ASUPRA METODELOR GENERALE ITERATIVE DE ORDINUL k

DE

BÉLA JANKÓ

(Cluj)

Lucrare prezentată la sesiunea științifică a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R., din 7–9 decembrie 1962.

Fie dată ecuația funcțională $F(x) = 0$, unde $F(x)$ este o funcțională neliniară definită în domeniul S complet și convex din spațiul Banach X Pe lîngă aceasta mai presupunem că $F(x)$ este continuă și admite derivata de tip Fréchet pînă la ordinul k.

Considerăm formula generală de iterație

$$x_{n+1} = x_n - G_n(F(x_n),\ F'(x_u),\ F''(x_n),\ \ldots,\ F^{(k)}(x_n)\ ;\ y_n)\,\frac{F(x_n)}{F'(x_n)\ y_n}\,y_n \tag{1}$$

unde $F'(x_n),\ F''(x_n),\ \ldots,\ F^{(k)}(x_n),\ (k \geqslant 2)$ reprezintă derivatele Fréchet de ordinele $1, 2, \ldots, k$ calculate pentru elementul $x_n \in S \subset X$. În continuare se presupune că funcționala $F(x)$ este de așa natură încît elementele $y_n \in X$ pot fi alese astfel ca să avem satisfăcută condiția [1]

$$|F'(x_n)y| = \|F'(x_n)\|, \qquad \|y_n\| = 1,\ (n = 0, 1, \ldots) \tag{A}$$

Elementul x_0 este aproximația inițială, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sînt calculate succesiv prin procedeul iterativ (1).

Se observă că metodele de iterații cunoscute cum sînt, metoda lui Newton-Altman [1]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\ y_n}\,y_n \tag{2}$$

metoda lui Cebîșev [2, 4]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\ y_n}\,y_n - \frac{1}{2}\,\frac{F''(x_n)\ y_n^2}{(F'(x_n)\ y_n)^3}\,F^2(x_n)\ y_n \tag{3}$$

şi metoda iperbolelor tangente [5, 6]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\,y_n - \dfrac{1}{2}\dfrac{F''(x_n)\,y_n^2}{F'(x_n)\,y_n}F(x_n)}\,y_n \qquad (4)$$

sînt incluse în metoda generală de iteraţie (1). Într-adevăr în aceste cazuri G_n ia pe rînd următoarele forme particulare

$$G_n^{(A)} \equiv 1, \quad G_n^{(C)} \equiv 1 + \frac{1}{2}\frac{F''(x_n)\,y_n^2}{(F'(x_n)\,y_n)^2}F(x_n)$$

şi

$$G_n^{(I)} \equiv \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{F''(x_n)\,y_n^2}{(F'(x_n)\,y_n)^2}F(x_n)}$$

unde A, C, I indică metoda lui Newton-Altman, a lui Cebîşev, respectiv metoda iperbolelor tangente.

În cele ce urmează vom stabili două teoreme referitoare la convergenţa metodei generale (1), precum şi pentru existenţa soluţiei ecuaţiei $F(x) = 0$.

Înainte de a enunţa aceste teoreme considerăm următoarele proprietăţi

$$|F(x_{n+1})| \leqslant B_n^{k-2}\,E(B_n, \eta_n, M_2, \dots, M_k)\left(\frac{|F(x_n)|}{\|F'(x_n)\|}\right)^k, \quad (E \leqslant E_0) \qquad (I)$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant H(B_n, \eta_n, M_2, \dots, M_k)\frac{|F(x_n)|}{\|F'(x_n)\|}, \quad (H \leqslant H_0), \qquad (II)$$

unde

$$\frac{1}{\|F'(x_n)\|} \leqslant B_n; \quad \|F^{(i)}(x)\| \leqslant M_i, \quad (i = 2, 3, \dots, k), \quad x \in S,$$

domeniul S fiind o sferă în X de rază $r = \dfrac{H_0\eta_0}{1 - (h_0E_0)^{k-1}}$ cu centrul în x_0, iar

$$\eta_n = \frac{|F(x_n)|}{\|F'(x_n)\|}.$$

Menţionăm că constantele M_i, η_n, E_0, H_0 sînt finite şi fixate, iar B_n de obicei tinde spre infinit, pentru $n \to \infty$.

DEFINIŢIA. *Spunem că metoda iterativă* (1) *este convergentă de ordinul k, dacă*

1°. $x_n \to x^*$,

adică aproximaţiile x_n *calculate prin formula* (1) *converg spre limita* x^*, *şi*

2°. *au loc proprietăţile* (I,) (II).

Se observă că proprietăţile (I), (II) sînt valabile în particular pentru metodele (2), (3), (4).

a) Într-adevăr, dacă se consideră formula lui Taylor

$$|F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)(x_{n+1} - x_n)| \leqslant \frac{1}{2}M_2\|x_{n+1} - x_n\|^2,$$

atunci avînd în vedere formula (2) se obţine pentru cazul metodei lui Newton-Altman proprietăţile

$$|F(x_{n+1})| \leqslant \frac{1}{2}M_2\left(\frac{|F(x_n)|}{\|F'(x_n)\|}\right)^2, \quad \left(E_0 = \frac{1}{2}M_2\right). \qquad (I_A)$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{|F(x_n)|}{\|F'(x_n)\|}, \quad (H_0 = 1). \qquad (II_A)$$

b) Pentru cazul metodei lui Cebîşev se consideră formula lui Taylor

$$|F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) - \frac{1}{2}F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2| \leqslant \frac{1}{6}M_3\|x_{n+1} - x_n\|^3.$$

Înlocuind diferenţa $x_{n+1} - x_n$ cu expresia corespunzătoare din formula (3), se obţine

$$F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2}F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 = \frac{1}{2}\frac{F^3(x_n)}{(F'(x_n)\,y_n)^4}(F''(x_n)\,y_n^2)^2 + \frac{1}{8}\frac{F^4(x_n)}{(F'(x_n)\,y_n)^6}(F''(x_n)\,y_n^2)^3.$$

Folosind această relaţie, din formula lui Taylor rezultă

$$|F(x_{n+1})| \leqslant B_n\left[\frac{1}{2}M_2^2\left(1 + \frac{h_n}{4}\right) + \frac{M_3}{6B_n}\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^3\right]\eta_n^3, \qquad (I_C)$$

unde ne-am folosit de notaţia $h_n = B_nM_2\eta_n$.

Din formula (3) se obţine imediat

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \left(1 + \frac{h_n}{2}\right)\frac{|F(x_n)|}{\|F'(x_n)\|}. \qquad (II_C)$$

Astfel în acest caz am obţinut

$$E = \frac{1}{2}M_2^2\left(1 + \frac{h_n}{2}\right) + \frac{M_3}{6B_n}\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^3$$

şi

$$H = 1 + \frac{h_n}{2}.$$

Se observă că în cazul dacă h_n descrește monoton atunci funcțiile E și H sînt monoton descrescătoare.

c) Pentru cazul metodei iperbolelor tangente se procedează analog ca mai înainte. Cu ajutorul formulei (4) se stabilește relația

$$F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2}F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{F^3(x_n)\,(F''(x_n)\,y_n^2)^2}{(F'(x_n)\,y_n)^4\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{F''(x_n)\,y_n^2}{(F'(x_n)\,y_n)^2}\,F(x_n)\right]} \tag{6}$$

Din (6), (5) și (4) se obține

$$|F(x_{n+1})| \leqslant B_n\left[\frac{1}{4}\,\frac{M_2^2}{\left(1 - \frac{h_n^2}{2}\right)} + \frac{M_3}{6B_n\left(1 - \frac{h_n}{2}\right)^3}\right]\eta_n^3 \tag{J$_J$}$$

Pe baza formulei (4) avem

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{h_n}{2}}\,\frac{|F(x_n)|}{\| F'(x_n) \|}. \tag{II$_J$}$$

Astfel în cazul de față avem

$$E = \frac{1}{2}\,\frac{M_2^2}{\left(1 - \frac{h_n}{2}\right)^2} + \frac{M_3}{6B_n\left(1 - \frac{h_n}{2}\right)^3},$$

și

$$H = \frac{1}{1 - \frac{h_n}{2}}.$$

Se observă de asemenea că E și H sînt funcții monotone în raport cu h_n.

TEOREMA 1. *Presupunem că pentru aproximația inițială x_0 avem indeplinite următoarele condiții :*

1°. *funcționala $F(x)$ este continuă în S, admite derivata Fréchet $F'(x_0)$ și are loc delimitarea*

$$\frac{1}{\| F'(x_0) \|} \leqslant B_0 < +\infty,$$

apoi pe lîngă aceasta mai este satisfăcută condiția (A) ;

2°. *există în S derivatele de tip Fréchet $F^{(i)}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ și au loc proprietățile* (I) *și* (II) ;

3°. *avem satisfăcute inegalitățile*

$$h_0 H_0 < 1 \quad \text{și} \quad h_0 \mathcal{E}_0 < 1,$$

unde am notat

$$\mathcal{E}_0^{k-1} = \frac{E_0}{M_2^{k-1}(1 - h_0 H_0)^2}.$$

In aceste condiții pentru ecuația $F(x) = 0$ există în sfera $S(x_0, r)$ o soluție x^* la care tind aproximațiile x_n calculate prin procedeul general (1). *Rapiditatea convergenței o caracterizează delimitarea*

$$\| x^* - x_n \| < \frac{H_0 \eta_0}{1 - (h_0 \mathcal{E}_0)^{k^n}}\,(h_0 \mathcal{E}_0)^{k^n - 1}. \tag{*}$$

Demonstrație. Folosindu-ne de inegalitatea [1]

$$\| F'(x_{n+1}) \| \leqslant \| F'(x_{n+1}) \| \left(1 - \frac{\| F'(x_n) - F'(x_{n+1}) \|}{\| F'(x_n) \|}\right)$$

și de formula lui Taylor

$$\| F'(x_n) - F'(x_{n+1}) \| \leqslant M_2 \| x_{n+1} - x_n \|,$$

se obține

$$\| F'(x_{n+1}) \| \geqslant \| F'(x_n) \| (1 - B_n M_2 \| x_{n+1} - x_n \|),$$

de unde

$$\frac{1}{\| F'(x_{n+1}) \|} \leqslant \frac{B_n}{1 - B_n M_2 \| x_{n+1} - x_n \|} \leqslant \frac{B_n}{1 - h_0 H_0} = B_{n+1}. \tag{7}$$

Se observă că $B_{n+1} > B_n$. Din proprietatea (I) și relația (7) se obține

$$\eta_{n+1} = \frac{|F(x_{n+1})|}{\| F'(x_{n+1}) \|} \leqslant \frac{B_n^{k-1}}{1 - h_n H_0}\,E_0\,\eta_n^k = \frac{h_n^{k-1} E_0}{M_2^{k-1}(1 - h_n H_0)}\,\eta_n,$$

sau astfel

$$\eta_{n+1} \leqslant \mathcal{H}_n (h_n \mathcal{E}_n)^{k-1} \eta_n, \tag{8}$$

unde s-au introdus notațiile

$$\mathcal{H}_n = 1 - h_n H_0 \quad \text{și} \quad \mathcal{E}_n^{k-1} = \frac{E_0}{M_2^{k-1}(1 - h_n H_0)^2}.$$

Folosindu-ne de relația (9) și de notația introdusă

$$h_n = B_n M_2 \eta_n,$$

se stabileşte prin inducţie completă inegalitatea

$$h_n < \frac{1}{\mathcal{E}_0}(h_0\mathcal{E}_0)^{k^n}, \tag{9}$$

unde

$$\mathcal{E}_0 > \mathcal{E}_1 > \ldots > \mathcal{E}_n \quad \text{şi} \quad h_0 > h_1 > \ldots > h_n$$

pentru orice n. Din (8) şi (9) tot prin inducţie completă se obţine delimitarea

$$\eta_n < (h_0\mathcal{E}_0)^{k^n-1}\eta_0. \tag{10}$$

Pe baza proprietăţii (II) şi relaţiei (10) rezultă

$$\| x_{n+p} - x_n \| < H_0\eta_0[(h_0\mathcal{E}_0)^{k^n-1} + (h_0\mathcal{E}_0)^{k^{n+1}-1} + \ldots + (h_0\mathcal{E}_0)^{k^{n+p-1}-1}] <$$

$$< \frac{H_0\eta_0}{1-(h_0\mathcal{E}_0)^{k^n}}(h_0\mathcal{E}_0)^{k^n-1}. \tag{11}$$

Spaţiul X fiind complet, din (11) rezultă că există limita

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Trecînd la limită în (11) pentru $p\to\infty$, se ajunge la delimitarea (*) din teoremă, valabilă pentru $n \geqslant 1$. Rămîne să mai arătăm că aproximaţiile x_n nu ies din sfera $S(x_0, r)$. Într-adevăr

$$\| x_0 - x_n \| < H_0\eta_0[1 + (h_0\mathcal{E}_0)^{k-1} + (h_0\mathcal{E}_0)^{k^2-1} + \ldots + (h_0\mathcal{E}_0)^{k^{n-1}-1}] <$$

$$< \frac{H_0\eta_0}{1-(h_0\mathcal{E}_0)^{k-1}}. \tag{11'}$$

Pe lîngă aceasta mai trebuie arătat că limita x^* satisface într-adevăr ecuaţia $F(x) = 0$. Din (9), (10) şi (I) rezultă pentru $n\to\infty$ că $|F(x_n)| \to 0$ şi fiindcă $x_n \to x^*$ pe baza continuităţii funcţionalei $F(x)$, obţinem că $F(x^*) = 0$.

Se observă că în loc de sfera S definită de

$$\| x - x_0 \| < \frac{H_0\eta_0}{1-(h_0\mathcal{E}_0)^{k-1}}$$

putem considera sfera $\mathcal{S} \subset S$ definită de inegalitatea

$$\| x - x_0 \| < \mathcal{K} H_0\eta_0,$$

unde

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^{\infty}(h_0\mathcal{E}_0)^{k^i-1}.$$

Acest fapt rezultă imediat din delimitările (11').

În teorema 1 am presupus că pentru aproximaţia iniţială x_0 este satisfăcută condiţia

$$\frac{1}{\| F'(x_0) \|} \leqslant B_0.$$

Este însă interesant de studiat şi cazul cînd această relaţie este satisfăcută pentru orice $x \in S$; deoarece o asemenea situaţie ne oferă posibilităţi pentru slăbirea celorlalte condiţii.

TEOREMĂ 2. *Dacă următoarele condiţii sînt îndeplinite*

1°. $\dfrac{1}{\| F'(x) \|} \leqslant B$ *pentru orice* $x \in S$, *unde* S *este o sferă din spaţiul* X, *definită de inegalitatea*

$$\| x - x_0 \| < KH_0\eta_0, \quad \textit{unde} \quad K = \sum_{i=0}^{\infty}(h_0\bar{E}_0)^{k^i-1},$$

apoi pe lîngă aceasta mai avem satisfăcută condiţia (A);

2°. *derivatele Fréchet* $F^{(i)}(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *există în* S *şi au loc proprietăţile* (I), (II);

3°. *este satisfăcută inegalitatea*

$$h_0\bar{E}_0 < 1,$$

unde s-au notat

$$h_0 = BM_2\eta_0, \quad \bar{E}_0^{k-1} = \frac{E_0}{M_2^{k-1}};$$

atunci ecuaţia $F(x) = 0$ *admite o soluţie* $x^* \in S$ *la care converg aproximaţiile* x_n. *Rapiditatea convergenţei este exprimată de delimitarea*

$$\| x^* - x_n \| < \frac{H_0\eta_0}{1-(h_0\bar{E}_0)^{k^n}}(h_0\bar{E}_0)^{k^n-1}, \tag{**}$$

Demonstraţie. Pe baza proprietăţii (I) şi a condiţiei 1° din teoremă, se obţine

$$\eta_{n+1} = \frac{|F(x_{n+1})|}{\| F'(x_{n+1}) \|} \leqslant \frac{h_n^{k-1}}{M_2^{k-1}} E_0\eta_0 = (h_n\bar{E}_0)^{k-1}\eta_n, \tag{12}$$

unde s-a notat $h_n = BM_2\eta_n$. Folosindu-ne de aceste relaţii se obţine

$$h_{n+1} \leqslant (h_n\bar{E}_0)^{k-1}h_n,$$

iar prin inducție completă se stabilește delimitarea

$$h_n < \frac{1}{\bar{E}_0} (h_0 \bar{E}_0)^{k^n}, \tag{13}$$

unde

$$h_0 > h_1 > \ldots > h_n$$

pentru orice n. Din (12) și (13) tot prin inducție completă rezultă

$$\eta_{n+1} < (h_0\bar{E}_0)^{k^n-1}\eta_0. \tag{14}$$

În baza proprietății (II) și relației (14), se ajunge la delimitările

$$\| x_{n+p} - x_n \| < H_0\eta_0[(h_0\bar{E}_0)^{k^n-1} + (h_0\bar{E}_0)^{k^{n+1}-1} + \ldots + (h_0\bar{E}_0)^{k^{n+p-1}-1}] <$$

$$< \frac{H_0\eta_0}{1 - h_0\bar{E}_0)^{k^n}} (h_0\bar{E}_0)^{k^n-1}.$$

De aici și din faptul că X este complet, rezultă delimitarea (**). Arătăm acum că aproximațiile x_n aparțin sferei S pentru orice n. Într-adevăr

$$\| x_0 - x_n \| < H_0\eta_0[1 + (h_0\bar{E}_0)^{k-1} + \ldots + (h_0\bar{E}_0)^{k^{n-1}-1}] <$$

$$< H_0\eta_0 \sum_{i=0}^{\infty} (h_0\bar{E}_0)^{k^i-1} = KH_0\eta_0.$$

Cu aceasta am demonstrat complet teorema 2.

Observație. Teoremele stabilite în cadrul acestei lucrări constituie generalizări ale teoremelor referitoare la metoda lui Newton-Altman [1], la metoda lui Cebîșev [2, 4] precum și la metoda iperbolelor tangente [5, 6].

ОБ ОБЩИХ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДАХ ПОРЯДКА k

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается уравнение $F(x) = 0$, причём $F(x)$ нелинейный функционал, определённый в полной и выпуклой области S в пространстве Банаха X. Функционал $F(x)$ непрерывен и допускает производные типа Фреше до порядка k включительно, где $k \geq 2$.

В труде изучаются условия сходимости общего метода итерации (1), а также условия существования решения уравнения $F(x) = 0$. В этом смысле установлены две теоремы, обобщающие результаты касающихся методов (2), (3) и (4).

SUR LES MÉTHODES GÉNÉRALES ITÉRATIVES D'ORDRE k

RÉSUMÉ

On considère l'équation $F(x) = 0$, $F(x)$ étant une fonctionnelle non-linéaire définie dans le domaine S complet et convexe de l'espace de Banach X. La fonctionnelle $F(x)$ est continue et admet des dérivées du type Fréchet jusqu'à l'ordre k y compris, où $k \geqslant 2$.

On étudie les conditions de convergence de la méthode d'itération générale (1), ainsi que les conditions d'existence de la solution de l'équation $F(x) = 0$. On établit deux théorèmes qui généralisent les résultats relatifs aux méthodes (2), (3) et (4).

BIBLIOGRAFIE

1. Altman M., *Concerning approximate solutions of non-linear functional equations*. Bull. de l'Acad. Polon. de Sci., **V**, *5*, 461–465 (1957).
2. — *An iterative method of solving functional equations*. Bull. de l'Acad. Polon. de Sci., **IX**, *2*, 57–62 (1961).
3. — *Iterative methods of higher order*. Bull. de l'Acad. Polon. de Sci., **IX**, 2, 63–68 (1961).
4. Jankó B., *Asupra metodei generalizate a lui Cebîșev (I)*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), **XIII**, *1*, 87–91 (1962).
5. — *Despre o nouă generalizare a metodei iperbolelor tangente pentru rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare definite în spații Banach*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), **XI**, *2*, 307–317 (1960).
6. — *Asupra metodei generalizate a iperbolelor tangente*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), **XIII**, *2*, 301–308 (1962).

Primit la 3. XII. 1962