INTERPOLARE CU LACUNE PE NODURI DISTINCTE

DE

A. B. NÉMETH

(Cluj)

Lucrare prezentată la sesiunea științifică din 7—9 decembrie 1962 a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R.

1. Problema de interpolare cu lacune este cea mai generală problemă a interpolării polinomiale, formulată pentru prima oară de G. Birckhoff [3]. Ea conține ca și caz particular, toate tipurile de interpolare studiate pînă acum. Formulăm problema de interpolare cu lacune în felul următor:

Se caută polinomul $P(x)$ de grad cel mult $n-1$, care să satisfacă următoarele condiții:

$$
\begin{array}{lll}
P^{(k_0)}(x_i^0) = y_i^0, & i = 1, \ldots, a_0, & \\
P^{(k_1)}(x_i^1) = y_i^1, & i = 1, \ldots, a_1, & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \qquad (*) \\
P^{(k_m)}(x_i^m) = y_i^m, & i = 1, \ldots, a_m, &
\end{array}
$$

unde y_i^j sînt valori date, $a_0 + a_1 + \ldots + a_m = n$, iar k_j sînt numere naturale reprezentînd derivata de un anumit ordin. Spunem că problema de interpolare are soluție, dacă se poate determina în mod unic polinomul interpolator $P(x)$, care să satisfacă condițiile înșirate mai sus. Interpolarea se poate caracteriza prin perechile (k_i, a_i) $i = 0, \ldots, m$. În cazul perechilor fixate vorbim de interpolare lacunară de un anumit tip.

Ca prime lucrări relative la interpolare lacunară, putem aminti lucrarea lui G. Pólya [6] publicată în 1931, care studiază problema pentru două noduri de interpolare, și ciclul de lucrări [8], [1] și [2] publicate de J. Balázs, J. Surányi și P. Turán, începînd cu anul 1955. Lucrările [4], [7], [9] reprezintă contribuția unui grup de matematicieni indieni pe acest tărîm. Toate aceste lucrări (exceptînd lucrarea lui Pólya) tratează problema interpolării lacunare pentru cazul cînd nodurile interpolării sînt rădăcinile unor polinoame ortogonale, pentru un anumit tip de interpolare lacunară.

Dintre problemele ce se pot pune în legătură cu interpolarea lacunară este studiul accestui tip de interpolare pentru noduri oarecare. În această problematică se poate încadra problema interpolării de tip Abel-Gonciarov. Extinderea acestui tip de interpolare pentru aspectul general al interpolării lacunare a fost dată în lucrarea [5].

Nota de față tratează problema interpolării lacunare făcînd restricția ca toate nodurile de interpolare să fie distincte. Se consideră numai cazul cînd pentru unele noduri se cere valoarea polinomului, iar pentru altele valoarea derivatei de ordinul întîi al polinomului.

2. Presupunem că sistemul de n noduri distincte este dat și că are loc următoarea ordonare a nodurilor

$$-\infty < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_2 < x_1 < +\infty. \tag{1}$$

Vom numi ponderea punctului x_k în sistemul (11) următoarea sumă

$$p_k = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}.$$

Înșirăm următoarele afirmații simple în legătură cu ponderea unui punct într-un sistem de tip (1) :

1°. În orice sistem de tip (1) ($n \geqq 2$) există puncte de pondere pozitivă și negativ.

2°. Pentru orice $n \geqq 3$ există sistem de tip (1) cu puncte de pondere zero.

3°. Pentru orice n există sistem de tip (1) fără puncte de pondere zero.

4°. Toate punctele de pondere zero într-un sistem de noduri vor deveni puncte de pondere diferită de zero în orice sistem obținut prin adăugare a unui nou nod la sistemul vechi, sau într-un sistem obținut prin neglijarea unui punct al sistemului vechi.

5°. Pentru orice $n \geqq 2$ există sistem de tip (1) cu un singur punct de pondere negativă iar toate celelalte puncte de pondere pozitivă și invers.

3. Dacă scriem condițiile (*) pentru un polinom $P(x)$ de grad n—1 cu coeficienți nedeterminați, atunci problema interpolării revine la rezolvarea unui sistem de ecuații lineare în coeficienții polinomului $P(x)$. Rezolvabilitatea problemei de interpolare este echivalentă cu nesingularitatea matricei atașate sistemului (*).

Ca prim pas studiem rezolvabilitatea probemei de interpolare formulată în următorul fel :

Să se determine polinomul $P(x)$ de grad cel mult n—1, care să satisfacă la condițiile

$$\begin{aligned} P(x_i) &= y_i, \qquad 1 \leqq i \leqq n,\ i \neq k,\\ P'(x_k) &= y'. \end{aligned} \tag{2}$$

Dacă pentru sistemmul (1) această problemă de interpolare are soluție, zicem că sistemul (1) este de tip k_i.

Propoziția 1. *Sistemul de noduri* (1) *este de tip k_i atunci și numai atunci cînd $p_k \neq 0$.*

Demonstrația propoziției este evidentă. Este suficient să observăm că determinantul atașat sistemului (2) este de forma

$$V_{k_1} = V \cdot p_k,$$

unde V este determinantul lui Vandermonde pe sistemul (1).

În lumina acestei propoziții afirmațiilor 1°—5° din punctul precedent li se pot da interpretări corespunzătoare.

Încercăm acum să reprezentăm explicit polinomul $P(x)$ de grad cel mult n—1, care satisface condițiile (2). În cazul cînd $p_k \neq 0$ existența și unicitatea acestui polinom pentru sistemul dat de puncte este demonstrată. Vom căuta polinomul $P(x)$ sub forma

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i(x) + y' \mu(x)$$

unde $\lambda_i(x)$ și $\mu(x)$ sînt polinoame de grad cel mult n—1, care satisfac la condițiile

$$\begin{aligned} \lambda_i(x_j) &= 0, \qquad 1 \leqq j \leqq n, \qquad j \neq i, k,\\ \lambda_i(x_i) &= 1,\\ \lambda'(x_k) &= 0\,;\\ \mu(x_j) &= 0, \qquad 1 \leqq j \leqq n, \qquad j \neq k,\\ \mu'(x_k) &= 1. \end{aligned}$$

Definim funcția $p_{ki}(x)$ în felul următor

$$p_{ki}(x) = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k,i}}^{n} \frac{1}{x_k - x_l} + \frac{1}{x_k - x}.$$

Este evident că $p_{ki}(x_i) = p_k$.

Vom demonstra că are loc reprezentarea explicită

$$\lambda_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\,\omega'(x_i)} \cdot \frac{p_{ki}(x)}{p_k}, \text{ unde } \omega(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Primele două condiții impuse polinomului $\lambda_i(x)$ se verifică în mod evident Să arătăm acum că

$$\lambda_i'(x_k) = 0.$$

Să derivăm expresia lui $\lambda_i(x)$:

$$\lambda_i'(x) = \frac{(\omega'(x)\, p_{ki}(x) + \omega(x)\, p_{ki}(x))\,(x - x_i) - \omega(x)\, p_{ki}(x)}{(x - x_i)^2 \omega'(x_j)\, p}.$$

Folosind identitatea

$$\omega'(x) = \omega(x) \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{x - x_l}$$

şi faptul că

$$p'_{ki}(x) = \frac{1}{(x - x_k)^2},$$

vom face următoarea transformare identică

$$(\omega'(x)\, p_{ki}(x) + \omega(x)\, p'_{ki}(x))\,(x - x_i) - \omega(x)\, p_{ki}(x) =$$

$$= \omega(x) \left\{ \left[\left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k,\, i}}^{n} \frac{1}{x - x_l} + \frac{1}{x - x_k} + \frac{1}{x - x_i} \right) \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k,\, i}}^{n} \frac{1}{x_k - x_l} + \frac{1}{x_k - x} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{(x_k - x)^2} \right] (x - x_i) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k,\, i}}^{n} \frac{1}{x_k - x_l} - \frac{1}{x_k - x} \right\} =$$

$$= \frac{\omega(x)(x - x_i)}{x - x_k} \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k,\, i}}^{n} \frac{1}{x_k - x_l} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k,\, i}}^{n} \frac{1}{x - x_l} \right) +$$

$$+ \omega(x) \left[(x - x_i) \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k,\, i}}^{n} \frac{1}{x_k - x_l} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k,\, i}}^{n} \frac{1}{x - x_l} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k,\, i}}^{n} \frac{1}{x_k - x_l} \right]$$

şi din această ultimă expresie urmează imediat că

$$\lambda'_i(x) = 0.$$

Pentru polinomul $\mu(x)$ avem reprezentarea explicită

$$\mu(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k) p_k}.$$

Avem în mod evident

$$\mu(x_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad j \neq k.$$

Vom arăta că

$$\mu'(x_k) = 1.$$

Definim funcţia $p_{kk}(x)$ în felul următor :

$$p_{kk}(x) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_l}.$$

Observăm că

$$\left(\frac{\omega(x)}{x - x_k} \right)' = \frac{\omega(x)}{x - x_k}\, p_{kk}(x).$$

Să derivăm expresia lui $\mu(x)$. Găsim

$$\mu'(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \cdot \frac{p_{kk}(x)}{p_k},$$

de unde

$$\mu'(x_k) = 1.$$

Cu aceasta reprezentarea explicită este demonstrată.

4. Considerăm problema de interpolare cu lacune formulată în următorul fel :

Să se determine polinomul $P(x)$ de gradul cel mult n—1, care să satisfacă următoarele condiţii :

$$\begin{aligned} P(x_i) &= y_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad i \neq k, l, \\ P'(x_i) &= y'_i, \quad i = l, k. \end{aligned} \tag{3}$$

Interpolarea de această natură o vom numi interpolare $k_1 l_1$. Dacă pentru un sistem dat de noduri problema de interpolare este nerezolvabilă, atunci zicem că sistemul de noduri este de tip $k_1 l_1$. Următoarea propoziţie pune în evidenţă relaţia dintre interpolarea k_1 şi l_1 pe de o parte şi interpolarea $k_1 l_1$ pe de altă parte.

Propoziţia 2. *Orice sistem de n puncte distincte care nu este de tip k_1 sau nu este de tip l_1 este de tip $k_1 l_1$ şi invers, dacă sistemul dat nu este de tip $k_1 l_1$ atunci este de tip k_1 şi de tip l_1.*

Pentru demonstrarea acestei propoziţii este suficient de a observa că determinantul ataşat sistemului (3) este de forma

$$V_{k_1 l_1} = V\left(p_k\, p_l + \frac{1}{(x_k - x_l)^2} \right), \tag{4}$$

unde V este determinantul Vandermonde, pe sistemul dat de noduri şi cum sistemul este format din puncte distincte, $V \neq 0$. Din formula (4) se vede că $V_{k_1 l_1}$ şi p_k sau $V_{k_1 l_1}$ şi p_l nu pot fi simultan egale cu zero, fapt care demonstrează propoziţia.

Considerăm acum următoarea problemă de interpolare :

Se caută polinomul $P(x)$ de grad cel mult n—1, care satisface următoarele condiţii :

$$\begin{aligned} P(x_i) &= y_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad i \neq k, \\ P''(x_k) &= y''. \end{aligned} \tag{5}$$

Interpolarea de această formă se numeşte interpolare k_2. Dacă pentru sistemul dat de noduri problema de interpolare are soluţie, atunci sistemul dat de noduri se numeşte sistem k_2. Se enunţă următoarea propoziţie :

PROPOZIŢIA 3. *Orice sistem de n puncte distincte, care nu este sistem tip k_1, este sistem tip k_2 şi invers, dacă nu este sistem k_2 este sistem tip k_1.*

Pentru demonstraţie observăm că determinantul ataşat problemei (5) se poate reprezenta sub forma

$$V_{k_2} = V\Bigg(p_k^2 - \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \frac{1}{(x_k - x_l)^2}\Bigg).$$

Din această reprezentare se vede că V_{k_2} şi p_k nu pot fi simultan egale cu zero, fapt care demonstrează propoziţia.

5. Cu ajutorul noţiunii de pondere a unui punct într-un sistem de noduri distincte se pot da condiţii suficiente pentru rezolvabilitatea unor probleme de interpolare lacunară date.

PROPOZIŢIA 4. *Dacă ponderile punctelor diferite $x_{k^1}, \ldots, x_{k^p}$* al sistemului (1) sînt

a) *toate nenegative,* (nepozitive) *atunci* (1) *este sistem de tip $k_1^{i_1} \ldots k_1^{i_{2r}}$, $1 \leqq i_j \leqq p$, $i_j \neq i_l$, dacă $l \neq j$.*

b) *toate nenegative* (nepozitive) *şi cel puţin una pozitivă* (negativă) *atunci* (1) *este sistem de tip $k_1^{i_1} \ldots k_1^{l} \ldots k_1^{i_q}$, unde $1 \leqq i_j \leqq p$, şi x_{k^l} este punctul cu pondere pozitivă* (negativă).

Pentru demonstrarea acestei propoziţii considerăm determinantul V funcţie de n variabile, variabilele satisfăcînd o constrîngere de ordonare de tipul (1). Vom nota variabilele la fel cu punctele sistemului de noduri (1). Ori de cîte ori vrem să tragem o concluzie relativ la un sistem de noduri fixate considerăm variabilele $x_1, \ldots, x_n$ numere fixate şi anume nodurile sistemului. Pe baza acestei observaţii putem scrie

$$V_{k1} = \frac{\partial V}{\partial x_k} = V \frac{\partial \ln V}{\partial x_k},$$

ştiind că $V = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$. La fel găsim

$$V_{k_1 l_1} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial V}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial \ln V}{\partial x_k} + V \frac{\partial^2 \ln V}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Demonstrăm întîi punctul a) al propoziţiei pentru pondere nenegative. Observăm că în condiţiile punctului a) avem

$$\frac{\partial V}{\partial x_{k^{i_1}}} \geqq 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_{k^{i_1}} \partial x_{k^{i_2}}} > 0$$

oricare ar fi k^{i_1} şi k^{i_2} dintre $k^1, \ldots, k^p$. Presupunem acum că pentru orice mulţime de indici $k^{i_1}, \ldots, k^{i_{2r-3}}$ şi $k^{i_1}, \ldots, k^{i_{2r-2}}$ din mulţimea $k^1, \ldots, k^p$ avem*)

$$\frac{\partial^{2r-3} V}{\partial x_{k^{i_1}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-3}}}} \geqq 0, \quad \frac{\partial^{2r-2} V}{\partial x_{k^{i_1}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-2}}}} > 0.$$

Pentru a doua dintre aceste derivate avem expresia

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2r-2} V}{\partial x_{k^{i_1}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-2}}}} &= \frac{\partial^{2r-3} V}{\partial x_{k^{i_2}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-2}}}} \cdot \frac{\partial \ln V}{\partial x_{k^{i_1}}} + \frac{\partial^{2r-4} V}{\partial x_{k^{i_2}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-3}}}} \cdot \frac{\partial^2 \ln V}{\partial x_{k^{i_1}} \partial x_{k^{i_{2r-2}}}} + \\ &+ \ldots + \frac{\partial^{2r-4} V}{\partial x_{k^{i_3}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-2}}}} \cdot \frac{\partial^2 \ln V}{\partial x_{k^{i_1}} \partial x_{k^{i_2}}}.\end{aligned} \tag{6}$$

Derivînd această expresie încă odată în raport cu $x_{k^{i_{2r-1}}}$, găsim

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2r-1} V}{\partial x_{k^{i_1}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-1}}}} &= \frac{\partial^{2r-2} V}{\partial x_{k^{i_2}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-1}}}} \cdot \frac{\partial \ln V}{\partial x_{k^{i_1}}} + \frac{\partial^{2r-3} V}{\partial x_{k^{i_2}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-2}}}} \cdot \frac{\partial^2 \ln V}{\partial x_{k^{i_1}} \partial x_{k^{i_{2r-2}}}} + \\ &+ \ldots + \frac{\partial^{2r-3} V}{\partial x_{k^{i_3}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-2}}}} \cdot \frac{\partial^2 \ln V}{\partial x_{k^{i_1}} \partial x_{k^{i_2}}}.\end{aligned} \tag{7}$$

Această expresie este negativă pe baza presupunerii de inducţie. Să observăm încă odată în raport cu $x_{k^{i_{2r}}}$; obţinem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2r} V}{\partial x_{k^{i_1}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r}}}} &= \frac{\partial^{2r-1} V}{\partial x_{k^{i_2}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r}}}} \cdot \frac{\partial \ln V}{\partial x_{k^{i_1}}} + \frac{\partial^{2r-2} V}{\partial x_{k^{i_2}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r-1}}}} \cdot \frac{\partial^2 \ln V}{\partial x_{k^{i_1}} \partial x_{k^{i_{2r}}}} + \\ &+ \ldots + \frac{\partial^{2r-2} V}{\partial x_{k^{i_3}} \ldots \partial x_{k^{i_{2r}}}} \cdot \frac{\partial^2 \ln V}{\partial x_{k^{i_1}} \partial x_{k^{i_2}}}.\end{aligned} \tag{8}$$

În această formulă primul termen din partea dreaptă este negativ pe baza condiţiei propoziţiei şi a rezultatului (7), termenii următori sînt pozitivi pe baza presupunerii de inducţie. Pentru cazul ponderelor nepozitive derivabilele parţiale mixte de ordin impar al lui V vor fi nepozitive şi demonstraţia se face în mod analog. Observăm că implicit s-a făcut şi demonstraţia expresiilor de forma (7) şi (8).

Trecem acum la demonstrarea punctelor *b*) pe care o facem pentru pondere nenegative şi cel puţin o pondere pozitivă. Putem presupune că q este impar; pentru q par demonstraţia este conţinută în demonstraţia punctului a). Să presupunem că punctul $x_{k^{i_1}}$ este cel cu pondere pozitivă.

*) Pentru a evita complicarea notaţiilor, indicii k care în enunţul propoziţiei 4 sînt fixaţi, se consideră aici şi variabile.

Avem :

$$\frac{\partial^q V}{\partial x_{k^{i_1}} \ldots \partial x_{k^{i_q}}} = \frac{\partial^{q-1} V}{\partial x_{k^{i_2}} \ldots \partial x_{k^{i_q}}} \cdot \frac{\partial \ln V}{\partial x_{k^{i_1}}} + \frac{\partial^{q-2} V}{\partial x_{k^{i_2}} \ldots \partial x_{k^{i_{q-1}}}} \cdot \frac{\partial^2 \ln V}{\partial x_{k^{i_1}} \partial x_{k^{i_q}}} + \tag{9}$$

$$+ \ldots + \frac{\partial^{2q-2} V}{\partial x_{k^{i_3}} \ldots \partial x_{k^{i_{2q}}}} \cdot \frac{\partial^2 \ln V}{\partial x_{k^{i_1}} \partial x_{k^{i_2}}} .$$

Deoarece q este impar, pe baza punctului a) și a presupunerii de mai sus urmează că primul termen din partea dreaptă a formulei (9) este pozitiv. Ceilalți termeni din sumă sînt nenegativi pe baza punctului a) și cu aceasta punctul b) al propoziției este demonstrat.

6. Considerăm acum problema de interpolare $k_1^1, \ldots, k_1^p$ și presupunem că sistemul (1) este de acest tip. Vom da reprezentarea explicită a polinomului interpolator $P(x)$ căutîndu-l sub forma

$$P(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k^r \ (r=1, \ldots, p)}}^{n} y_i \, \lambda_i(x) + \sum_{r=1}^{p} y'_r \, \mu_r(x),$$

unde $\lambda_i(x)$ și $\mu_r(x)$ sînt polinoame de grad cel mult $n-1$, care satisfac la condițiile

$$\begin{aligned} \lambda_i(x_j) &= 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad j \neq i, \quad j \neq k^r \quad (r = 1, \ldots, p), \\ \lambda_i(x_i) &= 1 \\ \lambda_i'(x_{k^r}) &= 0, \quad r = 1, \ldots, p ; \\ \mu_r(x_j) &= 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad j \neq k^r, \quad (r = 1, \ldots, p), \\ \mu_r'(x_{k^s}) &= 0, \quad 1 \leq s \leq p, \quad s \neq r, \\ \mu_r'(x_{k^r}) &= 1. \end{aligned}$$

Din forma funcției V urmează imediat că are loc reprezentarea explicită

$$\lambda_i(x) = \frac{\left. \dfrac{\partial^p V}{\partial x_{k^1} \ldots \partial x_{k^p}} \right|_{x_i = x}}{\dfrac{\partial^p V}{\partial x_{k^1} \ldots \partial x_{k^p}}}$$

$$\mu_r(x) = \frac{\left. \dfrac{\partial^{p-1} V}{\partial x_{k^1} \ldots \partial x_{k^{r-1}} \partial x_{k^{r+1}} \ldots \partial x_{k^p}} \right|_{x_{k^r} = x}}{\dfrac{\partial^p V}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k^p}}}$$

Dăm următoarea reprezentare a cărei demonstrație se poate face prin inducție

$$\frac{\partial^p V}{\partial x_{k^1} \ldots \partial x_{k^p}} = V(p_{k^1} \ldots p_{k^p} + \sum p_{k^1} \ldots p_{k^{p-2}} \, q_{k^{p-1} k^p} + \ldots +$$

$$+ \sum p_{k^1} \, q_{k^2 k^3} \ldots q_{k^{p-1} k^p}) = V \, \varphi_{k^1 \ldots k^p} (x_1, \ldots, x_n),$$

pentru p impar și

$$\frac{\partial^p V}{\partial x_{k^1} \ldots \partial x_{k^p}} = V(p_{k^1} \ldots p_{k^p} + \sum p_{k^1} \ldots p_{k^{p-2}} \, q_{k^{p-1} k^p} + \ldots +$$

$$+ \sum q_{k^1 k^2} \ldots q_{k^{p-1} k^p}) = V \, \varphi_{k^1 \ldots k^p}(x_1, \ldots, x_n)$$

pentru p par, unde $q_{ij} = \dfrac{1}{(x_i - x_j)^2}$, iar sumele reprezintă suma tuturor produselor de forma dată, pentru orice permutare a indicilor $k^1, \ldots, k^p$, fiecare termen figurînd o singură dată. Produsul de sub semnul sumei reprezintă primul termen din această sumă.

Folosind reprezentările de mai sus, obținem simplificări considerabile în reprezentarea explicită a polinoamelor fundamentale $\lambda_i(x)$ și $\mu_r(x)$. Vom avea pentru ele

$$\lambda_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} \cdot \frac{\varphi_{k^1 \ldots k^p} (x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots x_n)}{\varphi_{k^1 \ldots k^p} (x_1, \ldots, x_n)}$$

$$\mu_r(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_{k^r})\omega'(x_{k^r})} \cdot \frac{\varphi_{k^1 \ldots k^{r-1} k^{r+1} \ldots k^p} (x_1, \ldots, x_{k^r - 1}, x, x_{k^r + 1}, \ldots, x_n)}{\varphi_{k^1 \ldots k^p} (x_1, \ldots, x_n)} .$$

Pentru cazul interpolării $k_1 \, l_1$ de exemplu, avem reprezentările explicite :

$$\lambda_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} \cdot \frac{p_{ki}(x) \, p_{li}(x) + \dfrac{1}{(x_k - x_l)^2}}{p_k \, p_l + \dfrac{1}{(x_k - x_l)^2}} \qquad 1 \leq i \leq n, \ i \neq k, \ l,$$

$$\mu_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \cdot \frac{p_{lk}(x)}{p_k \, p_l + \dfrac{1}{(x_k - x_l)^2}} ,$$

$$\mu_l(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_l)\omega'(x_l)} \cdot \frac{p_{kl}(x)}{p_k \, p_l + \dfrac{1}{(x_k - x_l)^2}} .$$

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С ПРОБЕЛАМИ НА РАЗЛИЧНЫХ УЗЛАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается задача интерполяции с пробелами на системе различных узлов, сформулированная следующим образом:

Определить полином $P(x)$ степени не больше $n-1$, удовлетворяющий условиям:

$$P(x_i) = y_i, \quad 1 \leqq i \leqq n, \quad i \neq k^r \quad (r = 1, \ldots, p),$$
$$P'(x_{k^r}) = y'_{k^r}, \quad r = 1, \ldots, p;$$

если для системы различных узлов $x_1, \ldots, x_n$ задача интерполяции имеет единственное решение, то система узлов называется типа $k_1^1 k_1^2 \ldots k_1^p$.

Равенством

$$p = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_l}$$

вводится понятие весомости, точки x_k в системе различных узлов.

В 3-ей, 4-ой и 5-ой частях настоящей работы доказываются следующие предложения.

Предложение 1. *Система n узлов является системой типа k_1 если и только если $p_k \neq 0$.*

Предложение 2. *Любая система n различных точек которая не является системой типа k_1 или типа l_1, является системой типа $k_1 l_1$ и, наоборот, если система не является системой типа $k_1 l_1$, она типа k_1 и l_1.*

Предложение 3. *Любая система различных точек, не являющаяся системой типа k_1, является системой типа k_2 и наоборот.*

Предложение 4. *Если весомости различных точек $x_{k^1}, \ldots, x_{k^p}$ в системе различных узлов являются*

а) *все неотрицательными* (неположительными), *то система точек является системой типа $k_1^{i_1} k_1^{i_2} \ldots k_1^{i_{2r}}$, $1 \leqq i_j \leqq p$, $i_j \neq i_l$,* если *$j \neq l$.*

б) *все неотрицательными* (неположительными) *и по крайней мере одна из них положительна* (отрицательна), *то система является системой типа $k_1^{i_1} \ldots k_1^l \ldots k_1^{i_q}$, где $1 \leqq i_f \leqq p$,* а *x_{k^l} является точкой с положительной* (отрицательной) *весомостью.*

В шестой части настоящей работы даётся общее явное выражение интерполяционных полиномов данного типа.

L'INTERPOLATION LACUNAIRE SUR DES NOEUDS DISTINCTS

RÉSUMÉ

On considère le problème d'interpolation lacunaire sur un système de noeuds distincts, formulé de la façon suivante :

Que l'on détermine le polynome $P(x)$ de degré $n-1$ au plus, qui satisfait aux conditions

$$P(x_i) = y_i, \quad 1 \leqq i \leqq n, \quad i \neq k^r \quad (r = 1, \ldots, p),$$
$$P'(x_{k^r}) = y'_{k^r}, \quad r = 1, \ldots, p.$$

Si pour le système de noeuds distincts $x_1, \ldots, x_n$ le problème d'interpolation admet une solution unique, alors le système de points est appelé de type $k_1^1 k_1^2 \ldots k_1^p$.

Au point 2 on introduit la dénomination de poids d'un point x_k dans un système de noeuds distincts, par l'égalité

$$p_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_l}.$$

Aux points 3, 4 et 5 on démontre les propositions :

Proposition 1. *Un système de n noeuds est de type k_1 si et seulement si $p_k \neq 0$.*

Proposition 2. *Tout système de n points distincts qui n'est pas de type k_1 ou de type l_1 est de type $k_1 l_1$ et inversement, si le système n'est pas de type $k_1 l_1$ il est de type k_1 et l_1.*

Proposition 3. *Tout système de n points distincts, qui n'est pas un système de type k_1, est un système de type k_1, est un système de type k_2 et inversement.*

Proposition 4. *Si les poids des points différents $x_{k^1}, \ldots, x_{k^p}$ d'un système de noeuds distincts sont*

a) *tous non-négatifs (non-positifs), alors le système de points est de type $k_1^{i_1} k_1^{i_2} \ldots k_1^{i_{2r}}$, $1 \leqq i_j \leqq p$, $i_j \neq i_l$ si $j \neq l$;*

b) *tous non-négatifs (non-positifs) et un au moins positif (négatif), alors le système est de type $k_1^{i_1} \ldots k_1^l \ldots k_1^{i_q}$, où $1 \leqq i_j \leqq p$, où x_{k^l} est le point au poids positif (négatif).*

Au point 6 on donne représentation explicite générale de polynomes interpolateurs du type étudié.

BIBLIOGRAFIE

1. Balázs J., Turán P., *Notes on interpolation. II.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 201–215 (1957).
2. — *Notes on interpolation. III.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **9**, 195–214 (1958).
3. Birkhoff G. D., *General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature.* Trans. Amer. Math. Soc., **7**, 107–136 (1906).
4. Mathur K. K., Sharma A., *Some interpolatory properties of Hermite polynomials.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **12**, 193–207 (1961).
5. Németh A. B., *Polinom interpolator de tip* (0, *n*,..., *kn*) *şi generalizarea lui pentru aspectul general al interpolării cu lacune* (în acest volum).
6. Pólya G., *Bemerkungen zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiedung.* Ztschr. für angew. Math. und Mech., **11**, 445–449 (1931).
7. Saxena R. B., Sharma A., *On some interpolatory properties of Legendre polynomials.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **9**, 345–358 (1958).
8. Surányi J., Turán P., *Notes on interpolation. I.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **6**, 66–79 (1955).
9. Varma A. K., *Some interpolatory properties of Tschebichew polynomials* (0, 1, 3) *case.* Duke Math. Journ., **28**, 449–462 (1960).

Primit la 28. XI. 1962.