăcină pe intervalul (x_3, x_6). Deoarece avem

$$\varphi_5'(x_4) = \frac{h^4}{2}, \quad \varphi_5'(x_5) = -\frac{5h^4}{2},$$

deducem că $\varphi'(x)$ se anulează într-un singur punct din intervalul (x_4, x_5).

3°. Din considerațiile precedente rezultă că graficul funcției $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_6]$, este cel din fig. 1.

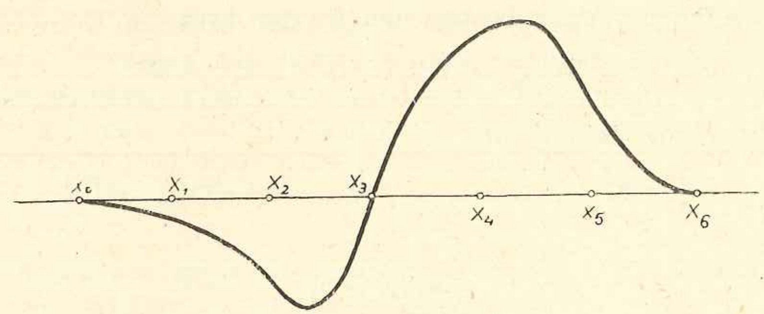

Fig. 1

4. Putem să evaluăm restul dat de formula (8). Vom avea

$$|R| \leqslant \frac{1}{6!} \int_{x_0}^{x_6} |\varphi(x)| \cdot |y^{(6)}(x)|\, dx. \tag{11}$$

Să arătăm întîi cum se evaluează valoarea absolută a derivatei $y^{(6)}(x)$. Derivînd succesiv ambii membrii ai ecuației (1) se obține

$$y^{(6)}(x) = f_0(x, y) + f_1(x, y)y' + f_2(x, y)y'^2 + f_3(x, y)y'^3 + f_4(x, y)y'^4, \tag{12}$$

unde

$$
\begin{aligned}
f_0(x,y) &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} f + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right)\\
f_1(x,y) &= 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + 12\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} f + 6\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x}\\
f_2(x,y) &= 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + 6\frac{\partial f^3}{\partial y^3} f + 5\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial y}\\
f_3(x,y) &= 4\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\\
f_4(x,y) &= \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

În baza ipotezelor făcute, funcţiile $f_0(x, y), \ldots, f_4(x, y)$ sînt continue în domeniul D şi valorile lor absolute au marginile superioare $F_0, \ldots, F_4$ în acest domeniu.

Pe de altă parte, din ecuaţia (1) se deduce că

$$y'(x) = y'_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y(s)]\, ds, \tag{14}$$

de unde rezultă că dacă se notează cu F o margine superioară a valorii absolute a funcţiei $f(x, y)$ în domeniul D, vom avea

$$|y'| \leqslant |y'_0| + F(x - x_0) < |y'_0| + aF. \tag{15}$$

Prin urmare dacă notăm

$$M = F_0 + F_1(|y'_0| + aF) + \ldots + F_4(|y'_0| + aF)^4, \tag{16}$$

vom avea

$$|y^{(6)}(x)| < M. \tag{17}$$

Din inegalitatea (11) se deduce că avem

$$|R| < \frac{M}{60}\int_{x_0}^{x_6} |\varphi(x)|\, dx.$$

Fără greutate se arată că

$$\int_{x_0}^{x_3} \varphi(x) dx = -\frac{30}{4!} h^6, \quad \int_{x_3}^{x_6} \varphi(x)\, dx = \frac{96}{4!} h^6,$$

de unde rezultă că

$$\int_{x_0}^{x_6} |\varphi(x)| dx = \frac{21}{4} h^6$$

şi prin urmare

$$|R| < \frac{7}{80} Mh^6 = 0{,}0875\, Mh^6. \tag{18}$$

Astfel determinarea restului în formula lui Störmer, sub forma (8) ne-a permis să dăm evaluarea restului. Se mai constată că restul este de ordinul lui h^6 şi că factorul numeric din membrul al doilea al evaluării (18) este mic.

Vom da, în alte lucrări, generalizări şi extinderi ale formulei lui Störmer.

ОСТАТОК В ФОРМУЛЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ШТЕРМЕРА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Известна формула численного интегрирования (2), называемая *формулой Штёрмера*, для интегрирования дифференциальных уравнений (1) при условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Эту формулу можно представить и в виде (5). Эта формула имеет цель дать значение $y(x_6)$, когда решение $y(x)$ было предварительно вычислено на узлах $x_1, \ldots, x_5$ находящихся в арифметической прогрессии с шагом $h = x_1 - x_0$ и $x_6 = x_5 + h$.

В настоящем труде мы определили остаток формулы (5), предполагая что функция $f(x, y)$ имеет частные производные по x и y до четвёртого порядка в области D, определяемой неравенствами.

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqslant b,$$

и что решение $y(x)$ определена на интервале $[x_0, x_0 + a]$.

Мы дали остаток R формулой (8) и исследовали функцию $\varphi(x)$ второй части этой формулы; $\varphi(x)$ определяется дифференциальными уравнениями (6) и предельными условиями (7). В рис. 1 даётся график этой функции. Эти результаты дали нам возможность оценить $|R|$ неравенствами (18), показывающими, что остаток R является порядка h^6.

LE RESTE DANS LA FORMULE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE STÖRMER

RÉSUMÉ

On connaît la formule d'intégration numérique (2) dite la *formule de Störmer* pour l'intégration de l'équation différentielle (1), avec les conditions $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. On peut mettre cette formule aussi sous la forme (5). Le but de cette formule est de donner la valeur $y(x_6)$, lorsque la solution $y(x)$ a été calculée au préalable sur les noeuds $x_1, \ldots, x_5$ en progression arithmétique dont la raison est $h = x_1 - x_0$ et $x_6 = x_5 + h$.

Dans ce travail, nous avons déterminé le reste de la formule (5), en supposant que la fonction $f(x, y)$ a des dérivées partielles par rapport à x et à y, jusqu'au quatrième ordre, dans le domaine D, défini par les inégalités

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqslant b,$$

a solution $y(x)$ étant définie sur l'intervalle $[x_0, x_0 + a]$.

Nous avons donné pour le reste R la formule (8) et nous avons étudié la fonction $\varphi(x)$ du second membre de cette formule, qui est déterminée par les équations différentielles (6) et les conditions aux limites (7). Nous avons donné dans la fig. 1 le graphique de cette fonction. Ces résultats nous ont permis d'évaluer $|R|$ par l'inégalité (18), qui montre que le reste R est de l'ordre de h^6.

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu D. V., *Cuadraturi numerice*, Bucureşti, Ed. Tehnică, 1957.
2. Valiron G., *Equations fonctionnelles*, Paris, 1950, p. 321.

Primit la 12. X. 1962