POLINOM INTERPOLATOR DE TIP $(0, n, 2n, \ldots, kn)$ ŞI GENERALIZAREA LUI PENTRU ASPECTUL GENERAL AL INTERPOLĂRII CU LACUNE

DE

A. B. NÉMETH

(Cluj)

Cercetările în domeniul interpolării cu lacune — problemă formulată de G. D. B i r k h o f f [3] — au luat în ultimul timp o deosebită amploare. După lucrarea lui G. P ó l y a [5], care a cuprins numai studiul cazurilor particulare, cînd numărul nodurilor $n=2$, prima lucrare în acest domeniu a fost publicată de P. S u r á n y i şi P. T u r á n [8], care au studiat problema existenţei şi unicităţii polinomului de grad cel mult $2n$—1, cu proprietatea ca polinomul şi derivata sa de ordinul doi să ia valori prescrise în n puncte distincte, numite nodurile interpolării. Acest gen de interpolare a fost denumit de ei interpolare de tip (0, 2).

Autorii s-au ocupat cu cercetarea existenţei şi unicităţii unui astfel de polinom, cînd nodurile interpolării sînt rădăcinile polinomului lui Legendre şi rădăcinile polinoamelor ultrasferice. J. B a l á z s şi P. T u r á n au reprezentat explicit [1] şi au demonstrat teoremă de convergenţă [2] pentru polinoamele interpolatoare (0, 2) luate pe primele din aceste noduri.

Cercetări în acest domeniu au fost efectuate de R. B. S a x e n a şi A. S h a r m a [6], care au studiat existenţa unicitatea şi reprezentarea explicită a polinoamelor interpolatoare de tip (0, 1, 3) pe rădăcinile polinomului Legendre. R. B. S a x e n a [7] studiază interpolarea de tip (0, 1, 2, 4) pe aceleaşi noduri.

K. K. M a t h u r şi A. S h a r m a [4] studiază problema existenţei şi unicităţii a polinoamelor interpolatoare de tip (0, 2) şi (0, 1, 3) pe rădăcinile polinomului lui Hermite. A. K. V a r m a studiază existenţa şi unicitatea polinomului interpolator de tip (0, 1, 3) pe rădăcinile polinomului lui Cebîşev, în lucrarea [9].

Un aspect intersant al problemelor de interpolare cu lacune este că ele — după cum reiese şi din cazurile particulare studiate în lucrările înşirate mai sus — nu au soluţie pentru orice sistem de noduri distincte (zicem că problema de interpolare are soluție, dacă se verifică exitența și unicitatea polinomului interpolator cu proprietățile cerute).

Din acest punct de vedere, cazul studiat de noi constituie un caz special. Bazîndu-ne pe faptul că problema existenței și unicității polinomului interpolator revine la nesingularitatea unei matrici, am studiat o formă de interpolare unde matricea atașată este foarte simplă. Această simplitate a matricei ne dă posibilitatea de a conclude nesingularitatea ei pentru orice sistem de noduri distincte, și totodată ne sugerează ideea unei tratări mai generale decît cele făcute în articolele citate.

1. Teorema I. *Pentru orice sistem de puncte reale*

$$-\infty < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_2 < x_1 < \infty \tag{1}$$

și orice sisteme de valori

$$\{y_i^{(0)}\}_1^n, \ \{y_i^{(1)}\}_1^n, \ldots, \ \{y_i^{(k)}\}_1^n, \tag{2}$$

se poate determina în mod unic un polinom $P(x)$ de grad cel mult $(k+1)n-1$, care să satisfacă la următoarele condiții

$$\begin{aligned} P(x_i) &= y_i^{(0)}, \\ P^{(n)}(x_i) &= y_i^{(1)}, \qquad i = s, \ldots, n. \\ &\ldots\ldots \\ P^{(kn)}(x_i) &= y_i^{(k)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Demonstrație. Considerăm polinomul $P(x)$ de grad $(k+1)n-1$ cu coeficienți nedeterminați,

$$P(x) = a_{(k+1)n-1}\, x^{(k+1)n-1} + a_{(k+1)n-2}\, x^{(k+1)n-2} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{4}$$

Scriind condițiile (3) în formă explicită pentru polinomul (4), obținem un sistem de $(k+1)\ n$ ecuații liniare în cele $(k+1)n$ coeficienți ai polinomului (4). Dezvoltînd repetat determinantul principal al sistemului obținut după ultimile n linii (sau ultimele n coloane), conform regulii lui Laplace, găsim că aceasta este egal cu

$$D = C\, V^{k+1} \tag{5}$$

unde C este o constantă diferită de zero, iar V determinantul lui Vandermonde format din punctele din (1). Pe baza condiției (1) acest determinant V este diferit de zero, ceea ce demonstrează teorema I.

2. Introducem următorul simbol

$$\overset{(p)}{\int} f(x)\, dx,$$

prin care înțelegem integrarea consecutivă de p ori a funcției $f(x)$, constanta obținută la integrare luîndu-se de fiecare dată egală cu zero.

Trecînd la reprezentarea explicită a polinomului $P(x)$, căutăm mai întîi să reprezentăm explicit polinomul $\Lambda_{l,\,i}\,(x)$ care să satisfacă la condițiile

$$\Lambda_{l,\,i}^{(jn)}\,(x_h) = \delta_j^l\, \delta_i^h, \tag{6}$$

unde l și i sînt pentru moment fixați.

Îl vom căuta pe $\Lambda_{l,\,i}\,(x)$ sub următoarea formă

$$\Lambda_{l,\,i}\,(x) = \overset{(ln)}{\int} l_i\,(x) dx + \sum_{t=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{n} c_j^t \overset{(tn)}{\int} l_j\,(x) dx, \tag{7}$$

unde $l_i\,(x)$ este al i-lea polinom fundamental al lui Lagrange pe sistemul (1). Avem în mod evident

$$\Lambda_{l,\,i}^{(ln)}\,(x_h) = \delta_i^h.$$

Coeficienții c_j^t $(t = 0, \ldots, l-1\,;\ j = 1, \ldots, n)$ se determină pe baza condițiilor (6). Derivăm expresia (7) de $n(l-1)$ ori. Obținem

$$\Lambda_{l,\,i}^{(\overline{l-1}n)}\,(x) = \overset{(n)}{\int} l_i\,(x) dx + \sum_{j=1}^{n} c_j^{l-1} l_j(x).$$

Din condiția

$$\Lambda_{l,\,i}^{(\overline{l-1}n)}\,(x_h) = 0, \qquad h = 1, \ldots, n,$$

obținem

$$\overset{(n)}{\int} l_i(x) dx\ \Big|_{x=x_h} + c_h^{l-1} = 0 \qquad h = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Din relația (8), c_h^{l-1} se poate determina.

În general, din condiția

$$\Lambda_{l,\,i}^{(pn)}\,(x_h) = 0, \quad h = 1, \ldots, n, \quad p < l,$$

scriind-o pentru expresia (7), obținem

$$\begin{aligned} &\overset{(\overline{l-p}n)}{\int} l_i\,(x) dx\,\Big|_{x=x_h} + \sum_{j=1}^{n} c_j^{l-1} \overset{(\overline{l-p-1}n)}{\int} l_j\,(x)\, dx\,\Big|_{x=x_h} + \ldots + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} c_j^{p+1} \overset{(n)}{\int} l_j\,(x) dx\,\Big|_{x=x_h} + c_h^p = 0, \qquad h = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{9}$$

Pe baza expresiei (9) coeficienții din (7) se pot determina recursiv, derivînd de $(l-1)n$, $(l-2)n$, $\ldots$, n ori. Reprezentarea explicită condensată a polinomului $P(x)$ va fi

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{i=1}^{n} y_i^{(l)}\ \Lambda_{l,\,i}\,(x). \tag{10}$$

3. Problema generală de interpolare cu lacune se formulează în felul următor :

Se caută polinomul $P(x)$ de grad cel mult m, care satisface la condițiile

$$\begin{aligned} P^{(k_0)}({}_0x_i) &= y_i^{(0)}, \qquad i = 1, \ldots, a_0, \\ P^{(k_1)}({}_1x_i) &= y_i^{(1)}, \qquad i = 1, \ldots, a_1, \\ &\ldots\ldots \\ P^{(k_n)}({}_nx_i) &= y_i^{(n)}, \qquad i = 1, \ldots, a_n, \end{aligned} \tag{11}$$

unde gradul polinomului, $m = a_0 + a_1 + \ldots + a_n - 1$. Dacă pentru orice sistem de valori $\{y_i^{(0)}\}_1^{a_0}, \ldots, \{y_i^{(n)}\}_1^{a_n}$ se poate determina în mod unic polinomul $P(x)$, care să satisfacă la condițiile (11), atunci zicem că problema de interpolare are soluție. Acest mod de interpolare, îl vom numi prescurtat interpolare de tip $[(k_0)_{a_0}, (k_1)_{a_1}, \ldots, (k_n)_{a_n}]$, unde (k_i) reprezintă ordinul derivării, iar a_i numărul punctelor pe care derivata de ordin k_i trebuie să ia valori date. Putem presupune $k_0 < k_1 < \ldots < k_n$. Este evident că pentru ca problema de interpolare de tip $[(k_0)_{a_0}, (k_1)_{a_1}, \ldots, (k_n)_{a_n}]$ să aibă soluție este necesar ca să avem $k_0 = 0$.

4. O generalizare imediată a problemei tratate la punctul 1 și 2 din punctul de vedere al interpolării formulate la punctul 3, este cazul interpolării

$$[(0)_{p_0}, (p_0)_{p_1}, (p_0 + p_1)_{p_2}, \ldots, (p_0 + \ldots + p_{n-1})_{p_n}].$$

Demonstrăm următoarea teoremă

TEOREMA II. *Pentru orice sisteme de puncte de tip* (1)

$$\{{}_0x_i\}_1^{p_0}, \{{}_1x_i\}_1^{p_1}, \ldots, \{{}_nx_i\}_1^{p_n},$$

și orice sisteme de valori

$$\{y_i^{(0)}\}_1^{p_0}, \{y_i^{(1)}\}_1^{p_1}, \ldots, \{y_i^{(n)}\}_1^{p_n},$$

există un polinom $P(x)$ *unic, de grad cel mult* $m = P_0 + p_1 + \ldots + p_n - 1$ *care satisface la condițiile* :

$$\begin{aligned} P({}_0x_i) &= y_i^{(0)}, \quad i = 1, \ldots, p_0, \\ P^{(p_0)}({}_1x_i) &= y_i^{(1)}, \quad i = 1, \ldots, p_1, \\ P^{(p_0+p_1)}({}_2x_i) &= y_i^{(2)}, \quad i = 1, \ldots, p_2, \\ &\ldots\ldots \\ P^{(p_0+p_1+\ldots+p_{n-1})}({}_nx_i) &= y_i^{(n)}, \quad i = 1, \ldots, p_n. \end{aligned} \tag{12}$$

Demonstrație. Scriem polinomul $P(x)$ de grad m cu coeficienți nedeterminați

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{13}$$

Scriind condițiile (12) pentru acest polinom, obținem un sistem de $m+1$ ecuații cu $m+1$ necunoscute. La fiecare derivare numărul termenilor din (13) scade cu unu. După $p_0 + \ldots + p_{n-1}$ derivări consecutive din (13) dispar ultimii $p_0 + \ldots + p_{n-1}$ termeni, rămînînd numai primii p_n termeni. Aceasta înseamnă că în ultimele p_n rînduri din determinatul principal al sistemului obținut, numai primele p_n elemente pot diferi de zero. Dezvoltînd cu regula lui Laplace după ultimele p_n linii, găsim că determinantul principal este egal cu produsul de doi determinanți, dintre care unul pe bază de raționalmente similare cu cele de mai sus se poate dezvolta mai departe. Obținem pînă la urmă că determinantul principal al sistemului este

$$D = K \cdot V_1 \cdot V_2 \ldots V_n,$$

unde V_j este determinantul Vandermonde pe sistemul de puncte $\{{}_jx_i\}_{i=1}^{p_j}$, iar K este o constantă diferită de zero. Pe baza presupunerii făcute, anume că sistemele de puncte $\{{}_jx_i\}_{i=1}^{p_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ sînt sisteme de tip (1), urmează că V_j $(j = 1, \ldots, n)$ și totodată D este diferit de zero, ceea ce demonstrează teorema.

5. Reprezentarea explicită a polinomului $P(x)$, a cărui existență și unicitate s-a demonstrat la punctul 4, se face reprezentînd prima dată polinoamele $\Lambda_{l,i}(x)$, care satisfac la condițiile

$$\Lambda_{l,i}^{(p_0+\ldots+p_{j-1})}({}_jx_h) = \delta_j^l \, \delta_i^h. \tag{14}$$

Căutăm polinomul $\Lambda_{l,i}(x)$ sub următoarea formă

$$\Lambda_{l,i}(x) = \int^{(p_0+p_1+\ldots+p_{l-1})} l_{i,l}(x)dx + \sum_{t=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{p_t} c_j^t \int^{(p_0+p_1+\ldots+p_{t-1})} l_{i,l}(x)dx, \tag{15}$$

unde $l_{i,l}(x)$ este al i-lea polinom fundamental al lui Lagrange pe punctele $\{{}_lx_j\}_{j=1}^{p_l}$. Avem în mod evident

$$\Lambda_{l,i}^{(p_0+p_1+\ldots+p_{l-1})}({}_lx_h) = l_{i,l}({}_lx_h) = \delta_h^i.$$

Determinarea constantelor c_j^t $(t = 0, \ldots, l-1;\ j = 1, \ldots, p_t)$ se face pe baza condițiilor (14), succesiv, derivînd expresia (15) de $p_0 + p_1 + \ldots + p_{l-2}$ ori, substituind punctele ${}_{l-1}x_h$ $(h = 1, \ldots, p_{l-1})$, derivînd apoi de $p_0 + p_1 + \ldots + p_{l-3}$ ori, substituind punctele ${}_{l-2}x_h$ $(h = 1, \ldots, p_{l-2})$ și așa mai departe.

Forma condensată a polinomului $P(x)$ va fi în acest caz

$$P(x) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{i=1}^{p_l} y_i^{(l)} \Lambda_{l,i}(x). \tag{16}$$

6. Dacă în cazul interpolării studiate la punctele 4 şi 5 avem $p_0 = p_1 = \ldots = p_n = 1$, atunci această interpolare devine interpolare de tip Abel-Gonciarov, iar polinomul (16), polinom interpolator de tip Abel-Gonciarov.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ ТИПА $(0, n, 2n, \ldots, kn)$ И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ ОБЩЕГО ВИДА ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ПРОБЕЛАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде доказывается что для любой системы узлов

$$-\infty < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_2 < x_1 < \infty$$

и для любых значений

$$\{y_i^{(0)}\}_1^n, \{y_i^{(1)}\}_1^n, \ldots, \{y_i^{(k)}\}_1^n,$$

можно определить полином $P(x)$ степени не более $(k+1)n-1$, таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} P(x_i) &= y_i^{(0)}, \\ P^{(n)}(x_i) &= y_i^{(1)}, \qquad i = 1, \ldots, n. \\ &\ldots\ldots \\ P^{(kn)}(x_i) &= y_i^{(k)}, \end{aligned}$$

Даётся явное выражение этого полинома.

Показывается, что для любых систем узлов типа (1) $\{{}_0x_i\}_1^{p_0}$, $\{{}_1x_i\}_1^{p_1}, \ldots, \{{}_nx_i\}_1^{p_n}$ и для любых систем значений $\{y_i^{(0)}\}_1^{p_0}, \{y_i^{(1)}\}_1^{p_1}, \ldots, \{y_i^{(k)}\}_1^{p_n}$, существует единственный полином $P(x)$, степени не более $m = p_0 + p_1 + \ldots + p_n - 1$, который удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} P({}_0x_i) &= y_i^{(0)}, & i &= 1, \ldots, p_0, \\ P^{(p_0)}({}_1x_i) &= y_i^{(1)}, & i &= 1, \ldots, p_1, \\ P^{(p_0+p_1)}({}_2x_i) &= y_i^{(2)}, & i &= 1, \ldots, p_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P^{(p_0+p_1+\ldots+p_{n-1})}({}_nx_i) &= y_i^{(n)}, & i &= 1, \ldots, p_n. \end{aligned}$$

Даётся явное выражение полинома $P(x)$.

UN POLYNOME INTERPOLATEUR DU TYPE $(0, n, 2n, \ldots, kn)$ ET SA GÉNÉRALISATION POUR L'ASPECT GÉNÉRAL DE L'INTERPOLATION À LACUNES

RÉSUMÉ

Dans ce travail on démontre que pour n'importe quel système de noeuds

$$-\infty < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_2 < x_1 < \infty \tag{1}$$

et n'importe quels systèmes de valeurs $\{y_i^{(0)}\}_1^n, \{y_i^{(1)}\}_1^n, \ldots, \{y_i^{(k)}\}_1^n$, on peut déterminer un polynome $P(x)$ de degré $(k+1)n-1$ au plus, tel que

$$\begin{aligned} P(x_i) &= y_i^{(0)}, \\ P^{(n)}(x_i) &= y_i^{(1)}, \qquad i = 1, \ldots, n. \\ &\ldots\ldots \\ P^{(kn)}(x_i) &= y_i^{(k)}, \end{aligned}$$

On donne la représentation explicite de ce polynome.

On montre que pour tout système de noeuds du type (1) $\{{}_0x_i\}_1^{p_0}$, $\{{}_1x_i\}_1^{p_1}, \ldots, \{{}_nx_i\}_1^{p_n}$ et pour tout système de valeurs $\{y_i^{(0)}\}_1^{p_0}, \{y_i^{(1)}\}_1^{p_1}, \ldots, \{y_i^{(n)}\}_1^{p_n}$ existe un polynome $P(x)$ unique, de degré $m = p_0 + p_1 + \ldots + p_n - 1$ au plus, qui satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} P({}_0x_i) &= y_i^{(0)}, & i &= 1, \ldots, p_0, \\ P^{(p_0)}({}_1x_i) &= y_i^{(1)}, & i &= 1, \ldots, p_1, \\ P^{(p_0+p_1)}({}_2x_i) &= y_i^{(2)}, & i &= 1, \ldots, p_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P^{(p_0+p_1+\ldots+p_{n-1})}({}_nx_i) &= y_i^{(n)}, & i &= 1, \ldots, p_n. \end{aligned}$$

On donne la représentation explicite du polynome $P(x)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Balázs I., Turán P., *Notes on interpolation. II.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 201–215 (1957).
2. — *Notes on interpolation. III.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **9**, 195 – 214 (1958).
3. Birkhoff G. D., *General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentation and quadrature.* Trans. Amer. Math. Soc., **7**, 107–136 (1906)

4. M a t h u r K. K., S h a r m a A., *Some interpolatory properties of Hermite polynomials* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **12**, 193–208 (1961).
5. P ó l y a G., *Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung.* Ztschr. für angew. Math. und Mech., **11**, 445–449 (1931).
6. S a x e n a R. B., S h a r m a A., *On some interpolatory properties of Legendre polynomials. I.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **9**, 345–358 (1959).
7. S a x e n a R. B., *On some interpolatory properties of Legendre and ultraspherical polynomials. II.* Изв. на Мат. Инст. Бълг. Ак. на Наук, **5**, *1* (1961).
8. S u r á n y i J., T u r á n P., *Notes on interpolation. I.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **6**, 67–80 (1955).
9. V a r m a A. K., *Some interpolatory properties of Tchebicheff polynomials* (0, 1, 3) *case.* Duke Math J., **28**, 449–462 (1961).

Primit la 1. VII. 1962.