ASUPRA UNEI PROBLEME EXTREMALE RELATIV LA FUNCŢIILE UNIVALENTE

DE

PETRU T. MOCANU

(Cluj)

Comunicare prezentată la Colocviul de teoria funcţiilor şi analiză funcţională din 21–27 septembrie 1962, Bucureşti.

1. Fie S clasa funcţiilor

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

olomorfe şi univalente în discul unitate, $|z| < 1$.

Într-o notă anterioară [2] ne-am ocupat de următoarea problemă extremală relativ la clasa S : dîndu-se o funcţie $g(z)$ meromorfă în discul unitate, să se determine valorile extreme ale modulelor rădăcinilor ecuaţiei

$$f(z) = g(z), \tag{1}$$

cînd funcţia $f(z)$ variază în clasa S. Rezultatul obţinut era următorul : dacă $z = re^{i\theta}$ este o rădăcină a ecuaţiei (1) al cărei modul are o valoare extremă (cînd f descrie clasa S), atunci r şi θ verifică sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} \frac{1-r^2}{r}\,|g(re^{i\theta})|\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\mathcal{R}(q)} &= 1 \\ \arg g(re^{i\theta}) - \theta + \mathcal{J}(q)\ln\frac{1+r}{1-r} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

unde

$$q = \pm\frac{1-\Omega}{|1-\Omega|}, \quad \Omega = \frac{re^{i\theta}g'(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})}\,.$$

2. În nota de față vom modifica problema de mai sus în felul următor. Fie a un punct fix din discul unitate (pentru simplificare vom presupune $0 < a < 1$) și $g(z)$ o funcție meromorfă în întreg planul cu condiția $g(0) = 0$. Ne punem problema de a găsi valorile extreme ale modulelor rădăcinilor ecuației

$$g(z) = f(a), \tag{3}$$

cînd funcția f descrie clasa S.

Deoarece $g(0) = 0$, $f(a) \neq 0$, iar clasa S este compactă rezultă că va exista un minim pozitiv al modulelor rădăcinilor ecuației (3). Dacă punctul $z = \infty$ este un zero sau un pol pentru $g(z)$, atunci va exista, cu siguranță, și o valoare maximă a acestor module. Dacă $z = \infty$ este un punct singular esențial pentru $g(z)$, atunci evident că nu va exista un maxim finit.

3. Fie r minimul modulelor rădăcinilor ecuației (3) și fie $f(z)$ acea funcție din clasa S pentru care acest minim este atins (astfel de funcție există deoarece S este un spațiu compact). Dacă z_0, $|z_0| = r$, este rădăcina ecuației (3), care are modulul minim, atunci avem

$$g(z_0) = f(a)$$
$$z_0 = re^{i\theta}, \quad \theta \text{ real}.$$

Vom considera o variație a funcției extremale $f(z)$, dată de formula lui Schiffer-Goluzin (a se consulta lucrarea [1]) :

$$f^*(z) = f(z) + \lambda A(z ; \zeta ; \psi) + O(\lambda^2)$$
$$|\zeta| < 1, \quad \lambda > 0, \quad \psi \text{ real},$$

unde

$$A(z ; \zeta ; \psi) = e^{i\psi} \frac{f^2(z)}{f(z) - f(\zeta)} - e^{i\psi} f(z) \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right]^2 - e^{-i\psi} \frac{zf'(z)}{z - \zeta} \cdot \zeta \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right]^2 +$$
$$+ e^{-i\psi} \frac{z^2 f'(z)}{1 - \bar{\zeta} z} \cdot \bar{\zeta} \overline{\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right]}^2. \tag{4}$$

Se știe că pentru λ suficient de mic, funcția $f(z)$ aparține clasei S. Înlocuind în ecuația (3) pe f cu f^*, această ecuație devine

$$g(z) = f(a) + \lambda A(a ; \zeta ; \psi) + O(\lambda^2). \tag{5}$$

Această ecuație va avea, pentru λ suficient de mic, o rădăcină z_0^*, care va fi o variație a rădăcinii z_0 a ecuației (3) :

$$z_0^* = z_0 + \lambda h + O(\lambda^2), \qquad h = \left.\frac{\partial z_0^*}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0}$$

Pentru a-l obține pe h, vom înlocui în ecuația (5) pe z cu z_0^*, vom deriva identitatea obținută în raport cu λ și-l vom face pe $\lambda = 0$. Se obține imediat

$$h = \frac{A}{g'(z_0)},$$

unde am notat

$$A = A(a ; \zeta ; \psi)$$

Deoarece funcția f este extremală, rezultă că

$$|z_0^*| \geqq |z_0| = r.$$

Dar

$$|z_0^*|^2 = z_0^* \bar{z}_0^* = |z_0|^2 + 2\lambda \mathcal{R}(\bar{z}_0 h) + O(\lambda^2).$$

Deci trebuie să fie satisfăcută inegalitatea

$$\mathcal{R}(\bar{z}_0 h) \geqq 0, \quad \text{sau} \quad \mathcal{R}\left(\frac{h}{z_0}\right) \geqq 0.$$

Pentru comoditate, vom introduce notațiile

$$g(z_0) = f(a) = f$$
$$z_0 g'(z_0) = \omega$$
$$f'(a) = l$$
$$w = f(\zeta).$$

Ținînd seamă de aceste notații și de expresia lui h, inegalitatea de mai sus se scrie

$$\mathcal{R}\left(\frac{A}{\omega}\right) \geqq 0$$

Înlocuind pe A cu expresia sa dată de (4), obținem condiția :

$$\mathcal{R}\left\{e^{i\psi}\left[\frac{f^2}{\omega(f - \omega)} - \frac{f}{\omega}\left(\frac{w}{\zeta w'}\right)^2 - \frac{al\zeta}{\omega(a - \zeta)}\left(\frac{w}{\zeta w'}\right)^2 + \frac{a^2\bar{l}\zeta}{\bar{\omega}(1 - a\zeta)}\left(\frac{w}{\zeta w'}\right)^2\right]\right\} \geqq 0.$$

Din cauza arbitrarității lui ψ, trebuie ca paranteza dreaptă să fie nulă. Rezultă că funcția extremală $w = f(\zeta)$ trebuie să verifice ecuația diferențială

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{f^2}{f - w} = \frac{a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2}{\bar{\omega}(a - \zeta)(1 - a\zeta)},$$

unde

$$a_0 = \bar{\omega} a f$$
$$a_1 = \bar{\omega}[al - (1 + a^2) f] - \omega a^3 \bar{l}$$
$$a_2 = \bar{\omega} a f + \omega a^2 f.$$

4. Se poate arăta, ca și în [1], că funcția extremală $w = f(\zeta)$ transformă discul unitate în întreg planul tăiat de-a lungul unui număr finit de arce analitice. Fie k, $|k| = 1$, un punct de pe cercul unitate care se transformă în extremitatea unei tăieturi. Evident că în acel punct trebuie ca $w' = 0$. Deci trinomul

$$a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2$$

trebuie să admită rădăcina dublă $\zeta = k$.

Ecuația diferențială (6) va primi forma

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{f^2}{f - w} = C\,\frac{(1 - \bar{k}\zeta)^2}{(a - \zeta)(1 - a\zeta)}$$

Făcînd $\zeta \to 0$, se deduce $C = af$. Împărțind ambii membri cu $a - \zeta$ și făcînd $\zeta \to a$, se obține relația

$$(1 - \bar{k}a)^2 = \frac{al}{f}(1 - a^2).$$

Pe de altă parte, condiția ca trinomul $a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2$ să admită rădăcină dublă se poate scrie sub forma

$$\{\bar{\omega}[(1 - a^2)f + al] - \omega a^3\bar{l}\}^2 = 4\bar{\omega}^2 afl(1 - a^2).$$

Înlocuind aici pe l cu expresia sa dată de (7) se obține relația

$$\left\{\bar{\omega}f\left[1 - a^2 + \frac{(1 - a\bar{k})^2}{1 - a^2}\right] - \omega\bar{f}a^2\,\frac{(1 - ak)^2}{1 - a^2}\right\}^2 = 4\bar{\omega}^2 f^2(1 - a\bar{k})^2$$

de unde se deduce ușor

$$k^2 = \frac{f\bar{\omega}}{\bar{f}\omega}.$$

Notînd

$$\Omega = \frac{\omega}{f} = \frac{z_0 g'(z_0)}{g(z_0)}$$

se obține

$$k = \pm\frac{\bar{\Omega}}{|\Omega|}.$$

5. Ecuația diferențială (6) se scrie, în definitiv, sub forma

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{f}{f - w} = \frac{a(1 - \bar{k}\zeta)^2}{(a - \zeta)(1 - a\zeta)},$$

unde k este dat de formula (8), sau separînd variabilele,

$$\frac{\sqrt{f}\,dw}{w\sqrt{f - w}} = \frac{\sqrt{a}\,(1 - \bar{k}\zeta)\,d\zeta}{\zeta\sqrt{H(\zeta)}},$$

unde

$$H(\zeta) = (a - \zeta)(1 - a\zeta).$$

Integrînd, avem

$$\sqrt{f}\int_f^w \frac{dw}{w\sqrt{f - w}} = \sqrt{a}\int_{z_0}^{\zeta} \frac{1 - \bar{k}\zeta}{\zeta\sqrt{H(\zeta)}}\,d\zeta,$$

de unde obținem că *funcția extremală este dată sub formă implicită de ecuația*

$$\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{f} - \sqrt{f - w}}{\sqrt{f} + \sqrt{f - w}} = \mathrm{Ln}\frac{(1 - a^2)\zeta}{2\sqrt{aH(\zeta)} + 2a - (1 + a^2)\zeta} - \bar{k}\,\mathrm{Ln}\frac{1 + a^2 - 2a\zeta - 2\sqrt{aH(\zeta)}}{1 - a^2} \tag{9}$$

Rezolvînd această ecuație în raport cu w, se obține

$$w = 4f\frac{\Phi(\zeta)}{[1 + \Phi(\zeta)]^2},$$

unde

$$\Phi(\zeta) = \frac{(1 - a^2)^{\bar{k}+1}\zeta}{\left[2\sqrt{aH(\zeta)} + 2a - (1 + a^2)\zeta\right]\left[1 + a^2 - 2a\zeta - 2\sqrt{aH(\zeta)}\right]^{\bar{k}}}.$$

Avem

$$w' = 4f\frac{[1 - \Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{[1 + \Phi(\zeta)]^3}.$$

Ținînd seamă că $f = f(a) = g(z_0) = g(re^{i\theta})$, condiția $w'(0) = 1$ ne conduce la relația

$$\frac{g(re^{i\theta})}{a}\left(\frac{1 + a}{1 - a}\right)^{\bar{k}}(1 - a^2) = 1,$$

sau

$$\frac{1 - a^2}{a}|g(re^{i\theta})|\,\exp\left[\mathcal{R}(k)\ln\frac{1 + a}{1 - a}\right]\exp\left\{i\left[\arg g(re^{i\theta}) - \mathcal{I}(k)\ln\frac{1 + a}{1 - a}\right]\right\} = 1$$

Deducem în definitiv următoarea

TEOREMĂ. *Dacă $z_0 = re^{i\theta}$ este o rădăcină a ecuației*

$$g(z) = f(a),\ 0 < a < 1,$$

al cărei modul are o valoare extremă (*cînd funcția f descrie clasa S*), *atunci r și θ verifică sistemul de ecuații*

$$\left.\begin{aligned} \frac{1-a^2}{a}\,|g(re^{i\theta})|\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{\mathcal{R}(k)} &= 1 \\ \arg g(re^{i\theta}) - \mathcal{J}(k)\,\ln\frac{1+a}{1-a} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

unde

$$\overline{k} = \pm\frac{\Omega}{|\Omega|}, \qquad \Omega = \frac{re^{i\theta}g'(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})}.$$

Funcția extremală este dată sub formă implicită de ecuația (9).

6. Dacă $g(z) = z$, atunci $\Omega = 1$, $k = \pm 1$ și din sistemul (10) se deduc cele două valori extreme pentru $|z| = |f(a)|$, anume se regăsește delimitatea bine cunoscută

$$\frac{a}{(1+a)^2} \leqslant |f(a)| \leqslant \frac{a}{(1-a)^2}.$$

În general, notînd $z = h(w)$ inversa funcției $w = g(z)$, sistemul (10) ne permite să delimităm modulul lui $h[f(a)]$ atunci cînd f parcurge clasa S.

Universitatea „Babeș-Bolyai" Cluj,
Catedra de teoria funcțiilor

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ, КАСАЮЩЕЙСЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть S класс функций $w = f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$ голоморфных и однолистных на диске-единице $|z| < 1$. Пусть $g(z)$ мероморфная функция на всей плоскости. При помощи вариационного метода доказывается следующая теорема:

Если $z_0 = re^{i\theta}$ является корнем уравнения $g(z) = f(a)$, $0 < a < 1$, модуль которого имеет экстремальное значение (когда f пробегает класс S), *то r и θ удовлетворяют системе уравнений* (10). *Экстремальная функция даётся в неявном виде уравнением* (9).

SUR UN PROBLÈME EXTRÉMAL RELATIF AUX FONCTION SUNIVALENTES

RÉSUMÉ

Soit S la classe des fonctions $w = f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$ holomorphes et univalentes dans le disque unité $|z| < 1$. On considère une fonction $g(z)$ méromorphe dans le plan entier. A l'aide de la méthode variationnelle on démontre le théorème suivant :

Si $z_0 = re^{i\theta}$ este une racine de l'équation $g(z) = f(a)$, $0 < a < 1$, dont le module a une valeur extrême (quand f parcourt la classe S), *alors r et θ vérifient le système d'équations* (10). *La fonction extrémale est donnée sous forme implicite par l'équation* (9).

BIBLIOGRAFIE

1. Голузин Г. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменого.* Москва—Ленинград, 1952.
2. Mocanu P. T., *O problemă extremală în clasa funcțiilor univalente.* Studii și cercet. de matem. (Cluj), XI, *1*, 99—106 (1960).

Primit la 15. X. 1962