ASUPRA METODEI GENERALIZATE A LUI CEBÎŞEV (II)

DE

BÉLA JANKÓ

(Cluj)

Se consideră ecuaţia funcţională $F(x) = 0$, $F(x)$ fiind o funcţională neliniară definită în domeniul S complet şi convex din spaţiul Banach X. Funcţionala $F(x)$ este continuă şi admite derivate de tip Fréchet pînă la ordinul 3.

Metoda de iteraţie a lui Cebîşev, generalizată pentru rezolvarea ecuaţiilor funcţionale, se prezintă în felul următor [1]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\, y_n}\, y_n - \frac{1}{2}\, \frac{F''(x_n)\, y_n^2}{(F'(x_n)\, y_n)^3}\, F^2(x_n)\, y_n \tag{1}$$

unde $F'(x_n)$, $F''(x_n)$ sînt derivatele Fréchet ale funcţionalei $F(x)$, calculate pentru aproximaţia $x_n \in X$. Aici se presupune că $F(x)$ este de aşa natură încît elementele y_n pot fi alese astfel

(A) $\qquad |F'(x_n)y_n|| = ||F'(x_n)||, \quad ||y_n|| = 1, \qquad (n = 0, 1, \ldots).$

1. În cele ce urmează vom enunţa cîteva teoreme referitoare la existenţa soluţiei $F(x) = 0$, precum şi pentru convergenţa metodei generalizate a lui Cebîşev. În cadrul lucrării [3] s-a stabilit o teoremă în care condiţia 4° este lărgită, iar condiţia 5° diferă şi este mai puţin restrictivă pentru $M > 0{,}375$ — faţă de condiţiile corespunzătoare ale teoremei 1, din lucrarea [2].

În lucrarea amintită [3] am presupus că pentru aproximaţia iniţială x_0 este satisfăcută condiţia

$$\frac{1}{||F'(x_0)||} \leqslant B_0.$$

Este însă interesant de studiat şi cazul cînd această condiţie rămîne satisfăcută pentru orice $x \in S$, deoarece o asemenea situaţie ne oferă posibilităţi pentru slăbirea celorlalte condiţii.

TEOREMA 1. *Dacă următoarele condiții sînt îndeplinite*

1°. $\frac{1}{\| F'(x) \|} \leqslant B$ *pentru orice* $x \in S$,

unde S *este o sferă din spațiul* X, *definită de inegalitatea*

$$\| x - x_0 \| \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) H\eta_0 \quad \text{și} \quad H = \sum_{i=0}^{\infty} (h_0 g_0)^{3^i - 1},$$

apoi pe lîngă aceasta mai este satisfăcută condiția (A) ;

2°. *aproximația* x_0 *satisface inegalitatea*

$$\frac{|F(x_0)|}{\| F'(x_0) \|} = \eta_0 < +\infty ;$$

3°. *există derivatele de tip Fréchet pînă la ordinul 3 și avem*

$$\| F''(x) \| \leqslant M < +\infty, \quad \| F'''(x) \| \leqslant K < +\infty, \quad x \in S ;$$

4°. *are loc inegalitatea*

$$h_0 g_0 < 1, \text{ unde } h_0 = BM\eta_0$$

și

$$g_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} h_0 + \frac{K}{6\,BM^2}\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3 ;$$

atunci ecuația funcțională $F(x) = 0$ *admite o soluție* $x^* \in S$ *către care converg aproximațiile* x_n *date prin formula* (1). *Rapiditatea convergenței se exprimă prin delimitarea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) H\eta_0 (h_0 g_0)^{3^n - 1}. \tag{2}$$

Demonstrație. Pe baza formulei generalizate a lui Newton

$$|F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2} F''(x_0)(x_1 - x_0)^2| \leqslant \frac{1}{6} K \| x_1 - x_0 \|^3$$

ținînd seamă de formula (1) și de notațiile introduse se obține — analog ca în lucrarea [3] — următoarea delimitare

$$\eta_1 = \frac{|F(x_1)|}{\| F'(x_1) \|} \leqslant \frac{BM}{2}\left(1 + \frac{h_0}{4}\right) h_0 \eta_0^2 + \frac{KB}{6}\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3 \eta_0^3,$$

de unde

$$\eta_1 \leqslant h_0^2 g_0^2 \eta_0 .$$

Ținînd apoi seama de $h_1 = BM\eta_1 \leqslant (h_0 g_0)^2 h_0$ și de condiția 4°, se obține $h_1 < h_0$ și $g_1 < g_0$. În cele ce urmează vom nota

$$\eta_n = \frac{|F(x_n)|}{\| F'(x_n) \|}, \quad h_n = BM\eta_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

și

$$g_n^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} h_n + \frac{K}{6BM^2}\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^3 .$$

Se arată la fel ca mai înainte că

$$\eta_2 \leqslant (h_1 g_1)^2 \eta_1$$

și de aici

$$h_2 = BM\eta_2 \leqslant (h_1 g_1)^2 h_1 < (h_0 g_0)^2 h_1 .$$

Astfel $h_2 < h_1$ și $g_2 < g_1$. Prin inducție completă se arată că

$$\eta_n \leqslant (h_{n-1} g_{n-1})^2 \, \eta_{n-1}$$

și că $h_n < h_{n-1}$, $g_n < g_{n-1}$. Tot pe baza inducției complete se stabilesc inegalitățile

$$h_n < \frac{1}{g_0} (h_0 g_0)^{3^n}$$

și

$$\eta_n < (h_0 g_0)^{3^n - 1} \eta_0 . \tag{3}$$

Folosindu-ne acum de relațiile

$$\| \delta_n \| = \| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \left(1 + \frac{h_n}{2}\right) \eta_n < \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) (h_0 g_0)^{3^n - 1} \eta_0 .$$

obținem delimitarea

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \| \delta_n \| + \| \delta_{n+1} \| + \ldots + \| \delta_{n+p-1} \| <$$

$$< \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) (h_0 g_0)^{3^n - 1} \eta_0 \sum_{i=0}^{\infty} (h_0 g_0)^{3^i} = \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) H\eta_0 (h_0 g_0)^{3^n - 1} .$$

De aici, precum și din faptul că X este un spațiu complet, rezultă delimitarea (2) ; apoi inegalitatea

$$\| x_0 - x_n \| \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) H\eta_0$$

arată că $x_n \in S$. Se observă că $|F(x_n)| \to 0$ pentru $n \to \infty$. Acest lucru rezultă imediat din condiția 4°; din formulele (3), (2) și din inegalitatea

$$|F(x_n)| \leqslant \left[\frac{Mh_0}{2}\left(1 + \frac{h_0}{4}\right) + \frac{K}{6}\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3 \eta_n\right] \eta_n^2 .$$

Ținînd seama pe lîngă acestea și de continuitatea funcționalei $F(x)$ se obține $F(x^*) = 0$.

2. În cele ce urmează vom da cîte o aplicație pentru teorema 1, precum și pentru teorema dată în lucrarea [3]. Este interesant de studiat cazul particular cînd X este un spațiu Hilbert, deoarece aici condiția (A) este întotdeauna satisfăcută.

Fie deci X un spațiu Hilbert real. Considerăm ecuația operațională

$$P(x) = 0,$$

unde $P(x)$ este o operație neliniară definită în domeniul S și cu valori în X. Introducem notațiile

$$F(x) = (P(x),\ P(x)) = \| P(x)\|^2 \quad \text{și} \quad Q(x_n) = \bar{P}'(x_n)\, P(x_n),$$

unde $\bar{P}'(x_n)$ este operatorul adjunct al operatorului $P'(x_n)$, iar $P'(x_n)$ este derivata Fréchet a operației $P(x)$ pentru elementul x_n. Astfel avem

$$F'(x_n)\Delta x = 2(Q(x_n),\ \Delta x), \quad F''(x_n)\Delta x^2 = 2(Q'(x_n)\Delta x,\ \Delta x).$$

Dacă pe lîngă aceasta se alege [1]

$$y_n = \frac{Q(x_n)}{\|Q(x_n)\|},$$

atunci condiția (A) este îndeplinită. În adevăr

$$F'(x_n)\, y_n = 2\left(Q(x_n),\ \frac{Q(x_n)}{\|Q(x_n)\|}\right) = 2\,\|Q(x_n)\| = \|F'(x_n)\|.$$

Formula (1) în cazul de față se prezintă astfel

$$x_{n+1} = x - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\|P(x_n)\|}{\|Q(x_n)\|}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}\,\frac{1}{\|Q(x_n)\|^2}\left(\frac{\|P(x_n)\|}{\|Q(x_n)\|}\right)^2 (Q'(x_n)Q(x_n),\ Q(x_n))\right] Q(x_n). \qquad (1')$$

TEOREMA 2. *Dacă avem satisfăcute condițiile*
1°. *pentru operația* $Q(x)$ *avem*

$$\frac{1}{\|Q(x)\|} \leqslant 2B, \quad x \in S,$$

unde domeniul S *este dat de inegalitatea*

$$\|x - x_0\| \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) H\eta_0, \ \textit{iar} \ H = \sum_{i=0}^{\infty} (h_0 g_0)^{3^i - 1};$$

2°. *pentru aproximația inițială* x_0 *avem relația*

$$\eta_0 = \frac{\|P(x_0)\|^2}{2\|Q(x_0)\|} < +\infty;$$

3°. *există derivatele Fréchet de ordinul* 1 *și* 2 *ale operației* $Q(x)$, *precum și delimitările*

$$\|Q'(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\, M < +\infty, \qquad \|Q''(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\, K < +\infty, \quad x \in S;$$

4°. *are loc inegalitatea*

$$h_0 g_0 < 1,$$

unde

$$h_0 = BM\eta_0 \ \text{și} \ g_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} h_0 + \frac{K}{6BM^2}\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3;$$

în aceste condiții ecuația operațională $P(x) = 0$ *admite o soluție* $x^* \in S$ *către care tind aproximațiile* x_n *determinate prin procedeul* (1'), *iar rapiditatea convergenței este dată de delimitarea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) \eta_0 (h_0\, g_0)^{3^n - 1}.$$

În cazul dacă $\|Q(x_n)\|^{-1}$ nu este uniform mărginită, putem enunța următoarea teoremă:

TEOREMA 3. *Dacă pentru aproximația inițială* x_0 *avem îndeplinite condițiile:*
1°. *pentru operația* $Q(x)$ *avem proprietatea*

$$\frac{1}{\|Q(x_0)\|} \leqslant 2B_0;$$

2°. *are loc relația*

$$\eta_0 = \frac{\|P(x_0)\|^2}{2\|Q(x_0)\|} < +\infty;$$

3°. *pentru derivatele Fréchet* $Q'(x)$, $Q''(x)$ *există delimitările*

$$\|Q'(x)\| \leqslant \frac{1}{2} M < +\infty, \qquad \|Q''(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\, K < +\infty, \quad x \in S,$$

S *fiind o sferă din* X *definită de inegalitatea* $\|x - x_0\| \leqslant \frac{\eta_0}{h_0}$;
4°. *au loc condițiile*

$$0 < h_0 = B_0 M \eta_0 \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\frac{3\left(1 + \frac{h_0}{4}\right) + \frac{K}{B_0 M^2}\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3}{\left[1 - h_0\left(1 + \left(\frac{h_0}{2}\right)\right.\right]^2} \leqslant 24;$$

atunci pentru ecuația operațională $P(x) = 0$ *există în sfera* S *o soluție* x^* *spre care converg aproximațiile calculate prin* (1′) *și pe lîngă aceasta avem delimitarea*

$$\| x^* - x_n \| < \frac{1}{h_0}\left[1 - h_0\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)\right]^n (E_0 h_0)^{3^n - 1}\, \eta_0,$$

unde am notat

$$E_0^2 = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{h_0}{4}\right) + \frac{K}{6B_0M^2}\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3}{\left[1 - h_0\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)\right]^2}.$$

ОБ ОБОБЩЕННОМ МЕТОДЕ ЧЕБЫШЕВА (II)

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Настоящий труд является продолжением труда [3]. В случае $\|F'(x)\|^{-1} \leqslant B$ дается теорема существования решения функционального уравнения $F(x) = 0$, а также и сходимости метода (1).

Далее, даются два применения в пространстве Гилберта.

SUR LA MÉTHODE GÉNÉRALISÉE DE TCHÉBYCHEFF (II)

RÉSUMÉ

Le travail est la continuation du travail [3]. Dans le cas $\|F'(x)\|^{-1} \leqslant B$ on établit un théorème pour l'existence de la solution de l'équation fonctionnelle $F(x) = 0$, ainsi que pour la convergence de la méthode (1).

On donne ensuite deux applications dans l'espace de Hilbert.

BIBLIOGRAFIE

1. Altman M., *Concerning approximate solutions of non-linear functional equations.* Bull. de l'Acad. Polon. de Sci., **V**, *5*, 461–465 (1957).
2. — *An iterative method of solving functional equations.* Bull. de l'Acad. Polon. de Sci., **IX**, *2*, 57–62 (1961).
3. Jankó B., *Asupra metodei generalizate a lui Cebîșev (I).* Studii și cercet. de matem. (Cluj), **XIII**, *1*, 83–91 (1962).

Primit la 15. IX. 1962.