DESPRE UNELE INEGALITĂŢI LEGATE DE REZOLVABILITATEA PROBLEMEI LUI DIRICHLET

DE

P. SZILÁGYI

(Cluj)

Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 15 iunie 1962 a Facultăţii de matematică şi mecanică a Universităţii ,,Babeş-Bolyai" Cluj.

1. Introducere

I. În ultimul timp se depun eforturi susţinute pentru elaborarea teoriei generale a ecuaţiilor cu derivate parţiale şi a sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale. Rezultatele cele mai însemnate s-au obţinut în această direcţie, tratînd ecuaţiile cu derivate parţiale în spaţii Hilbert sau în spaţii normate.

La rezolvarea multor probleme la limită are un rol fundamental inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|Lu\|^2 + \|u\|^2), \tag{1.1}$$

care caracterizează ecuaţiile şi sistemele eliptice pe anumite clase de funcţii. Aici Lu reprezintă operatorul cu derivate parţiale de ordinul al doilea, $\|\cdot\|$ înseamnă norma obişnuită a spaţiului L_2 şi

$$|u|_2^2 = \sum_{i,h=1}^{2} \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_h}\right\|^2 + \sum_{i=1}^{2} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2 + \|u\|^2. \tag{2.1}$$

Această inegalitate a fost studiată de mai mulţi autori. Pentru o ecuaţie cităm lucrările [3, 5, 6]. În ceea ce priveşte sistemele de ecuaţii cu derivate parţiale, inegalitatea (1.1) a fost dedusă numai pentru anumite cazuri destul de particulare, ca de exemplu pentru sisteme tare eliptice [4] şi pentru sisteme care provin dintr-o singură ecuaţie cu coeficienţi complecşi [6].

În nota [9] am demonstrat că condiția necesară și suficientă pentru ca inegalitatea (1.1) să fie adevărată pe mulțimea funcțiilor de două ori derivabile în mod continuu în domeniul închis $\bar{\Omega}$, care au suport compact în Ω, este elipticitatea sistemului Lu.

Inegalitatea (1.1) nu mai este valabilă pentru orice sistem eliptic atunci cînd considerăm mulțimea funcțiilor de două ori derivabile în mod continuu în $\bar{\Omega}$, și care satisfac condițiile omogene ale problemei lui Dirichlet pe frontiera Γ a domeniului Ω, sau alte condiții omogene. Deci pentru ca să fie adevărată inegalitatea de mai sus pe clasa funcțiilor indicate, pe lîngă elipticitatea operatorului L trebuie să pretindem anumite condiții suplimentare din partea operatorului L.

În acest articol vom da o condiție necesară și suficientă pentru existența inegalității (1.1) într-o clasă de sisteme de ecuații eliptice. Funcțiile considerate satisfac condițiile omogene ale lui Dirichlet pe Γ. Menționăm că aceste condiții sînt de natură algebrică.

La sfîrșitul lucrării vom formula de asemenea și consecințele inegalității (1.1) referitoare la rezolvabilitatea problemei lui Dirichlet pentru sistemele studiate.

II. Trecem la precizarea notațiilor și a noțiunilor folosite în această lucrare.

Fie Ω un domeniu mărginit în spațiul euclidian cu două dimensiuni. Notăm cu Γ frontiera lui Ω, iar prin $u = (u_1, u_2)$, un vector-funcție a cărui componente u_1 și u_2 sînt funcții reale sau complexe.

Considerăm sistemul

$$L_i u = \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl}(x_1, x_2)\, D_k D_l u_j + \sum_{j,k=1}^{2} b_{ij}^{k}(x_1, x_2) D_k u_j + \sum_{j=1}^{2} c_{ij}(x_1, x_2) u_j \quad (i = 1, 2), \tag{3.1}$$

unde $a_{ij}^{kl}(x_1, x_2)$, $b_{ij}^{k}(x_1, x_2)$, $c_{ij}(x_1, x_2)$ sînt funcții continue reale în $\bar{\Omega}$, iar

$$D_k u_j = \frac{1}{i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}. \tag{4.1}$$

La acest sistem atașăm polinoamele

$$P_{ij}(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = \sum_{k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl}(x_1, x_2) \xi_k \xi_l \quad (i, j = 1, 2), \tag{5.1}$$

unde ξ_1 și ξ_2 sînt numere reale.

Sistemul (3.1) se numește eliptic în punctul $P(x_1, x_2)$, dacă polinomul caracteristic

$$P(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} \tag{6.1}$$

nu se anulează pentru nici o pereche de numere (ξ_1, ξ_2) diferită de zero $(\xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0)$.

Fie $L_2(\Omega)$ mulțimea funcțiilor la patrat integrabile în Ω, cu metrica

$$\|u\|^2 = \iint_{\Omega} (\,|u_1|^2 + |u_2|^2)\, d\Omega. \tag{7.1}$$

În conformitate cu notațiile acceptate ale lui S. L. Sobolev [8], $W_2^{(2)}(\Omega)$ va însemna spațiul funcțiilor din $L_2(\Omega)$ care au toate derivatele generalizate pînă la ordinul doi inclusiv și care sînt de asemenea la patrat integrabile. Metrica în acest spațiu este dată de formula

$$|u|_2^2 = \sum_{j=1}^{2} \left\{ \sum_{k,l=1}^{2} \| D_k D_l u_j \|^2 + \sum_{k=1}^{2} \| D_k u_j \|^2 + \| u_j \|^2 \right\}. \tag{8.1}$$

Vom nota cu $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ mulțimea funcțiilor din $W_2^{(2)}(\Omega)$ care se anulează pe frontiera domeniului.

Clasa sistemelor studiate în această lucrare este aceea pentru care se îndeplinește condiția

$$P_{11}P_{12} + P_{21}P_{22} = 0. \tag{$\mathcal{A}$}$$

Vom nota această clasă cu $\mathcal{A}$. Subliniem că $\mathcal{A}$ conține toate sistemele care provin dintr-o ecuație cu coeficienți complecși, dar este ușor de a indica exemple de sisteme din clasa $\mathcal{A}$ care nu provin dintr-o singură ecuație cu coeficienți complecși și nu sînt nici tare eliptice, deci pentru care inegalitatea (1.2) nu a fost încă studiată.

Formulăm acuma rezultatul de bază al lucrării.

TEOREMA 1.1. *Condiția necesară și suficientă ca să existe o constantă $K > 0$ astfel încît inegalitatea*

$$|u|_2^2 \leqslant K(\| Lu \|^2 + \| u \|^2), \quad u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \tag{9.1}$$

să aibă loc pentru sitemul L din casa $\mathcal{A}$, este ca operatorul să fie eliptic în $\bar{\Omega}$ și ca în punctele de frontieră, ecuația de gradul doi în ξ_2

$$P_{11}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) + i P_{21}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) = 0 \tag{10.1}$$

să aibă o rădăcină în semiplanul complex $\mathrm{Im}(z) > 0$ *și o rădăcină în semiplanul complex* $\mathrm{Im}(z) < 0$ *pentru orice* $\xi_1^0 \neq 0$ *real.*

În continuare folosim următoarea terminologie : rădăcinile z_1 și z_2 sînt separate, dacă $\mathrm{Im}(z_1) > 0$ și $\mathrm{Im}(z_2) < 0$.

Înainte de a trece la demonstrația teoremei 1.1., vom deduce o serie de rezultate ajutătoare.

2. Operatori diferențiali cu coeficienți constanți în domenii de formă specială

Considerăm sistemul eliptic cu coeficienți constanți și reali

$$L_i u = \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl} D_k D_l u_j \qquad (i = 1, 2). \tag{1.2}$$

Presupunem că (1.2) face parte din clasa $\mathcal{A}$.

Fie Ω^* un domeniu plan și mărginit a cărei frontieră conține un segment de dreaptă Γ_1 situată pe axa x_1. Restul frontierei se notează cu Γ_2. Fie $C_2(\overline{\Omega}^*)$ mulțimea funcțiilor de două ori derivabile în mod continuu în $\overline{\Omega}^*$. $\dot{C}_2(\overline{\Omega}^*)$ este o submulțime a acelor funcții din $C_2(\overline{\Omega}^*)$, care se anulează pe $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, iar $\widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$ submulțimea funcțiilor din $\dot{C}_2(\Omega^*)$ care sînt identic nule într-o fîșie din vecinătatea lui Γ_2.

Notăm

$$|u|_2^2 = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k,l=1}^{2} \|D_k D_l u_j\|^2. \tag{2.2}$$

Teorema de bază din acest paragraf este următoarea:

TEOREMA 1.2. *Condiția necesară și suficientă ca să existe o constantă $K > 0$ astfel încît inegalitatea*

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|Lu\|^2 + \|u\|^2) \qquad u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*) \tag{3.2}$$

să aibă loc pentru sistemul L din clasa $\mathcal{A}$, este ca ecuația

$$P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) + i\, P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0 \tag{10.1}$$

pentru un $\xi_1^0 \neq 0$ arbitrar fixat, să aibă rădăcini complexe separate.

În prealabil vom stabili cîteva relații ajutătoare, respectiv cîteva leme și pe urmă vom demonstra teorema 1.2.

Fie $u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$. Prelungim funcția u pe tot planul x_1, x_2 punînd $u \equiv 0$ în afara lui Ω^*.

Notăm cu u^* transformata Fourier a lui u:

$$u_j^*(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega^*} \exp\, \{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\}\, u(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \qquad (j = 1, 2).$$

Integrînd prin părți obținem

$$\begin{aligned} (D_1^2 u_j)^* &= \xi_1^2 u_j^* \\ (D_1 D_2 u_j)^* &= \xi_1 \xi_2 u_j^* \\ (D_2^2 u_j)^* &= \xi_2^2 u_j^* - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \exp\, \{-i\xi_1 x_1\}\, D_2 u_j(x_1, 0)\, dx_1, \end{aligned} \tag{4.2}$$

unde am ținut seamă de faptul că pe Γ_1, $\cos(n, x_1) = 0$, $\cos(n, x_2) = -1$, $u_j = 0$ și $D_1 u_j = 0$.

Introducem notația

$$w_j(\xi_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \exp\, \{-i\xi_1 x_1\} D_2 u_j\, (x_1, 0)\, dx_1 \qquad (j = 1, 2). \tag{5.2}$$

Cu ajutorul formulelor (4.2) și (5.2) obținem

$$(L_i u)^* = \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l u_j^* + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}^{22} w_j \qquad (i = 1, 2). \tag{6.2}$$

Notînd

$$S_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}^{22} w_j \qquad (i = 1, 2) \tag{7.2}$$

și ținînd seamă de formulele (5.1), putem scrie pe scurt

$$(L_i u)^* = P_{i1} u_1^* + P_{i2} u_2^* + S_i \qquad (i = 1, 2). \tag{8.2}$$

Pe baza egalității lui Parseval și a formulelor (8.2), avem

$$\begin{aligned} \|Lu\|^2 &= \iint_{\Omega^*} |(L_1 u)^2 + (L_2 u)^2|\, d\Omega = \iint \{|(L_1 u)^*|^2 + |(L_2 u)^*|^2\} d\xi_1\, d\xi_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\mathcal{P}_{11} |u_1^*|^2 + \mathcal{P}_{22} |u_2^*|^2 + 2\mathrm{Re}(P_{11} \overline{S}_1 + P_{21} \overline{S}_2) u_1^* + \\ &\quad + 2\mathrm{Re}(P_{12} \overline{S}_1 + P_{22} \overline{S}_2) u_2^* + |S_1|^2 + |S_2|^2\} d\xi_1\, d\xi_2, \end{aligned} \tag{9.2}$$

unde am folosit notațiile

$$\mathcal{P}_{ij}(\xi_1, \xi_2) = P_{1i} P_{1j} + P_{2i} P_{2j} \qquad (i, j = 1, 2) \tag{10.2}$$

și am avut în vedere că L aparține clasei $\mathcal{A}$, deci $\mathcal{P}_{12} = P_{11} P_{12} + P_{21} P_{22} = 0$.

LEMA 1.2. *Pentru orice $u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$ avem*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^*(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{11.2}$$

Demonstrație. Din teoria transformărilor Fourier este cunoscut că dacă $v(y)$ este o funcție continuă, integrabilă pe $-\infty < y < +\infty$ și derivabilă în mod continuu pe porțiuni, atunci aplicînd de două ori transformata Fourier, obținem

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\, \{i\eta z\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\, \{-i\eta y\}\, v(y)\, dy\, d\eta.$$

Vom particulariza funcţia v în felul următor

$$v_j(x_2) = \int_{\Gamma_1} \exp\{-i\xi_1 x_1\} u_j(x_1, x_2)\,dx_1,$$

unde $u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$ şi este zero în afara lui Ω^*. Funcţia $v_j(x_2)$ se bucură de proprietăţile înşirate mai sus. Din formulele anterioare rezultă

$$v_j(x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i\xi_2 x_2\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i\xi_2 y\}\left[\int_{\Gamma_1} \exp\{-i\xi_1 x_1\} u_j(x_1, y)\,dx_1\right] dy\, d\xi_2.$$

Dar $v_j(0) = 0$, fiindcă $u_j(x, 0) = 0$, deci

$$0 = v_j(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 y)\} u_j(x_1, y)\,dx_1\,dy\right\} d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_j^*(\xi_1, \xi_3)\,d\xi_2,$$

ceea ce demonstrează lema 1.2.

În continuare vom studia integrala

$$\mathcal{J}(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\mathcal{P}_{11}|u_1^*|^2 + \mathcal{P}_{22}|u_2^*|^2 + 2\operatorname{Re} u_1^*(\overline{S}_1 P_{11} + \overline{S}_2 P_{21}) + $$
$$+ 2\operatorname{Re} u_2^*(S_1 P_{12} + \overline{S}_2 P_{22}) + |S_1|^2 + |S_2|^2\}\,d\xi_2. \tag{12.2}$$

Considerăm funcţiile $Q_1(\xi_1)$, $Q_2(\xi_1)$ deocamdată nedeterminate. Cu ajutorul acestor funcţii putem scrie

$$\mathcal{J}(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\mathcal{P}_{11}|u_1^*|^2 + \mathcal{P}_{22}|u_2^*|^2 + 2\operatorname{Re} u_1^*(\overline{S}_1 P_{11} + \overline{S}_2 P_{21} - \overline{Q}_1)$$
$$+ 2\operatorname{Re} u_2^*(\overline{S}_1 P_{11} + \overline{S}_2 P_{22} - \overline{Q}_2) + |S_1|^2 + |S_2|^2\}\,d\xi_2,$$

deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{Q}_1(\xi_1) u_i(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_2 = \overline{Q}_i(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^*(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_2 = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

După calcule elementare obţinem

$$\mathcal{J}(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{|\mathcal{P}_{11}^{\frac{1}{2}} u_1^* + M_1|^2 + |\mathcal{P}_{22}^{\frac{1}{2}} u_2^* + M_2|^2\}\,d\xi_2 +$$

$$+ 2\operatorname{Re}\overline{Q}_1(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{11}S_1 + P_{21}S_2}{\mathcal{P}_{11}}\,d\xi_2 + 2\operatorname{Re}\overline{Q}_2(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{12}S_1 + P_{22}S_2}{\mathcal{P}_{22}}\,d\xi_2 -$$
$$- |Q_1(\xi_1)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{\mathcal{P}_{11}} - |Q_2(\xi_1)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{\mathcal{P}_{22}}, \tag{13.2}$$

unde am notat

$$M_1 = \mathcal{P}_{11}^{-\frac{1}{2}}(P_{11}S_1 + P_{21}S_2 - Q_1),$$
$$M_2 = \mathcal{P}_{22}^{-\frac{1}{2}}(P_{12}S_1 + P_{22}S_2 - Q_2). \tag{14.2}$$

Este evident că

$$\mathcal{J}_1(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{|\mathcal{P}_{11}^{\frac{1}{2}} u_1^* + M_1|^2 + |\mathcal{P}_{22}^{\frac{1}{2}} u_2^* + M_2|^2\}\,d\xi_2 \geqslant 0 \tag{15.2}$$

pentru orice u_1^*, u_2^*.

Ne vom ocupa în continuare numai de integrala

$$\mathcal{J}_2(\xi_1) = 2\operatorname{Re}\overline{Q}_1(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{11}S_1 + P_{21}S_1}{\mathcal{P}_{11}}\,d\xi_2 + 2\operatorname{Re}\overline{Q}_2(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{12}S_1 + P_{22}S_2}{\mathcal{P}_{22}}\,d\xi_2 -$$
$$- |Q_1(\xi_1)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{\mathcal{P}_{11}} - |Q_2(\xi_1)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{\mathcal{P}_{22}}. \tag{16.2}$$

Integralele $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{\mathcal{P}_{ii}}\,d\xi_2$ sînt funcţii omogene de gradul -3 în $|\xi_1|$. Într-adevăr $\mathcal{P}_{ii}$ sînt funcţii omogene de gradul 4 în ξ_1, ξ_2 şi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{\mathcal{P}_{ii}(\xi_1, \xi_2)} = \frac{1}{|\xi_1|^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{\xi_1}{|\xi_1|}\right)}{\mathcal{P}_{ii}\left(1, \frac{\xi_2}{|\xi_1|}\right)} = \frac{k_i}{|\xi_1|^3} \qquad (i = 1, 2),$$

unde k_i este o valoare pozitivă, deoarece $\mathcal{P}_{11} > 0$ (a se vedea lucrarea [9]).

Alegem

$$Q_1(\xi_1) = \delta|\xi_1|^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{11}S_1 + P_{21}S_2}{P_{11}^2 + P_{21}^2}\,d\xi_2,$$

$$Q_2(\xi_1) = \delta|\xi_1|^3 \frac{P_{12}S_1 + P_{22}S_2}{P_{12}^2 + P_{22}^2}\,d\xi_2, \tag{17.2}$$

unde δ este un parametru pozitiv. După aceste notații avem

$$\mathcal{J}_2(\xi_1) = \frac{1}{|\xi_1|^3}\left[\left(\frac{2}{\delta} - k_1\right)|Q_1(\xi_1)|^2 + \left(\frac{2}{\delta} - k_2\right)|Q_2(\xi_1)|^2\right]. \qquad (18.2)$$

Se vede imediat că putem alege numărul δ atît de mic încît să avem $\frac{2}{\delta} - k_1 > 0$, $\frac{2}{\delta} - k_2 > 0$. Fie $K = \min\left[\frac{2}{\delta} - k_1, \frac{2}{\delta} - k_2\right]$. Pentru δ ales, obținem delimitarea

$$\mathcal{J}_2(\xi_1) \geqslant \frac{K}{|\xi_1|^3}\left[|Q_1(\xi_1)|^2 + |Q_2(\xi_1)|^2\right]. \qquad (19.2)$$

Observăm de asemenea că $|Q_1(\xi_1)|^2$ și $|Q_2(\xi_1)|^2$ sînt forme pătratice în w_1 și w_2, iar coeficienții acestei forme sînt funcții omogene de gradul 4 în $|\xi_1|$. Într-adevăr

$$|Q_1(\xi_1)|^2 = \delta^2|\xi_1|^6\left\{|S_1(\xi_1)|^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_{11}(\xi_1,\xi_2)}{\mathcal{P}_{11}(\xi_1,\xi_2)}d\xi_2\right]^2 + \right.$$

$$\left. + 2\mathrm{Re}S_1(\xi_1)\overline{S}_2(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_{11}}{\mathcal{P}_{11}}d\xi_2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_{21}}{\mathcal{P}_{11}}d\xi_2 + |S_2(\xi_1)|^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_{11}}{\mathcal{P}_{11}}d\xi_2\right]^2\right\}.$$

În mod analog ca mai sus, se arată, că intregralele care figurează în ultima expresie sînt polinoame de gradul -1 în $|\xi_1|$. În formulele (7.2), S_1 și S_2 sînt exprimate liniar și omogen cu ajutorul funcțiilor w_1 și w_2. De aici se vede că $|Q_1(\xi_1)|^2$ este o formă pătratică în w_1 și w_2, iar coeficienții formei sînt funcții omogene de gradul 4 în $|\xi_1|$.

Înlocuind aceste valori în (18.2) obținem o formă pătratică semidefinită

$$\mathcal{J}_2(\xi_1) = |\xi_1|\sum_{i,j=1}^{2}\beta_{ij}w_i(\xi_1)\overline{w}_j(\xi_1), \qquad (20.2)$$

unde β_{ij} sînt constante.

LEMA 2.2. $|S_1|^2 + |S_2|^2 = 0$ *atunci și numai atunci, cînd* $|w_1|^2 + |w_2|^2 = 0$.

Demonstrație. Să presupunem că avem $|w_1|^2 + |w_2|^2 > 0$ și totuși $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. Aceasta înseamnă că sistemul

$$S_1 = a_{11}^{22}w_1 + a_{12}^{22}w_2 = 0$$

$$S_2 = a_{21}^{22}w_1 + a_{22}^{22}w_2 = 0$$

are soluție netrivială. Prin urmare determinantul sistemului este zero:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{22} & a_{12}^{22} \\ a_{21}^{22} & a_{22}^{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Pe de altă parte, acest determinant coincide cu determinantul caracteristic (6.1) pentru $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$. Deci egalitatea cu zero a determinantului înseamnă că sistemul nu este eliptic.

Invers, fie $|S_1|^2 + |S_2|^2 > 0$ și $w_1 = 0$, $w_2 = 0$. În acest caz relațiile (7.2) ne conduc la contradicție.

Vom arăta în continuare cîteva relații între rădăcinile polinoamelor P_{ij} $(\xi_1, \xi_2)(i, j = 1, 2)$. Presupunem că polinomul caracteristic (6.1) al sistemului este pozitiv, $\mathcal{P}(\xi_1, \xi_2) > 0$.*)

LEMA 3.2. *Fie* L *un operator din clasa* $\mathcal{A}$ *și* ξ_1 *un număr real fixat.*

1°. *Dacă* $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ *are rădăcini reale, atunci ecuațiile*

$$P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = 0, \qquad P_{22}(\xi_1^0, \xi_2) = 0,$$

respectiv

$$P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) = 0, \qquad P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0,$$

au rădăcini comune.

2°. *Dacă* $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ *nu are rădăcini reale, atunci sau*

a) *ecuațiile*

$$P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = 0, \qquad P_{22}(\xi_1^0, \xi_2) = 0,$$

respectiv

$$P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) = 0, \qquad P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0,$$

au rădăcini comune, sau

b) *ecuațiile*

$$P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = 0, \qquad P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0,$$

respectiv

$$P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) = 0, \qquad P_{22}(\xi_1^0, \xi_2) = 0,$$

au rădăcini comune.

3°. *Intotdeauna cînd* $P_{11}(\xi_1, \xi_2) \not\equiv 0$, $P_{21}(\xi_1, \xi_2) \not\equiv 0$, *avem*

$$\frac{P_{11}(\xi_1^0, \xi_2)}{P_{22}(\xi_1^0, \xi_2)} > 0 \quad \text{și} \quad \frac{P_{21}(\xi_1^0, \xi_2)}{P_{12}(\xi_1^0, \xi_2)} < 0. \qquad (21.2)$$

Demonstrație. 1°. Fie ξ_2^1 o rădăcină reală a ecuației $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2)$. Pe baza relațiilor

$$\mathcal{P} = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21} > 0, \qquad (22.2)$$

$$P_{11}P_{12} + P_{21}P_{22} = 0, \qquad (\mathcal{A})$$

*) Pentru $\mathcal{P} < 0$ sînt valabile aceleași rezultate ca și cînd $\mathcal{P} > 0$, schimbînd, însă peste tot semnul $>$ în $<$.

avem

$$-P_{12}(\xi_1^0, \xi_2^1)\, P_{21}(\xi_1^0, \xi_2^1) > 0,$$
$$P_{21}(\xi_1^0, \xi_2^1)\, P_{22}(\xi_1^0, \xi_2^1) = 0,$$

de unde rezultă

$$P_{22}(\xi_1^0, \xi_2^1) = 0.$$

În mod analog se arată că rădăcinile ecuațiilor $P_{12} = 0$, $P_{21} = 0$ coincid.

2°. Această afirmație rezultă din relația de bază $(\mathcal{A})$, avînd în vedere, că coeficienții polinoamelor P_{ij} sînt numere reale.

3°. Dacă $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$, $P_{22}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ au rădăcini reale sau complexe comune, atunci și $P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$, $P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ au rădăcini comune, deci între ele există relația de formă

$$P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = \alpha(\xi_1^0)\, P_{22}(\xi_1^0, \xi_2)$$
$$P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = \beta(\xi_1^0)\, P_{12}(\xi_1^0, \xi_2).$$

Din (22.2) și $(\mathcal{A})$ obținem

$$\alpha(\xi_1)\,(P_{12}^2 + P_{22}^2) > 0$$
$$-\beta(\xi_1)\,(P_{12}^2 + P_{22}^2) > 0,$$

ceea ce ne arată că afirmația 3° a lemei este adevărată. Dacă $P_{11} = 0$, $P_{21} = 0$ au rădăcini comune, inegalitățile (21.2) se demonstrează analog.

Enunțăm trei leme fără a da demonstrarea lor aici.

LEMA 4.2. *Dacă operatorul L aparține clasei $\mathcal{A}$ și rădăcinile ecuației*

$$P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) + iP_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0 \qquad (10.1)$$

sînt complexe separate, atunci și ecuația

$$P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) + iP_{22}(\xi_1^0, \xi_2) = 0 \qquad (10'.1)$$

are rădăcini complexe separate.

LEMA 5.2. *Dacă operatorul L aparține clasei $\mathcal{A}$ și ecuația* (10.1) *are rădăcini complexe neseparate, atunci rădăcinile ecuațiilor* (10.1), (10'.1) *coincid.*

LEMA 6.2. *Dacă ecuația* (10.1) *are rădăcini complexe neseparate, atunci rădăcinile ecuației* (10.1) *nu sînt rădăcini ale ecuațiilor*

$$P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = 0, \quad P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) = 0, \quad P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0, \quad P_{22}(\xi_1^0, \xi_2) = 0.$$

Menționăm că demonstrarea acestor leme este elementară. Este suficient să ne folosim de relația $(\mathcal{A})$, de formula

$$\mathcal{P}^2(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} P_{11}^2 + P_{21}^2 & P_{11}P_{12} + P_{21}P_{22} \\ P_{11}P_{12} + P_{21}P_{22} & P_{12}^2 + P_{22}^2 \end{vmatrix} =$$
$$= (P_{11} + iP_{21})\,(P_{11} - iP_{21})\,(P_{12} + iP_{22})\,(P_{12} - iP_{22}), \qquad (23.2)$$

precum și de elipticitatea lui L.

Din (23.2) se vede că în cazul sistemelor eliptice, ecuația $P_{11} + iP_{21} = 0$ nu are rădăcini reale.

CONSECINȚĂ. *Dacă rădăcinile ecuației nu sînt separate, atunci ecuațiile*

$$P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) = 0, \qquad P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$$

au rădăcini comune.

Într-adevăr, din lema 6.2 rezultă că $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ și $P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ nu au rădăcini comune (dacă ar exista rădăcini comune atunci ele și conjugatele lor ar fi rădăcini ale ecuației (10.1)). În acest caz, din lema 3.2. rezultă că $P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$, $P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ au rădăcini comune.

LEMA 7.2. *Dacă pentru o valoare ξ_1^0 ecuația* (10.1) *are rădăcini complexe separate, atunci pentru orice $\xi_1^0 \neq 0$ ecuația* (10.1) *are rădăcini complexe separate.*

Demonstrație. Ecuația (10.1) se poate transcrie

$$(a_{11}^{22} + ia_{21}^{22})\xi_2^2 + 2(a_{11}^{12} + ia_{21}^{12})\xi_1^0\xi_2 + (a_{11}^{11} + ia_{21}^{11})\,(\xi_1^0)^2 = 0. \qquad (10.1)$$

Însă am presupus că (10.1) are două rădăcini complexe separate, prin urmare $a_{11}^{22} + ia_{21}^{22} \neq 0$. Aceste rădăcini se pot exprima cu formula

$$\xi_2 = \frac{-(a_{11}^{12} + ia_{21}^{12}) + \sqrt{(a_{11}^{12} + ia_{21}^{12})^2 - (a_{11}^{22} + ia_{21}^{22})(a_{11}^{11} + ia_{21}^{11})}}{a_{11}^{22} + ia_{21}^{22}}\,\xi_1^0.$$

Presupunînd că pentru o valoare ξ_1^0 rădăcinile sînt separate, din această formulă rezultă că pentru orice ξ_1^0 ele sînt separate.

TEOREMA 2.2. *Dacă ecuația* (10.1) *are rădăcini complexe separate, atunci $\mathcal{J}_2(\xi_1)$ dat de formula* (16.2) *este o formă pătratică pozitiv definită în w_1 și w_2: $\mathcal{J}_2(\xi_1) \geqslant C(|w_1|^2 + |w_2|^2)$ $C > 0$.*

Demonstrație. Știm deja că $\mathcal{J}_2(\xi_1)$ este o formă pătratică pozitiv semidefinită. Este suficient să arătăm că $\mathcal{J}_2(\xi_1)$ se anulează numai dacă $|w_1|^2 + |w_2|^2 = 0$, sau pe baza lemei 2.2. numai dacă $|S_1|^2 + |S_2|^2 = 0$.

Cazul 1. Dacă $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) \equiv 0$, atunci din condiția teoremei rezultă că $P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ are rădăcini complexe separate (rădăcinile sînt chiar conjugate). Din lema 3.2. avem $P_{22} \equiv 0$, iar din lema 4.2 obținem că $P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ are rădăcini complexe separate. În consecință

$$Q_1(\xi_1) = \delta\,|\,\xi_1\,|^3 S_2(\xi_1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{P_{21}(\xi_1^0, \xi_2)}, \quad Q_2(\xi_1) = \delta\,|\xi_1\,|^3 S_1(\xi_1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{P_{12}(\xi_1^0, \xi_2)}.$$

Dar cele două integrale sînt diferite de zero, deoarece $P_{12} = 0$, $P_{21} = 0$ nu au rădăcini reale, deci $|\,Q_1\,|^2 + |Q_2\,|^2 = 0$ atunci și numai atunci dacă $|\,S_1\,|^2 + |S_2\,|^2 = 0$.

Cazul 2. Presupunem că $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ are rădăcini reale η_1, η_2. În baza lemei 3.2, $P_{22}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ are aceleași rădăcini și

$$\frac{P_{11}(\xi_1^0, \xi_2)}{P_{22}(\xi_1^0, \xi_2)} = \frac{A(\xi_1^0)}{B(\xi_1^0)} > 0. \tag{24.2}$$

$|\,S_1\,|^2 + |\,S_2\,|^2 \neq 0$, deci sau S_1 sau S_2 e diferit de zero. Să presupunem că $S_1 \neq 0$. Folosind relația (24.2) și condiția ($\mathscr{A}$), obținem

$$Q_1(\xi_1^0) - i\frac{B(\xi_1^0)}{A(\xi_1^0)} Q_2(\xi_1^0) = \delta\,|\,\xi_1^0\,|\,(S_1 + iS_2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{P_{11} + iP_{21}}. \tag{25.2}$$

Arătăm că în condițiile noastre, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{P_{11} + iP_{21}} \neq 0$. Fie z_1 o rădăcină a ecuației (10.1) pentru care $\mathrm{Im}(z_1) > 0$. Avem

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) + iP_{21}(\xi_1^0, \xi_2)} = 2\pi i \,\mathrm{Rez}\left\{\frac{1}{P_{11}(\xi_1^0, z) + iP_{21}(\xi_1^0, z)}\right\}_{z=z_1} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{1}{P_{11} + iP_{21}} = \frac{1}{K(z_2 - z_1)} \neq 0,$$

unde am ținut cont de

$$P_{11}(\xi_1^0, z) + iP_{21}(\xi_1^0, z) = K(\xi_1^0)\,(z - z_1)\,(z - z_2),$$

dar în acest caz din relația (25.2) se vede că $|\,Q_1|^2 + |\,Q_2\,|^2 > 0$, dacă $S_1 + iS \neq 0$. În cazul cînd $S_1 + iS_2 = 0$

$$Q_1 = \delta\,|\,\xi_1^0\,|^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{P_{11} - iP_{21}} \neq 0,$$

deoarece rădăcinile ecuației $P_{11} - iP_{21} = 0$ sînt conjugatele rădăcinilor ecuației $P_{11} + iP_{21} = 0$.

Cazul 3. $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2)$ nu se anulează pentru nici o valoare reală. Avînd în vedere că $\frac{P_{11}}{P_{22}} > 0$, rezultă $P_{11} > 0$, $P_{22} > 0$ sau $P_{11} > 0$, $P_{22} > 0$. Cazul $P_{11} < 0$, $P_{22} < 0$ se reduce la $P_{11} > 0$, $P_{22} > 0$, considerînd în locul operatorului L pe $-L$. Vom demonstra că $|\,Q_1\,|^2 + |\,Q_2\,|^2 > 0$.

Subliniem în mod special faptul că la această demonstrație nu ne vom folosi de condiția lemei.

Ca și mai înainte, presupunem $S_1(\xi_1) \neq 0$ și notăm $\alpha = \frac{S_2(\xi_1^0)}{S_1(S_1^0)}$. Avem

$$Q_1(\xi_1^0) = \delta\,|\,\xi_1^0\,|^3 S_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{11} + \alpha P_{21}}{P_{11}^2 + P_{21}^2} d\xi_2, \quad Q_2(\xi_1^0) = \delta\,|\,\xi_1^0\,|^3 S_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{12} + \alpha P_{22}}{P_{12}^2 + P_{22}^2} d\xi_2.$$

Ideea demonstrației constă în a arăta că $Q_2 \neq 0$, dacă presupunem că $Q_1 = 0$, sau invers. Deci presupunem

$$Q_1(\xi_1^0) = \delta\,|\,\xi_1^0\,|\,S_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{11} + \alpha P_{21}}{P_{11}^2 + P_{21}^2} d\xi_2 = 0 \quad \text{sau} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{11} + \alpha_1 P_{21}}{P_{11}^2 + P_{21}^2} d\xi_2 = 0,$$

unde $\alpha_1 = \mathrm{Re}\,\alpha$, care ne arată că $P_{11} + \alpha_1 P_{21}$ se anulează identic, sau își schimbă semnul pe intervalul $-\infty < \xi_2 < +\infty$.

Considerăm primul caz :

a) $P_{11} + \alpha_1 P_{21} \equiv 0$. P_{11} fiind pozitiv, rezultă că $\alpha_1(\xi_1^0) P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) < 0$, deci atît $\alpha_1(\xi_1^0)$ cît și $P_{21}(\xi_1^0, \xi_2)$ sînt diferite de zero. Din condiția ($\mathscr{A}$) avem

$$P_{22} = -P_{11}\frac{P_{12}}{P_{21}} = \alpha_1 P_{21}\frac{P_{12}}{P_{21}} = \alpha_1 P_{12},$$

care ne arată că nici $P_{12}(\xi_1^0, \xi_2)$ nu-și schimbă semnul pe intervalul $-\infty < \xi_2 < +\infty$ și prin urmare

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{12} + \alpha_1 P_{22}}{P_{12}^2 + P_{22}^2} d\xi_2 = (1 + \alpha_1^2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{12}}{P_{12}^2 + P_{22}^2} d\xi_2 \neq 0,$$

de unde se obține

$$Q_2(\xi_1^0) = \delta\,|\,\xi_1^0\,|^3 S_1 \frac{P_{12} + \alpha P_{22}}{P_{12}^2 + P_{22}^2} d\xi_2 \neq 0.$$

Trecem la cazul doi.

b) Dacă $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) + \alpha_1 P_{21}(\xi_1^0, \xi_2)$ își schimbă semnul, înseamnă că ecuația $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) + \alpha_1 P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ are două rădăcini reale η_1 și η_2.

Păstrăm notațiile și presupunerile de mai înainte : $S_1(\xi_1^0) \neq 0$, $\alpha = \frac{S_2}{S_1}$ și $Q_1(\xi_1^0) = 0$. Știm că $P_{11} > 0$ și $P_{11} + \alpha_1 P_{21}$ își schimbă semnul, prin urmare $\alpha(\xi_1^0) \neq 0$, de exemplu $\alpha(\xi_1^0) > 0$. Dar $Q_1(\xi_1^0) = 0$, deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{11} + \alpha_1 P_{21}}{P_{11}^2 + P_{21}^2} d\xi_2 = 0,$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{11}}{P_{11}^2 + P_{21}^2} d\xi_2 = - \alpha_1(\xi_1^0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{21}}{P_{11}^2 + P_{21}^2} d\xi_2 > 0$$

(deoarece $P_{11} > 0$) și

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{21}}{P_{11}^2 + P_{21}^2} d\xi_2 < 0.$$

Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{12} + \alpha_1 P_{22}}{P_{12}^2 + P_{22}^2} d\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{12}}{P_{12}^2 + P_{22}^2} d\xi_2 + \alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{22}}{P_{12}^2 + P_{22}^2} d\xi_2 ;$$

α_1, precum și a doua integrală din membrul doi sînt pozitive. Arătăm că și prima integrală este pozitivă.

Dacă $P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ și $P_{21}(\xi_1^0, \xi_2)$ au rădăcini comune, atunci avem relația

$$\frac{P_{21}(\xi_1^0, \xi_2)}{P_{12}(\xi_1^0, \xi_2)} = \beta(\xi_1^0) < 0.$$

Folosind condiția ($\mathcal{A}$) și inegalitatea $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{21}}{P_{11}^2 + P_{21}^2} d\xi_2 < 0$, obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{12}(\xi_1^0, \xi_2)}{P_{12}^2(\xi_1^2, \xi_2) + P_{22}^2(\xi_1^0, \xi_2)} d\xi_2 = \beta(\xi_1^0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{21}^2(\xi_1^0, \xi_2)}{P_{11}^2(\xi_1^0, \xi_2) + P_{21}^2(\xi_1^0, \xi_2)} d\xi_2 > 0.$$

Dacă $P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ și $P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ au rădăcini comune, atunci $P_{21}(\xi_1^0, \xi_2)$ își păstrează semnul pe $-\infty < \xi_2 < +\infty$ ($P_{11} > 0$). Pe baza lemei 3.2, și $P_{12}(\xi_1^0, \xi_2)$ își păstrează semnul. Avînd în vedere că $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{12}}{P_{11}^2 + P_{21}^2} d\xi_2 < 0$, rezultă $P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) < 0$ și tot pe baza lemei 3.2,

$P_{12}(\xi_1^0, \xi_2) > 0$. De aici deducem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{12}(\xi_1^0, \xi_2)}{P_{12}^2(\xi_1^0, \xi_2) + P_{22}^2(\xi_1^0, \xi_2)} d\xi_2 > 0.$$

Din această rezultă, ca și în cazul a), că $Q_2 \neq 0$. Prin urmare ținînd cont și de lema 7.2, am demonstrat teorema 2.2.

CONSECINȚĂ. *Dacă sistemul* (1.2) *este tare eliptic, atunci forma pătratică* $\mathcal{I}_2(\xi_1)$ *este pozitiv definită în sensul teoremei* 2.2.

Într-adevăr sistemul fiind presupus tare eliptic, matricea

$$\begin{pmatrix} P_{11} & \frac{P_{12}' + P_{21}}{2} \\ \frac{P_{12} + P_{21}}{2} & P_{22} \end{pmatrix}$$

este pozitiv definită (aceasta reprezentînd tocmai condiția de tare-elipticitate [10]), prin urmare $P_{11} > 0$ și $P_{22} > 0$, deci ne aflăm în cazul 3 din teorema 2.2.

De aici rezultă totodată și o posibilitate de a construi sisteme care nu sînt tare eliptice, dar pentru care teorema 2.2. este adevărată. Putem considera de exemplu orice sistem pentru care $P_{11} > 0$, $P_{22} > 0$, însă pentru care matricea anterioară nu este pozitiv definită. Un astfel de sistem este

$$\begin{aligned} 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 16 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 15 \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} &= 0 \\ -60 \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \tag{26.2}$$

TEOREMA 3.2. *Dacă operatorul L aparține clasei* $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{I}_2(\xi_1)$ *este pozitiv definită în* w_1, w_2, *atunci există o constantă* $K > 0$ *astfel încît inegalitatea*

$$|u|^2 \leqslant K(\|Lu\|^2 + \|u\|^2) \tag{3.2}$$

să aibă loc pentru orice $u \in \widetilde{C}_2(\bar{\Omega}^*)$.

Demonstrație. Avînd în vedere că

$$|u|_2^2 = \|D_1^2 u\|^2 + 2\|D_1 D_2 u\|^2 + \|D_2^2 u\|^2$$

și că pentru orice $u \in \widetilde{C}_2(\bar{\Omega}^*)$ avem $(D_1^2 u_j)^* = \xi_1^2 u_j^*$, $(D_1 D_2 u_j)^* = \xi_1 \xi_2 u_j^*$, ($j = 1, 2$) rezultă că delimitările

$$\|D_1^2 u\|^2 \leqslant K_1(\|Lu\|^2 + \|u\|^2), \quad \|D_1 D_2 u\|^2 \leqslant K_2(\|Lu\|^2 + \|u\|^2)$$

se pot obține ca și în lucrarea [9]; aici ne rămîne doar să demonstrăm inegalitatea

$$\|D_2^2 u\|^2 \leqslant K_3(\|Lu\|^2 + u\|^2).$$

Considerăm operatorul B:

$$B_1 u = D_2^2 u_1, \qquad B_2 u = D_2^2 u_2. \tag{27.2}$$

În baza formulelor (4.2), (5.2), pentru funcțiile $u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$ avem

$$(B_1 u)^* = \xi_2^2 u_1^* + w_1, \qquad (B_2 u)^* = \xi_2^2 w_2^* + w_2. \tag{28.2}$$

Fie α un număr real. Folosind formulele (6.2), (9.2), (13.2) și (28.2), putem scrie

$$I(\xi_1, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{2} |(L_i u)^*|^2 + \alpha \sum_{i=1}^{2} |(B_i u)^*|^2 \right\} d\xi_2 = I_1(\xi_1, \alpha) +$$

$$+ \alpha I_2(\xi_1, \alpha) + \mathcal{J}_2(\xi_1), \tag{29.2}$$

unde

$$I_1(\xi_1, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ A_1 |u_1^* + A_1^{-1}(\mathcal{P}_{11}^{\frac{1}{2}} M_1 + \alpha \xi_2^2 w_1)|^2 +$$

$$+ A_2 |u_2^* + A_2^{-1}(\mathcal{P}_{22}^{\frac{1}{2}} M_2 + \alpha \xi_2^2 w_2)|^2 \} d\xi_2 \tag{30.2}$$

$$I_2(\xi_1, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ A_1^{-1} |\mathcal{P}_{11}^{\frac{1}{2}} w_1 - M_1 \xi_2^2|^2 + A_2^{-1} |\mathcal{P}_{22}^{\frac{1}{2}} w_2 - M_2 \xi_2^2|^2 \} d\xi_2,$$

iar

$$A_1 = P_{11} + \alpha \xi_2^4, \qquad A_2 = P_{22} + \alpha \xi_2^4. \tag{31.2}$$

Observăm că existența lui $I(\xi_1, \alpha)$ rezultă din existența transformatei Fourier a expresiei respective. Dacă $\alpha \geqslant 0$, atunci în membrul doi al formulei (29.2) avem trei integrale pozitive (A_1 și A_2 sînt pozitivi fiindcă L este eliptic [9]), iar din convergența integralei $I(\xi_1, \alpha)$ rezultă deci că fiecare integrală din membrul doi al formulei (29.2) este convergentă. Noi însă trebuie să considerăm astfel de valori negative pentru α, încît să rămînă valabilă inegalitatea $I(\xi_1, \alpha) \geqslant 0$ cerută de teoremă, și totodată integralele din membrul doi $I_1(\xi_1, \alpha)$, $I_2(\xi_1, \alpha)$ să fie convergente.

Alegem $\alpha < 0$ astfel încît $A_1 \geqslant 0$, $A_2 \geqslant 0$. Acest lucru este posibil deoarece L este eliptic [9]. Pentru îndeplinirea acestor condiții α trebuie să fie mai mare decît o constantă negativă C (a se consulta lucrarea [9]).

Din (30.2) rezultă imediat că $I_1(\xi_1, \alpha) \geqslant 0$, dacă $\alpha > C$.

Studiem integrala $I_2(\xi_1, \alpha)$. Notăm $\alpha = -3\eta \left(\eta > 0, \quad \eta < -\frac{C}{3}\right)$.

Pe baza inegalităților $A_1 = \mathcal{P}_{11} + \alpha\xi_2^4 \geqslant 0$, $A_2 = \mathcal{P}_{22} + \alpha\xi_2^4 \geqslant 0$, avem:

$$\mathcal{P}_{11} - 3\eta\xi_2^4 \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad \mathcal{P}_{11} - \eta\xi_2^4 \geqslant \frac{1}{2}(P_{11} + \eta\xi_2^4);$$

$$\mathcal{P}_{22} - 3\eta\xi_2^4 \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad \mathcal{P}_{22} - \eta\xi_2^4 \geqslant \frac{1}{2}(P_{22} + \eta\xi_2^4);$$

dacă $\eta < -\frac{C}{3}$. Folosind aceste inegalități, obținem:

$$\frac{|\mathcal{P}_{11}^{\frac{1}{2}} w_1 - \xi_2^2 M_1|^2}{\mathcal{P}_{11} - \eta\xi_2^4} \leqslant 2\, \frac{|\mathcal{P}_{11}^{\frac{1}{2}} w_1 - \xi_2^2 M_1|^2}{\mathcal{P}_{11} + \eta\xi_2^4},$$

$$\frac{|\mathcal{P}_{22}^{\frac{1}{2}} w_2 - \xi_2^2 M_2|}{\mathcal{P}_{22} - \eta\xi_2^4} \leqslant 2\, \frac{|\mathcal{P}_{22}^{\frac{1}{2}} w_2 - \xi_2^2 M_2|^2}{\mathcal{P}_{22} + \eta\xi_2^4}. \tag{32.2}$$

Integrala $I_2(\xi_1, \eta)$ fiind convergentă pentru $\alpha > 0$, din (32.2) rezultă că $I_2(\xi_1, -\eta)$ este convergentă și atunci cînd $\alpha = -\eta$ este negativ dar $-\eta > \frac{C}{3}$.

Integrala $I(\xi_1, \alpha)$ din formula (29.2) este convergentă pentru orice valoare α, $\mathcal{J}_2(\xi_1)$ nu depinde de α și este convergentă, $I_2(\xi_1, -\eta)$ după cum am stabilit mai sus este convergentă pentru $\eta < -\frac{C}{3}$. De aici rezultă că și $I_1(\xi_1, -\eta)$ este convergentă pentru $\eta < -\frac{C}{3}$. Deci formula (29.2) este adevărată și pentru valori negative $\alpha = -\eta$, dacă $\eta < -\frac{C}{3}$. Avem deci

$$I(\xi_1, -\eta) = \mathcal{J}_2(\xi_1) + I_1(\xi_1, -\eta) - \eta I_2(\xi_1, -\eta) \geqslant \mathcal{J}_2(\xi_1) - \eta I_2(\xi_1 - \eta). \tag{33.2}$$

Pe baza ipotezei, $\mathcal{J}_2(\xi_1)$ este o formă pătratică pozitiv definită în w_1 și w_2. Coeficienții formei pătratice sînt funcții omogene de gradul 1 în $|\xi_1|$. Se arată ușor că și $I_2(\xi_1, -\eta)$ este o formă pătratică în w_1, w_2 și coeficienții formei sînt funcții omogene de gradul 1 în $|\xi_1|$ și continue relativ la η, dacă $\eta < -\frac{C}{3}$. Folosind relațiile (20.2), (29.2), (33.2) obținem

$$I(\xi_1, -\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{2} |(L_i u)^*|^2 - \eta \sum_{i=1}^{2} |(B_i u)^*|^2 \right\} d\xi_2 \geqslant$$

$$\geqslant |\xi_1| \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \beta_{ij} w_i \overline{w}_j - \eta \sum_{i,j=1}^{2} \gamma_{ij} w_i \overline{w}_j \right\}. \tag{34.2}$$

unde $|\xi_1|\gamma_{ij}$ sînt coeficienţii formei pătratice $I_2(\xi_1, -\eta)$, iar η este un număr pozitiv arbitrar mai mic decît $-\frac{C}{3}$. Forma pătratică $\sum\limits_{i,j=1}^{2} \beta_{ij} w_i \overline{w}_j$ cu coeficienţi constanţi fiind pozitiv definită, iar γ_{ij} fiind funcţii mărginite de η, se poate alege un η astfel de mic, încît

$$\sum_{i,j=1}^{2} (\beta_{ij} - \eta\gamma_{ij})\, w_i \overline{w}_j$$

să fie pozitiv semidefinită. Atunci pe baza formulei (34.2) şi a formulei lui Parseval avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi_1, -\eta)\, d\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{2} |(L_i u)^*|^2 - \eta \sum_{i=1}^{2} |(B_i u)^*|^2 \right\} d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \| Lu \|^2 - \eta \| D_2^2 u \|^2 \geqslant 0,$$

ceea ce înseamnă, că

$$\| D_2^2 u \|^2 \leqslant \frac{1}{\eta} \| Lu \|^2 \leqslant \frac{1}{\eta} (\| Lu \|^2 + \| u \|^2).$$

Astfel am demonstrat teorema 3.2.

Trecem în sfîrşit la demonstrarea teoremei 1.2.

Suficienţa condiţiei. Presupunem că ecuaţia

$$P_{11}(\xi_1^0, \xi_2) + i P_{21}(\xi_1^0, \xi_2) = 0 \tag{10.1}$$

are rădăcini separate. În acest caz, conform teoremei 2.2, $\mathcal{J}_2(\xi_1)$ este o formă pătratică pozitiv definită. Atunci pe baza teoremei 3.2, inegalitatea (3.2) este îndeplinită pentru orice $u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$.

Necesitatea condiţiei. Să presupunem că inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\| Lu \|^2 + \| u \|^2) \tag{3.2}$$

se îndeplineşte pentru orice funcţie $u = (u_1, u_2) \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$. Demonstrăm că L este eliptic şi ecuaţia (10.1) are rădăcini complexe separate.

Dacă inegalitatea este adevărată pentru orice $u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$, ea este adevărată şi pentru fiecare $u \in \overset{\circ}{C}_2(\Omega^*)$, de unde rezultă elipticitatea operatorului L (a se vedea lucrarea [9]).

În sfîrşit, presupunem că rădăcinile ecuaţiei (10.1) nu sînt separate, adică ecuaţia (10.1) are două rădăcini în semiplanul complex superior sau inferior. Arătăm că în acest caz inegalitatea (3.2) nu poate să aibă loc pentru orice $u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$.

Notăm rădăcinile neseparate ale ecuaţiei (10.1) cu z_1, z_2 şi presupunem că

$$\operatorname{Im}(z_1) > 0, \qquad \operatorname{Im}(z_2) > 0.$$

Să considerăm la început cazul $z_1 \neq z_2$.

Fie ε un număr pozitiv arbitrar şi

$$g_{11} = (\xi_1^0 x_1 + z_1 x_2 + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}}, \qquad g_{12} = i\,\frac{P_{21}(\xi_1^0, z_1)}{P_{12}(\xi_1^0, z_1)}\, g_{11}$$

$$g_{21} = (\xi_1^0 x_1 + z_2 x_2 + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}}, \qquad g_{22} = \frac{P_{21}(\xi_1^0, z_2)}{P_{12}(\xi_1^0, z_2)}\, g_{21}. \tag{35.2}$$

Vectorii

$$g_1 = (g_{11}, g_{12}) \tag{36.2}$$

$$g_2 = (g_{21}, g_{22})$$

sînt soluţii ale sistemului omogen

$$L_1 u = 0, \quad L_2 u = 0,$$

ceea ce se poate verifica prin înlocuire şi ţinînd cont de lemele 5.2, 6.2. Fie

$$g = g_1 - g_2 = (g_{11} - g_{21}, g_{12} - g_{22}). \tag{37.2}$$

Vectorul $g_1 - g_2$ nu este identic nul, deoarece $z_1 \neq z_2$. Arătăm că

$$g|_{x_2=0} = 0.$$

Intr-adevăr pe baza formulelor (35.2) şi a consecinţei lemelor 3.2 şi 6.2, rezultă

$$g|_{x_2=0} = \Big[(\xi_1^0 x_1 + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}} - (\xi_1^0 x_1 + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}},$$

$$i(\xi_1^0 x_1 + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{P_{21}(\xi_1^0, z_1)}{P_{12}(\xi_1^0, z_2)} - \frac{P_{21}(\xi_1^0, z_2)}{P_{12}(\xi_1^0, z_2)} \right) \Big] = (0, 0).$$

Fie φ o funcţie continuă, de două ori derivabilă în mod continuu în $\overline{\Omega}^*$, egală cu 1 într-o vecinătate a originii, care se anulează într-o fîşie a frontierei Γ_2. Vectorul φg este o funcţie din $\widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$. Fie

$$u = (u_1, u_2) = [\varphi(g_{11} - g_{21}), \varphi(g_{12} - g_{22})]. \tag{38.2}$$

Observăm că $\| u \|$ rămîne mărginită dacă $\varepsilon \to 0$, deoarece în expresia lui g, $(\xi_1^0 x + z_1 x_2 + i\varepsilon)$ intervine la puterea $\frac{1}{2}$, prin urmare integrala $\int\limits_{\Omega^*} |u|^2\, d\Omega$ nu este improprie.

$L_1 u = 0$, $L_2 u = 0$ în acea vecinătate a originii unde $\varphi = 1$, deoarece g este o soluţie a sistemului omogen. Astfel $\| Lu \|^2 = \| L_1 u \|^2 + \| L_2 u \|^2$

rămîne mărginită cînd $\varepsilon \to 0$, deoarece în vecinătatea originii, unde derivatele lui g nu sînt mărginite pentru $\varepsilon \to 0$, avem $L_1 u = 0$, $L_2 u = 0$.

Dacă inegalitatea

$$|u^2| \leqslant K(\| Lu \|^2 + \| u \|^2)$$

ar fi adevărată pentru orice $u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega^*})$, ar rezulta că $| u |_2^2$ rămîne mărginită cînd $\varepsilon \to 0$. Dar integrala

$$| u |_2^2 = \iint\limits_{\Omega^*} \left[\sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} \right|^2 \right] d\Omega$$

este divergentă cînd $\varepsilon \to 0$, deoarece sub semnul integralei duble avem $| \xi_1^0 x_1 + z_1 x_2 + i\varepsilon |^{-3}$ și dimensiunea spațiului este 2.

În consecință, dacă rădăcinile sînt complexe neseparate și distincte, inegalitatea (3.2) nu este adevărată pentru orice $u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*)$.

Pentru cazul rădăcinilor duble se aplică același raționament ca și mai înainte, dacă funcțiile g_{jk} le alegem în felul următor :

$$g_{11} = (\xi_1^0 x_1 + z_1 x_2 + \varepsilon i)^{\frac{1}{2}}, \qquad g_{12} = i \frac{P_{21}(\xi_1^0, z_1)}{P_{12}(\xi_1^0, z_1)} g_{11}$$

$$g_{21} = x_2 \frac{\partial g u}{\partial x_2}, \qquad g_{22} = i \frac{P_{21}(\xi_1^0, z_1)}{P_{12}(\xi_1^0, z_1)} g_{21}$$

și construim funcția $u = (\varphi g_{21}, \varphi g_{22})$.

Observația 1. Din inegalitatea (3.2) rezultă în mod evident și inegalitatea

$$| u |_2^2 + \| u \|^2 \leqslant (K + 1)(\| Lu \|^2 + \| u \|^2) \qquad u \in \widetilde{C}_2(\overline{\Omega}^*).$$

Presupunînd domeniul Ω^* stelar față de o sferă, norma $| u |_2^2 + \| u \|^2$ este echivalentă cu norma $| u |_2^2$, prin urmare teorema 1.2. rămîne valabilă și dacă în locul inegalității (3.2) folosim inegalitatea

$$| u |_2^2 \leqslant K(\| Lu \|^2 + \| u \|^2). \tag{39.2}$$

Observația 2. Inegalitatea (39.2) se poate extinde pe acele elemente ale spațiului $W_2^{(2)}(\Omega^*)$, care se anulează pe Γ și ale căror derivate parțiale de ordinul întîi se anulează pe Γ_2.

Într-adevăr, orice funcție u din clasa indicată se poate aproxima cu un șir convergent $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ din $\widetilde{C}_2(\Omega^*)$ în sensul metricii $W_2^{(2)}(\Omega^*)$. Aceasta înseamnă că șirul $\{u_i\}$ este convergent și în $L_2(\Omega^*)$. Din

$$\| Lu_i \| \leqslant K | u_i |_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots m \ldots),$$

rezultă că $\{Lu_i\}$ converge în $L_2(\Omega^*)$. Trecînd la limită în (39.2), obținem

$$| u |_2^2 \leqslant K(\| Lu \|^2 + \| u \|^2),$$

pentru orice u din $W_2^{(2)}(\Omega^*)$ care se anulează pe Γ și ale cărei derivate de ordinul întîi se anulează pe Γ_2. Această mulțime se notează cu $\widetilde{W}_2^{(2)}(\Omega^*)$.

3. Operatori diferențiali liniari cu coeficienți variabili de ordinul doi în spațiul $W_2^{(2)}(\Omega)$.

Considerăm în spațiul euclidian cu două dimensiuni un domeniu Ω cu frontieră Γ, avînd următoarea proprietate : fiecare punct P de pe frontiera Γ are o vecinătate $V(P)$, astfel încît mulțimea $\overline{V(P) \cap \Omega}$ să se transforme în mod biunivoc într-un domeniu închis de formă particulară folosită în paragraful al doilea și stelară, iar mulțimii $V \cap \Gamma$ să-i corespundă segmentul de pe axa $x_2 = 0$; presupunem de asemenea că atît transformarea cît și inversa sa sînt de două ori derivabile în mod continuu.

Fie operatorul diferențial

$$L_i u = \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl}(x_1, x_2) D_k D_l u_j + \sum_{j,k=1}^{2} b_{ij}^{k}(x_1, x_2) D_k u_j + \sum_{j=1}^{2} c_{ij}(x_1, x_2) u_j, \tag{3.1}$$

unde $a_{ij}^{kl}(x_1, x_2)$, $b_{ij}^{k}(x_1, x_2)$ $c_{ij}(x_1, x_2)$ sînt funcții continue în $\overline{\Omega}$. În acest paragraf vom demonstra teorema 1. 1, enunțată în paragraful întîi și vom stabili de asemenea și alte teoreme importante pentru noi. La început considerăm cîteva leme.

LEMA 1. 3 *Dacă domeniul Ω are proprietățile înșirate mai înainte, iar s și t sînt două numere naturale (s poate fi și 0) astfel încît $s < t$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi o constantă $K(\varepsilon)$, așa încît*

$$| u |_s^2 \leqslant \varepsilon | u |_t + K(\varepsilon) \| u \|^2, \tag{1.3}$$

pentru orice $u = (u_1, u_2) \in C_t(\Omega)$,
unde

$$| u |_t^2 = \sum_{j=1}^{2} \sum_{\mu_1 + \mu_2 \leqq t} \| D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2} u_j \|^2.$$

Această lemă se demonstrează în [2].

Observăm că lema 1. 3. se generalizează pentru funcțiile $u \in W_2^{(t)}(\Omega)$ printr-o simplă trecere la limită.

Fixăm un punct (x_1^0, x_2^0) în Ω. Vom nota

$$L_i' u = \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl}(x_1^0, x_2^0) D_k D_l u_j. \tag{2.3}$$

Demonstrarea teoremei 1. 1. se bazează în special pe următoarea lemă :

LEMA 2.3. *Inegalitatea*

$$|u|_2^2 \leqslant K(\| Lu \|^2 + \| u \|^2, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathring{W}_2^{(2)}(V) \tag{3.3}$$

este adevărată pentru o vecinătate V a punctului fixat (x_1^0, x_2^0) dacă și numai dacă (x_1^0, x_2^0) are o vecinătate W astfel încît să aibă loc inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\| L_1'u \|^2 + \| L_2'u^2 \| + \| u \|^2), \quad u = (u_1, u_2) \in \mathring{W}_2^{(2)}(W). \tag{4.3}$$

Demonstrație. La început stabilim două inegalități ajutătoare. Pentru orice funcție $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ avem

$$L_i u = L_i' u + (L_i - L_i') u, \quad \text{deci} \quad \| L_i u \| \leqslant \| L_i' u \| + \| (L_i - L_i') u \| \quad (i = 1,2)$$

sau, pe baza inegalității elementare $(a + b) \leqslant 2 (a^2 + b^2)$ $(a > 0, \; b > 0)$, rezultă

$$\| L_i u \|^2 \leqslant 2 \| L_i' u \|^2 + 2 \| (L_i - L_i') u \|^2 \quad (i = 1,2). \tag{5.3}$$

Coeficienții operatorului $L_i u$ sînt funcții continue în $\overline{\Omega}$, prin urmare fiecărui număr $\varepsilon > 0$ îi corespunde o vecinătate T a punctului (x_1^0, x_2^0), astfel încît să avem pentru orice $u \in W_2^{(2)}(T)$

$$\sum_{i=1}^{2} \| L_i u - L_i' u \|^2 = \sum_{i=1}^{2} \iint_T \Big| \sum_{j,k,l=1}^{2} \Big[a_{ij}^{kl}(x_1, x_2) - a_{ij}^{kl}(x_1^0, x_2^0) \Big] D_k D_l u_j +$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{2} b_{ij}^{k}(x_1, x_2) D_k u_j + \sum_{j=1}^{2} c_{ij}(x_1, x_2) u_j \Big|^2 d\Omega \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon \iint_T \sum_{j,k,l=1}^{2} | D_k D_l u_j |^2 d\Omega +$$

$$+ N \iint_T \sum_{j=1}^{2} \Big[\sum_{k=1}^{2} | D_k u_j |^2 + | u_j |^2 \Big] d\Omega \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon | u |_2^2 + N |u|_1^2 \tag{6.3}$$

unde N provine din maximul valorilor absolute al coeficienților termenilor de ordinul mai mic decît 2. Aici am folosit inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski și faptul că coeficienții lui L sînt funcții continue în $\overline{\Omega}$, deci și mărginite.

Fie $u = (u_1, u_1) \in W_2^{(2)}(T)$, ε_1 un număr pozitiv arbitrar și ε numărul ales mai înainte. Pe baza formulelor (5.3), (6.3) și (1.3) avem :

$$\| L_1 u \|^2 + \| L_2 u \|^2 \leqslant 2 \| L_1' u \|^2 + 2 \| L_2' u \|^2 + 2 \| (L_1 - L_1') u \|^2 + 2 \| (L_2 - L_2') u \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| L_1' u \|^2 + 2 \| L_2' u \|^2 + \varepsilon | u |_2^2 + 2 N | u |_1^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| L_1' u \|^2 + 2 \| L_2' u \|^2 + \varepsilon | u |_2^2 + 2N(\varepsilon_1 | u |_2^2 + K(\varepsilon_1) \| u \|^2).$$

Alegem $\varepsilon_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2N}$, $K_1 \geqslant 2 \, NK(\varepsilon_1)$. În acest caz, ultima egalitate devine

$$\| L_1 u \|^2 + \| L_2 u \|^2 \leqslant 2 \| L_1' u \|^2 + 2 \| L_2' u \|^2 + 2 \varepsilon | u |_2^2 + K_1 \| u \|^2, \tag{7.3}$$

pentru orice $u \in W_2^{(2)}(T)$.

În mod analog se demonstrează și inegalitatea

$$\| L_1' u \|^2 + \| L_2' u \|^2 \leqslant 2 \| L_1 u \|^2 + 2 \| L_2 u \|^2 + 2 \varepsilon | u |_2^2 + K_2 \| u \|^2. \tag{8.3}$$

Trecem acum la demonstrarea efectivă a lemei.

Să presupunem că inegalitatea (3.3) se îndeplinește pentru orice $u \in \mathring{W}_2^{(2)}(V)$, unde V este o vecinătate a punctului (x_1^0, x_2^0). Fie ε un număr pozitiv arbitrar. După cum am văzut, lui ε îi corespunde o vecinătate T a punctului (x_1^0, x_2^0) astfel încît inegalitatea (7.3) să aibă loc pentru orice $u \in W_2^{(2)}(T)$. Fie $W = V \cap T$. Elementele spațiului $\mathring{W}_2^{(2)}(W)$ prelungite cu 0 în afară de W, aparțin lui $\mathring{W}_2^{(2)}(V)$ și lui $W_2^{(2)}(T)$. Prin urmare, pentru funcțiile $u \in \mathring{W}_2^{(2)}(W)$ au loc inegalitățile (3.3) și (7.3). Din aceste două inegalități pentru $\varepsilon = \frac{1}{4K}$ rezultă

$$|u|_2^2 \leqslant K(\| L_1 u \|^2 + \| L_2 u \|^2 + \| u \|^2) \leqslant K(2 \| L_1' u \|^2 + 2 \| L_2' u \|^2 +$$

$$+ 2 \varepsilon |u|_2^2 + K_1 \| u \|^2 + \| u \|^2) = \frac{1}{2} \mathcal{K}(\| L_1' u \|^2 + \| L_2' u \|^2 + \| u \|^2) + \frac{1}{2} |u|_2^2,$$

unde $\frac{1}{2} \mathcal{K} = \max \{2K, KK_1 + 1\}$. Ultima relație ne dă

$$|u|_2^2 \leqslant \mathcal{K}(\| L_1' u \|^2 + \| L_2' u \|^2 + \| u \|^2), \quad u \in \mathring{W}_2^{(2)}(W),$$

adică tocmai (4.3).

Afirmația inversă se demonstrează la fel, folosind (4.3) și (8.3).

Din această lemă putem deduce o condiție necesară și suficientă pentru ca operatorul L cu coeficienți variabili, să fie eliptic. Formulăm această condiție într-o teoremă.

TEOREMA 1. 3. *Punctul (x_1^0, x_2^0) are o vecinătate V astfel încît inegalitatea*

$$|u|_2^2 \leqslant K (\| L_1 u \|^2 + \| L_2 u \|^2 + \| u \|^2) \tag{3.3}$$

să aibă loc pentru orice $u \in \mathring{W}_2^{(2)}(V)$ dacă și numai dacă L este eliptic în (x_1^0, x_1^0).

Demonstrație. Dacă operatorul L este eliptic în punctul (x_1^0, x_2^0), atunci pe baza lucrării [9] inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\| L' u \|^2 + \| u \|^2)$$

este adevărată pentru orice $u \in \mathring{W}_2^{(2)}(W)$ unde W este o vecinătate arbitrară a punctului (x_1^0, x_2^0). W fiind un domeniu stelar, în locul inegalității de mai sus putem considera inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|L'u\|^2 + \|u\|^2), \qquad u \in \mathring{W}_2^{(2)}(W). \qquad (4.3)$$

Din lema 2.3. rezultă, că există o vecinătate V a punctului (x_1^0, x_2^0), astfel ca (3.3) să aibă loc pentru orice $u \in \mathring{W}_2^{(2)}(V)$.

Invers, dacă punctul (x_1^0, x_2^0) are o vecinătate V astfel ca (3.3) să fie adevărată pentru orice $u \in \mathring{W}_2^{(2)}(V)$, atunci pe baza lemei 2.3. punctul are o vecinătate W astfel încît (4.3) să fie adevărată pentru orice $u \in \mathring{W}_2^{(2)}(W)$. Cu atît mai mult este adevărată inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|L'u\|^2 + \|u\|^2),$$

care pe baza lucrării [9] ne arată că L' este eliptic.

LEMA 3. 3. *Dacă ecuația*

$$P_{11}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) + i\, P_{21}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) = 0$$

are rădăcini complexe separate, atunci și după o transformare liniară ortogonală a variabilelor independente x_1, x_2, caracterul rădăcinilor rămîne același.

Demonstrație. În locul lui Lu putem considera operatorul

$$L_i u = \sum_{j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl}(x_1, x_2) D_k D_l u_j \qquad (i = 1,2),$$

fiindcă P_{11} și P_{21} depind numai de coeficienții a_{ij}^{kl}. Efectuăm schimbarea de variabilă

$$x_1' = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha$$

$$x_2' = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha.$$

Ecuația corespunzătoare lui (10.1) a operatorului transformat va fi

$$P_{11}(x_1, x_2, \cos\alpha, \sin\alpha)(\xi_1^0)^2 + \frac{\partial P_{11}(x_1, x_2, \cos\alpha, \sin\alpha)}{\partial\alpha}\xi_1^0\xi_2 +$$

$$+ P_{11}(x_1, x_2, \sin\alpha, -\cos\alpha)\xi_2^2 + i\Big[P_{21}(x_1\, x_2, \cos\alpha, \sin\alpha)(\xi_1^0)^2 +$$

$$+ \frac{\partial P_{21}(x_1, x_2, \cos\alpha, \sin\alpha)}{\partial\alpha}\xi_1^0\xi_2 + P_{21}(x_1, x_2, \sin\alpha, -\cos\alpha)\xi_2^2\Big] = 0. \qquad (9,3)$$

Coeficientul lui ξ_2^2 în ecuația (9,3) fiind

$$P_{11}(x_1, x_2, \sin\alpha, -\cos\alpha) + i P_{21}(x_1, x_2, \sin\alpha, -\cos\alpha),$$

această expresie nu poate să se anuleze pentru nici o valoare a lui α, fiindcă $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ și fiindcă ecuația (10.1) are rădăcini complexe.

Coeficienții ecuației de gradul doi (9.3) în ξ_2 fiind funcții continue de α, iar coeficientul lui ξ_2^2 fiind diferit de zero, rezultă că rădăcinile ecuației depind în mod continuu de α.

Să presupunem că pentru un α_0, ecuația (9.3) are rădăcini complexe neseparate, de exemplu ambele sînt în semiplanul complex $\mathrm{Im}(z) > 0$. Deci cînd α variază de la 0 la α_0, o rădăcină a ecuației (9.3 trece din semiplanul $\mathrm{Im}(z) > 0$ în semiplanul $\mathrm{Im}(z) < 0$. Am stabilit însă că rădăcinile ecuației (9.3) sînt funcții continue de α; rezultă deci că există un α_1, $0 < \alpha_1 < \alpha_0$, pentru care ecuația (9.3) are o rădăcină reală. Dar aceasta contrazice ipoteza că operatorul L este eliptic.

LEMA 4. 3. *Dacă (x_1^0, x_2^0) este un punct de pe Γ, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca să existe o vecinătate V a lui (x_1^0, x_2^0) astfel încît să aibă loc inegalitatea*

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|Lu\|^2 + \|u\|^2), \qquad u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(2)}(V) \qquad (3.3)$$

este ca L să fie eliptic în (x_1^0, x_2^0) și

$$P_{11}(x_1^0, x_2^0, \xi_1^0, \xi_2) + i P_{21}(x_1^0, x_2^0, \xi_1^0, \xi_2) = 0 \qquad (10.3)$$

să aibă rădăcini complexe separate pentru orice ξ_1^0.

Demonstrație. Vom alege axele de coordonate astfel încît tangenta la Γ în (x_1^0, x_2^0) să fie paralelă cu axa x_1. Fie V o vecinătate a lui (x_1^0, x_1^0) atît de mică, încît să existe o transformare biunivocă între V și un domeniu Ω^*, de formă specială considerată la începutul paragrafului 2. Dacă $x_2 = \varphi(x_1)$ este ecuația arcului de frontieră $\Gamma \cap V$ (funcția φ este presupusă de două ori derivabilă), atunci prin transformarea

$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2 - \varphi(x_1) \qquad (11,3)$$

mulțimea $V \cap \Omega$ se transformă într-un domeniu de formă dorită. După această schimbare de variabile, operatorul L se transformă într-un alt operator $\mathcal{L}$ de ordinul 2. În urma transformării $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(2)}(V)$ se înlocuiește cu $\widetilde{W}_2^{(2)}(\Omega^*)$.

Demonstrăm întîi necesitatea condiției. Să admitem deci că inegalitatea (3.3) este adevărată pentru orice $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(2)}(V)$. Efectuînd transformarea indicată obținem inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|\mathcal{L}u\|^2 + \|u\|^2),$$

pentru orice $u \in \widetilde{W}_2^{(2)}(\Omega^*)$. Făcînd același raționament ca și la demonstrarea lemei 2. 3, obținem inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|\mathcal{L}'u\|^2 + \|u\|^2), \qquad u \in \widetilde{W}_2^{(2)}(\Omega_1^*),$$

unde $\mathcal{L}'u$ este operatorul obţinut din $\mathcal{L}u$, considerînd coeficieţii în punctul (x_1^0, x_2^0) şi neglijînd termenii de ordin mai mic decît 2, iar Ω_1^* este un domeniu de aceeaşi formă ca Ω^* şi $\Omega_1^* \subset \Omega^*$. Este evident că $\mathcal{L}'u$ coincide cu $L'u$, deci avem

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|L'u\|^2 + \|u\|^2), \qquad u \in \widetilde{W}_2^{(2)}(\Omega_1^*),$$

unde $L'u$ este definit prin formula (2.3). Pe baza teoremei 1.2, din această inegalitate rezultă că rădăcinile ecuaţiei (10.3) sînt separate.

Invers, dacă ecuaţia (10.3) are rădăcini complexe separate, atunci pe baza teoremei 1.2, inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|\mathcal{L}'u\|^2 + \|u\|^2)$$

este adevărată pentru orice $u \in \widetilde{W}_2^{(2)}(\Omega^*)$, unde Ω^* este de exemplu domeniul obţinut la demonstrarea neeesităţii. Folosind încă odată metoda aplicată la demonstrarea lemei 2. 3, obţinem inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|\mathcal{L}u\|^2 + \|u\|^2)$$

pentru orice $u \in \widetilde{W}_2^{(2)}(\Omega_2^*)$, unde Ω_2^* este un domeniu de formă particulară şi $\Omega_2^* \subset \Omega^*$. Există o vecinătate W a punctului (x_1^0, x_2^0) astfel încît $W \cap \overline{\Omega}$, prin transformarea $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2 - \varphi(x_1)$, să se transforme în Ω_3^*. Fie Ω_3^* imaginea lui W. Este evident că inegalitatea

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|\mathcal{L}u\|^2 + \|u\|^2)$$

este adevărată şi pentru funcţiile din $\widetilde{W}_2^{(2)}(\Omega_3^*)$. Efectuînd transformarea inversă obţinem inegalitatea (3.3) pentru orice $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(W)$, ceea ce demonstrează suficienţa condiţiei.

LEMA 5. 3. *Inegalitatea* (3.3) *este adevărată pentru orice* $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ *dacă şi numai dacă fiecare punct* $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ *are o vecinătate* V *astfel încît* (3.3) *să fie adevărată pentru orice* $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(V)$.

Necesitatea condiţiei este evidentă.

Suficienţa condiţiei se stabileşte astfel. Să presupunem că fiecare punct $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ are o vecinătate V astfel ca (3.3) să fie adevărată pentru orice $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(V)$. Aceste vecinătăţi formează o acoperire deschisă a domeniului $\overline{\Omega}$. Pe baza lemei lui Heine-Borel, din această acoperire se poate extrage un număr finit de vecinătăţi $V_1, V_2, \ldots, V_n$ care formează de asemenea o acoperire a lui $\overline{\Omega}$. Fie

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(x_1, x_2) \tag{12.3}$$

repartiţia unităţii corespunzătoare acoperirii $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ([7]). Funcţiile ζ_i sînt ori de cîte ori derivabile în $\overline{\Omega}$, $0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1$ în Ω şi ζ_i au suport compact în V_i.

Din proprietăţile funcţiilor ζ_i rezultă că pentru $u = (u_1, u_2) \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$, $u\zeta_i = (u_1\zeta_i, u_2\zeta_i) \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(V_i)$ şi de aceea, în baza ipotezei adoptate avem

$$|\zeta_i u|_2^2 \leqslant K(\|L_1\zeta_i u\|^2 + \|L_2\zeta_i u\|^2 + \|\zeta_i u\|^2) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{13.3}$$

Dar $0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1$; prin urmare $\|\zeta_i u\| \leqslant \|u\|$ şi

$$|\zeta_i u|_2^2 \leqslant K(\|L_1\zeta_i u\|^2 + \|L_2\zeta_i u\|^2 + \|u\|^2) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14.3}$$

Insumînd aceste inegalităţi obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} |\zeta_i u|_2^2 \leqslant K\left\{\sum_{i=1}^{n} (\|L_1\zeta_i u\|^2 + \|L_2\zeta_i u\|^2 + \|u\|^2)\right\}. \tag{15.3}$$

Din (12.3) rezultă

$$|u|_2^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} \zeta_i u\right|_2^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i u|_2^2. \tag{16.3}$$

Inlocuind funcţia $u\zeta_i$ în Lu

$$L_j(\zeta_i u) = \zeta_i L_j u + T_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n\,;\ j = 1, 2)$$

şi aplicînd inegalităţile folosite la lema 2.3, obţinem

$$\|L_j\zeta_i u\|^2 \leqslant 2\|\zeta_i L_j u\|^2 + 2\|T_j\|^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n\,;\ j = 1, 2).$$

Operatorul T_j conţine numai derivate de ordin mai mic decît 2 ale lui u. Coeficienţii operatorului L sînt funcţii continue în $\overline{\Omega}$, iar $0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1$, prin urmare

$$\|T_j\|^2 \leqslant M_j |u|_1^2 \qquad (j = 1, 2).$$

Fie ε un număr pozitiv arbitrar dat. Atunci pe baza lemei 1.3. putem scrie

$$\|L_j\zeta_i u|^2 \leqslant 2\|\zeta_i L_j u\|^2 + M_j\varepsilon|u|_2^2 + M_jK(\varepsilon)\|u\|^2 \leqslant 2\|\zeta_i L_j u\|^2 +$$
$$+ \varepsilon_1|u|_2^2 + k\|u\|^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots n,\ j = 1, 2), \tag{17.3}$$

unde

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \max[M_1, M_2], \qquad k = \max[M_1K(\varepsilon),\ M_2K(\varepsilon)].$$

Fie $\varepsilon = \dfrac{1}{4n\max(M_1, M_2)}$; atunci $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{4n}$ şi din (15.3), (16.3), 17.3) rezultă

$$|u|_2^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i u|_2^2 \leqslant K\left\{\sum_{i=1}^{n} (\|L_1\zeta_i u\|^2 + \|L_2\zeta_i u\|^2 + \|u\|^2)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2K\left\{\sum_{i=1}^{n} (\|\zeta_i L_1 u\|^2 + \|\zeta_i L_2 u\|^2)\right\} + 2n\varepsilon_1|u|_2^2 + (nK + 2nk)\|u\|^2.$$

Dar $0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1$ şi $2n\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, prin urmare putem scrie

$$|u|_2^2 \leqslant 2Kn(\|L_1u\|^2 + \|L_2u^2\|) + \frac{1}{2}|u|_2^2 + (nK + 2nk)\,\|u\|^2. \qquad (18.3)$$

Fie $\mathcal{K} = \max[4\,Kn, 2(n\,K + 2\,nk)]$; atunci

$$|u|_2^2 \leqslant \mathcal{K}(\|L_1u\|^2 + \|L_2u\|^2 + \|u\|^2)$$

pentru orice $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$, ceea ce demonstrează lema 5.3.

Demonstrarea teoremei 1.1. Pe baza lemei 5. 3, inegalitatea (3.3) se îndeplineşte pentru orice $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ atunci şi numai atunci cînd fiecare punct $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ are o vecinătate V astfel încît inegalitatea (3.3) să fie adevărată pentru orice $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(V)$.

Dacă (x_1, x_2) este un punct interior al lui Ω, atunci el are o vecinătate V conţinută în Ω. În acest caz $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(V) = \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(V)$ şi pe baza teoremei 1.3, condiţia necesară şi suficientă ca (3.3) să aibă loc pentru orice $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(V)$ este ca L să fie eliptic în punctul (x_1, x_2).

Dacă $(x_1, x_2) \in \Gamma$ atunci pe baza lemei 4.3, condiţia necesară şi suficientă ca (3.3) să aibă loc pentru orice $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(V)$ este ca ecuaţia $P_{11}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) + i\,P_{2}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) = 0$ să aibă rădăcini complexe separte. Cu aceasta, teorema 1.1. este complet demonstrată.

Inegalitatea (9.1) este strîns legată de rezolvabilitatea problemelor la limită.

Introducînd un spaţiu Hilbert corespunzător, cu ajutorul teoremei 1.1. se poate demonstra următoarea teoremă :

TEOREMA 2.3. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca problema la limită*

$$L_j u = f_j \quad \text{în } \Omega \qquad (f_j \in L_2(\Omega)\,;\, j = 1,2)$$
$$u_j|_\Gamma = 0$$

să fie de tip Fredholm, este ca operatorul L din clasa $\mathcal{A}$ să fie eliptic în Ω şi în fiecare punct de frontieră ecuaţia

$$P_{11}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) + i P_{21}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) = 0$$

să aibă rădăcini complexe separate.

Pentru demonstrarea acestei teoreme este necesar să presupunem că coeficienţii a_{ij}^{kl} sînt de două ori derivabili, b_{ij}^{kl} odată derivabili în mod continuu, iar c_{ij} funcţii continue în $\overline{\Omega}$.

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ, СВЯЗАННЫХ С РАЗРЕШИМОСТЬЮ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Известно что задача Дирихле не является задачей типа Фредгольма для любой эллиптической системы уравнений с частными производными. Разрешимость задачи Дирихле тесно связана с неравенством

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|Lu\|^2 + \|u\|^2) \qquad (1)$$

на $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$, где метрика $|u|_2$ определяются формулой (8, 1), Lu является эллиптическим дифференциальным оператором, определённый формулой (3, 1), а $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ является множеством функций $L_2(\Omega)$, которые обращаются в нуль на границе области, имеют обобщенные частные производные до второго порядка включительно и производные функций принадлежат множеству $L_2(\Omega)$.

В настоящем труде для класса эллиптических систем, обозначенного через $\mathcal{A}$ и охарактеризованного тождеством $P_{11}P_{12}+P_{21}P_{22}=0$ (где P_{ij} определяются формулой (5. 1)) даётся необходимое и достаточное условие для того, чтобы неравенство (1) имело место для любой функции в $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$. При помощи этого неравенства показывается, что то же условие необходимо и достаточно и для того, чтобы задача Дирихле, касающаясь неоднородного уравнения с однородными данными на границе была типа Фредгольма.

Основной результат труда формулируется в следующей теореме:

ТЕОРЕМА. *Необходимым и достаточным условием для того чтобы существовала константа $K > 0$ такая, чтобы неравенство (1) имело место на $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ для системы Lu класса $\mathcal{A}$ является то, чтобы оператор L был эллиптическим на Ω и в граничных точках уравнение второго степени по ξ_2*

$$P_{11}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_1) + i P_{21}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) = 0$$

имело один корень в комплексной полуплоскости $\operatorname{Im}(z) > 0$ и один корень в комплексной полуплоскости $\operatorname{Im}(z) < 0$ для любого вещественного $\xi_1^0 \neq 0$.

SUR QUELQUES INÉGALITÉS LIÉES À LA POSSIBILITÉ DE RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET

RÉSUMÉ

On sait que le problème de Dirichlet n'est pas un problème du type de Fredholm pour tout système d'équations aux dérivées partielles elliptiques. La possibilité de résolution du problème de Dirichlet est étroitement liée à l'inégalité

$$|u|_2^2 \leqslant K(\|Lu\|^2 + \|u\|^2) \tag{1}$$

sur $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$, où la métrique $|u|_2$ est définie par la formule (8.1), Lu est un opérateur différentiel elliptique, défini par la formule (3,1), et $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions dans $L_2(\Omega)$, qui s'annule sur la frontière du domaine, ont des dérivées partielles généralisées jusqu'au second ordre y compris, et les dérivées des fonctions appartiennent à $L_2(\Omega)$.

Dans le présent travail on donne pour une classe de systèmes elliptiques notée par $\mathcal{A}$ et caractérisée par l'identité $P_{11}P_{12} + P_{21}P_{22} = 0$ (où P_{ij} sont définis par (5.1)), la condition nécessaire et suffisante pour qu'ait lieu l'inégalité (1) pour toute fonction de $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$. A l'aide de cette inégalité on montre que la même condition este nécessaire et suffisante aussi pour que le problème de Dirichlet relatif à une équation non-homogène aux données homogènes sur la frontière soit du type de Fredholm.

Le principal résultat du travail est formulé dans le théorème suivant :

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une constante* $K > 0$ *telle que l'inégalité* (1) *ait lieu sur* $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ *pour le système* Lu *de la classe* $\mathcal{A}$, *est que l'opérateur* L *soit elliptique dans* Ω *et que dans les points de frontière, l'équation de deuxième degré dans* ξ_2

$$P_{11}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) + iP_{21}(x_1, x_2, \xi_1^0, \xi_2) = 0$$

ait une racine dans le semi-plan complexe Im $(z) > 0$ *et une racine dans le semi-plan complexe* Im $(z) < 0$ *pour n'importe quel* $\xi_1^0 \neq 0$ *réel.*

BIBLIOGRAFIE

1. Бицадзе А. В., *О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными.* Успехи Мат. Наук, **III**, *6*, 211—212 (1948).
2. Ehrling G., *On a type of eigenvalue problems for certain elliptic differential operators.* Math. Scand., **2**, 267—285 (1954).
3. Garding L., *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations.* Math. Scand., **1**, 55—72 (1953).
4. Чусева О. В., *О граничных задачах для сильно эллиптических систем,* Докл. Акад. Наук СССР, **102**, 1069—1072 (1955).

5. Hörmander L., *On the theory of general partial differential operators.* Acta Math., **94**, 161—284 (1955).
6. Schechter M., *Coerciveness of linear partial operators for functions satisfying zero Dirichlet-type boundary data.* Comm. Pure and Appl. Math., **11**, 2, 153—174 (1958).
7. Schwartz L., *Théorie des distributions.* Paris, 1950—1951.
8. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике,* Ленинград, 1950.
9. Szilágyi P., *O observaţie asupra sistemelor eliptice.* Studii şi cercet. de matem. (Cluj), **VIII**, 183—191 (1962).
10. Вишик М. И., *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений.* Матем. сборник, **29 (71)**, *3*, 615—676 (1951).

Primit la 10. XII. 1962.