

Fie sistemul

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, y', z, z') &= 0 \\ G(x, y, y', z, z') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Relativ la acest sistem vom considera următoarele probleme:

PROBLEMA A. Să se afle soluția (y, z) a sistemului (3), care satisface următoarele condiții:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ z(x_0) &= z_0 \end{aligned} \quad x_0 \in (a, b); \quad y_0, z_0 \in (-\infty, +\infty).$$

PROBLEMA B. Să se afle soluția (y, z) a sistemului (3) care satisface următoarele condiții:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \end{aligned} \quad x_0 \in (a, b); \quad y_0, y'_0 \in (-\infty, +\infty).$$

PROBLEMA C. Să se afle soluția (y, z) a sistemului (3) care satisface următoarele condiții:

$$\begin{aligned} z(x_0) &= z_0 \\ z'(x_0) &= z'_0 \end{aligned} \quad x_0 \in (a, b); \quad z_0, z'_0 \in (-\infty, +\infty).$$

PROBLEMA A în cazul sistemului de ecuații diferențiale (2) este bine cunoscuta problema lui Cauchy, iar în cazul sistemului de ecuații diferențiale nerezolvate în raport cu y' și z' ea a fost studiată printre alții de T. Hildebrandt și Graves [5] și B. Mănia [7] (vezi de asemenea [11]).

3. Problemele **B** și **C** după cunoștința noastră n-au fost studiate pînă în prezent. În această lucrare facem cîteva considerații asupra acestor probleme și arătăm legătura care există între problema **A** și problemele **B** și **C**.

Astfel are loc

TEOREMA 1. Dacă sistemul (3) satisface următoarele condiții:

1°. Problema **A** are o soluție și numai una pentru orice $x_0 \in (a, b)$ și $y_0, z_0 \in (-\infty, +\infty)$.

2°. Sistemul de ecuații în X și Y

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, y'_0, X, Y) &= 0 \\ G(x_0, y_0, y'_0, X, Y) &= 0 \end{aligned}$$

are o soluție și numai pentru orice $x_0 \in [a, b]$; $y_0, y'_0 \in (-\infty, +\infty)$. Atunci problema **B** are o soluție și numai una.

TEOREMA 2. Dacă sistemul (3) satisface următoarele condiții:

1°. Problema **A** are o soluție și numai una pentru orice $x_0 \in (a, b)$ și $y_0, z_0 \in (-\infty, +\infty)$

2°. Sistemul de ecuații în X și Y

$$\begin{aligned} F(x_0, X, Y, z_0, z'_0) &= 0 \\ G(x_0, X, Y, z_0, z'_0) &= 0 \end{aligned}$$

are o soluție și numai una pentru orice $x_0 \in (a, b)$ și $z_0, z'_0 \in (-\infty, +\infty)$.

Atunci problema **C** are o soluție și numai una.

Demonstrația acestor teoreme este imediată.

Din teorema 1 și 2 rezultă:

TEOREMA 3. Problema **B** (**C**) relativ la sistemul

$$\begin{aligned} y' + q_1 y + q_1 z &= 0 \\ z' + p_2 y + q z &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

are o soluție și numai una în orice interval $[a, b]$, în care $p_i(x), q_i(x)$, sînt continue, iar $q_1(x) \neq 0$ ($p_2(x) \neq 0$).

4. Vom încheia aceste considerații prealabile prin:

LEMA LUI TONELLI *) Fie funcțiile $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ definite în intervalul $[a, b]$ și care satisfac următoarele condiții

1°. φ_1 și φ_2 au derivate de ordinul întâi continue.

2°. $\varphi_2(a) = \varphi_2(b) = 0$, $\varphi_2(x) > 0$ pentru $x \in (a, b)$, iar

$$\varphi_1(x) > 0 \text{ pentru } x \in [a, b].$$

Atunci există un $\lambda > 0$ și $x_0 \in [a, b]$ astfel ca

$$\varphi_1(x_0) = \lambda \varphi_2(x_0)$$

$$\varphi_1'(x_0) = \lambda \varphi_2'(x_0).$$

Demonstrație. Considerăm familia de funcții

$$\psi_\lambda(x) = \varphi_1(x) - \lambda \varphi_2(x),$$

unde λ este un număr real pozitiv. Vom împărți mulțimea numerelor λ în două clase. Într-o clasă o să între toate numerele λ pentru care $\psi_\lambda(x)$ ia valori nepozitive, iar în cealaltă clasă numerele λ pentru care $\psi_\lambda(x) > 0$, pentru orice x din intervalul $[a, b]$. Obținem astfel în mulțimea numerelor λ , 0 tăietură Dedekind, a cărei element separator λ_0 se bucură de proprietatea că există cel puțin un $x_0 \in [a, b]$ astfel încît $\psi_{\lambda_0}(x_0) = 0$ și există o vecinătate a lui x_0 , V_{x_0} astfel încît $\psi_{\lambda_0}(x) \geq 0$ pentru orice $x \in V_{x_0}$. Deci punctul x_0 este un punct de minim pentru $\psi_{\lambda_0}(x)$, de unde rezultă $\psi'_{\lambda_0}(x_0) = 0$ și cu aceasta lema este demonstrată.

*) Am atașat lemei de mai sus numele lui Tonelli deoarece această lemnă ne-a sugerat de lectura articolului [13].

5. Să trecem acum și să demonstrăm

TEOREMA 4. (de separare). *Dacă sistemul (3) satisface condițiile*

1°. $F(x, y, y', z, z'), G(x, y, y', z, z')$ *sînt funcții omogene în raport cu ansamblul variabilelor* y, y', z, z' .

2°. F și G *satisfac unei anumite condiții de existență și unicitate a problemei B (C), atunci oricare ar fi perechea de soluții* $(y_1, z_1); (y_2, z_2)$, *rădăcinile lui* y_1 *și* y_2 *(* z_1 *și* z_2 *) se separă în orice interval* $[a, b]$ *în care n-au rădăcini comune.*

Demonstrație. Fie x_1 și x_2 două rădăcini consecutive ale componentei y_1 . Să arătăm că între x_1 și x_2 , y_2 are cel puțin o rădăcină. Pentru aceasta să presupunem contrariul și anume că $y_2(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$.

Din cauza condiției 1°, putem presupune că $y_1(x) > 0$, $x \in (x_1, x_2)$ și de asemenea $y_2(x) > 0$, $x \in [x_1, x_2]$. Astfel am ajuns la concluzia că $y_1(x)$ și $y_2(x)$ satisfac condițiile lemei lui Tonelli și deci există un $x_0 \in (x_1, x_2)$ și o constantă pozitivă λ , astfel încît

$$\begin{aligned} y_2(x_0) &= \lambda y_1(x_0) \\ y_2'(x_0) &= \lambda y_1'(x_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Să considerăm soluțiile sistemului (3) $y_2(x), z_2(x); \lambda y_1(x), \lambda z_1(x)$. Din (5) și 2° rezultă

$$\begin{aligned} y_2(x) &\equiv \lambda y_1(x) \\ z_2(x) &\equiv \lambda z_1(x) \end{aligned}$$

și astfel am ajuns la o contradicție cu ipotezele făcute. În mod analog se arată că între două rădăcini consecutive ale componentei $y_2(x)$, componenta $y_1(x)$ are cel puțin o rădăcină.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

6. Pentru a se putea pune problema la care ne-am referit ar fi trebuit arătat în prealabil că rădăcinile componentelor unei soluții sînt simple și izolate. Aceasta însă rezultă imediat din ipotezele în care am enunțat teorema 4. Într-adevăr fie soluția (y, z) a sistemului (3). Să presupunem că componenta y a soluției (y, z) ar admite pe $x_0 \in [a, b]$, ca o rădăcină multiplă. Aceasta înseamnă că în mod necesar $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Deoarece problema B are o soluție unică rezultă $y \equiv 0, z \equiv 0$. Analog se arată și faptul că rădăcinile componentelor sînt izolate.

7. Dacă aplicăm teorema 4. sistemului (4) obținem bine cunoscutele teoreme ale lui Butlewski [3]. Astfel, teorema 4 constituie o generalizare a acestora, pentru cazul neliniar.

8. Considerînd un caz particular al sistemului (3) și anume cazul $G(x, y, y', z, z') \equiv z' - y$, din teorema 4 obținem o teoremă a lui Tonelli dată în lucrarea [13].

О КОРНЯХ СОСТАВЛЯЮЩИХ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этом труде исследуется между прочим вопрос чередования корней „составляющих y ” (или z) двух решений системы (3). Полученные результаты отражаются в

ТЕОРЕМА 4 (сепарации). *Если система (3) удовлетворяет условиям*

1°. $F(x, y, y', z, z'), G(x, y, y', z, z')$ *являются однородными функциями относительно совокупности переменных* y, y', z, z' ;

2°. F и G *удовлетворяют некоторому определённому условию существования и единственности задачи B (C),*

то какая бы ни была пара решений $(y_1, z_1), (y_2, z_2)$, *корни* y_1 *и* y_2 , *(* z_1 *и* z_2 *) чередуются на любом интервале* $[a, b]$, *на котором они не имеют общих корней.*

SUR LES RACINES DES COMPOSANTES DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON-LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

RÉSUMÉ

Dans ce travail on étudie entre autres le problème de la séparation des racines des „composantes y ” (ou z) de deux solutions du système (3). Les résultats obtenus sont présentés dans le

THÉORÈME 4 (de séparation). *Si le système (3) satisfait aux conditions*

1°. $F(x, y, y', z, z'), G(x, y, y', z, z')$ *sont des fonctions homogènes par rapport à l'ensemble des variables* y, y', z, z' ;

2°. F et G *satisfont à une certaine condition d'existence et d'unicité du problème B (C),*

alors quelle que soit la paire de solutions $(y_1, z_1), (y_2, z_2)$, *les racines de* y_1 *et* y_2 *(* z_1 *et* z_2 *) se séparent dans n'importe quel intervalle* $[a, b]$ *où elles n'ont pas de racines communes.*

BIBLIOGRAFIE

1. Bihari I., *Ausdehnung der Sturmschen Oscillations und Vergleichssätzen auf die Lösungen gewisser nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Publ. of the Math. Inst. Hung. Acad. Sci., **2**, 159—173 (1957).
2. — *Extension of certain theorems of the Sturmian type to non-linear second order diff. equations*. Publ. of the Math. Inst. Hung. Acad. Sci. III, **1—2**, 13—20 (1958).
3. Butlewski Z., *Sur les zéros des intégrales réelles des équations différentielles linéaires*. Mathematica, **17**, 85—110 (1941).
4. Cuculescu I., *Separarea zerourilor unei perechi de soluții a unui sistem de ecuații diferențiale*. G. M. F., București, **V**, **5**, 194—195 (1933).
5. Hildebrandt T. H., Graves K. M., *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, **29**, 127—153 (1927).
6. Kamke E., *Bemerkungen zu einigen Trennungssätzen von M. Nicolescu und S. Takahaski für die Nullstellen der Lösungen von Differentialgleichungen*. Mathematica, **15**, 201—203 (1939).
7. Mania B., *Rend. R. Ist. Lombardo Sci. e Lett.*, **69** (2), 461—476 (1936).
8. Nicolescu M., *Sur le théorème de Sturm*. Mathematica, **1**, 111—114 (1929).
9. Rus A. I., *Teoreme de tip Sturm*. Studia Universitatis Babes-Bolyai Cluj, 1961 (sub tipar). Ser. I, fasc. 1, 131—136 (1961).
10. Rus A. I., *Asupra unor teoreme de tip Sturm*. Studia Universitatis Babes-Bolyai Cluj, 1962 (sub tipar).
11. Сансоне Г., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Том II, Москва, 1954, p. 125—126.
12. Takahaski S., *On the zero points of an integral of linear differential equations*. Jap. J. Math., **7**, 335—346 (1930).
13. Tonelli L., *Un'osservazione su un teorema di Sturm*. Boll. Un. Mat. It., **6**, 126—128 (1927).

Primit la 13. III. 1962

NUMERE DE TURMA, $AP = AB = BP$ (A. I. RUS)

de
matematică
matematică

1. Se consideră în figură un triunghi echilateral ABC cu latura a și un punct P interior, astfel încât să se aibă $AP = AB = BP$. Să se determine unghiurile $\angle PAB$ și $\angle PBA$.

Soluție. Fie $\angle PAB = \alpha$ și $\angle PBA = \beta$. Din condițiile enunțului rezultă că $\angle PAB = \angle PBA = \angle ABC = 60^\circ$.

În triunghiul ABP , avem $\angle APB = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

2. Fie $AP = AB = BP$. Să se determine unghiurile $\angle PAB$ și $\angle PBA$. Din condițiile enunțului rezultă că $\angle PAB = \angle PBA = \angle ABC = 60^\circ$.

3. Fie $AP = AB = BP$. Să se determine unghiurile $\angle PAB$ și $\angle PBA$. Din condițiile enunțului rezultă că $\angle PAB = \angle PBA = \angle ABC = 60^\circ$.

4. Fie $AP = AB = BP$. Să se determine unghiurile $\angle PAB$ și $\angle PBA$. Din condițiile enunțului rezultă că $\angle PAB = \angle PBA = \angle ABC = 60^\circ$.

5. Fie $AP = AB = BP$. Să se determine unghiurile $\angle PAB$ și $\angle PBA$. Din condițiile enunțului rezultă că $\angle PAB = \angle PBA = \angle ABC = 60^\circ$.

6. Fie $AP = AB = BP$. Să se determine unghiurile $\angle PAB$ și $\angle PBA$.

$$\frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AB} = \frac{AP}{BP} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AB} = \frac{AP}{BP} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AB} = \frac{AP}{BP} = 1$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AB} = \frac{AP}{BP} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AB} = \frac{AP}{BP} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AB} = \frac{AP}{BP} = 1$$