# DESPRE REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE NELINIARE PRIN METODA IPERBOLELOR TANGENTE GENERALIZATE (I)

DE

BÉLA JANKÓ
(Cluj)

*Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 2 aprilie 1963, a Institutului de calcul al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj.*

Considerăm ecuaţia operaţională $P(x) = 0$, $P(x)$ fiind o operaţie neliniară definită în domeniul $S$ complet şi convex al spaţiului normat $X$ şi cu valori în $X$. Mai presupunem că operaţia $P(x)$ este continuă şi admite derivate de tip Fréchet pînă la ordinul 3.

Să consideră metoda de iteraţie

$$x_{n+1} = x_n - \left[I - \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\,\Gamma_n P(x_n)\right]^{-1}\Gamma_n P(x_n) \tag{1}$$

unde s-a notat $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$. La aplicarea procedeului se alege în prealabil aproximaţia iniţială $x_0 \in S \subset X$ şi apoi elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $\ldots \in X$ se calculează succesiv prin formula (1).

În cele ce urmează vom stabili două teoreme referitoare la existenţa soluţiei $P(x) = 0$, precum şi pentru convergenţa metodei date prin algoritmul (1).

TEOREMA 1. *Presupunem că pentru aproximaţia iniţială $x_0$ sînt îndeplinite următoarele condiţii* :

1°. *Pentru derivata Fréchet $P'(x_0)$ există operaţia inversă $\Gamma_0$ şi are loc delimitarea*

$$\|\Gamma_0\| \leqslant B_0.$$

2°. *Avem delimitarea*

$$\left\|\left[I - \frac{1}{2}\Gamma_0 P''(x_0)\,\Gamma_0 P(x_0)\right]^{-1}\Gamma_0 P(x_0)\right\| \leqslant \eta_0.$$

3°. *Derivatele Fréchet de ordinul* 2 *resp.* 3 *sînt uniform mărginite în domeniul* $S(x_0, r)$,

$$\| P''(x) \| \leqslant M, \qquad \| P''(x) \| \leqslant N.$$

*unde* $S(x_0, r)$ *este o sferă în spațiul lui Banach* $X$ *cu centrul în* $x_0$ *și de rază* $r = 2\eta_0$.

4°. $h_0 = B_0 M \eta_0 \leqslant \frac{1}{2}$.

5°. $\rho_0 = \frac{5}{4 - 2h_0} + \frac{5N}{6B_0M^2} \leqslant 4$.

*În aceste condiții, pentru ecuația operațională* $P(x) = 0$ *există o soluție* $x^* \in S(x_0, r)$ *care este limita aproximațiilor* $x_n$. *Rapiditatea convergenței se caracterizează prin delimitarea*

$$\| x^* - x \| \leqslant 2^{1-n} (2h_0)^{3^n - 1} \eta_0.$$

*Demonstrație*. Arătăm că în trecerea de la $x_0$ la $x_1$, condițiile 1°—5° rămîn satisfăcute.

a) Din condițiile 2°—4°, din formula (1) și în baza teoremei lui Banach rezultă

$$\| \Gamma_1 \| \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1, \tag{2}$$

adică condiția 1° este îndeplinită pentru aproximația $x_1$.

b) Considerăm formula generalizată a lui Taylor pentru operația $\Gamma_0 P(x)$,

$$\| \Gamma_0 P(x_1) - \Gamma_0 P(x_0) - (x_1 - x_0) - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{6} \| \Gamma_0 P'''(\xi_0) \| \, \| x_1 - x_0 \|^3, \tag{3}$$

unde $\xi_0 = x_0 + t_0(x_1 - x_0)$. Folosind formula (1) pentru $n = 0$, se obține ușor că

$$\Gamma_0 P(x_0) + (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \{ \Gamma_0 P''(x_0) ( \Gamma_0 P''(x_0))(x_1 - x_0) \} (x_1 - x_0). \tag{4}$$

Ținînd seama de relațiile (3), (4) și de condițiile 1°—4° rezultă delimitarea

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \frac{1}{4} B_0^2 M^2 \bar{\eta}_0 \eta_9^2 + \frac{1}{6} B_0 N \eta_0^3, \tag{5}$$



unde s-a notat $\bar{\eta}_0 = \| \Gamma_0 P(x_0) \|$. Pentru aceasta putem stabili ușor delimitarea pornind de la formula (1), astfel

$$\bar{\eta}_0 \leqslant \frac{\eta_0}{1 - \frac{h_0}{2}}. \tag{6}$$

Relația (5) poate fi scrisă sub forma

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \frac{1}{4} B_0^2 M^2 \frac{\eta_0^3}{1 - \frac{h_0}{2}} + \frac{1}{6} B_0 N \eta_0^3. \tag{7}$$

Înmulțind inegalitatea (5) cu norma

$$\| H \| = \| [I - \Gamma_0(P'(x_0) - P'(x_1))]^{-1} \|$$

unde

$$\|H\| \leqslant \frac{1}{1 - h_0},$$

se obține

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \frac{h_0^2 \eta_0}{1 - h_0} \left( \frac{1}{4 - 2h_0} + \frac{N}{6 B_0 M^2} \right) = \Delta_1. \tag{7'}$$

De aici rezultă

$$\| x_2 - x_1 \| = \eta_1 \leqslant \frac{\Delta_1}{1 - B_0 M \Delta_1}. \tag{8}$$

Folosind delimitarea (8), cu ajutorul condiției 5° poate fi stabilită inegalitatea

$$\eta_1 \leqslant 2h_0^2 \eta_0 \leqslant \frac{\eta_0}{2}. \tag{9}$$

Astfel condiția 2° este verificată pentru $x_1$.

c) Condiția 3° este de asemenea satisfăcută fiindcă, după cum vom vedea la sfîrșitul demonstrației, $x_1$ și $\xi_0$ rămîn în sfera $S(x_0, 2\eta_0)$.

d) Din inegalitățile (9) și (2) obținem

$$h_1 \leqslant 4h_0^3 \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2},$$

deci și condiția 4° este îndeplinită.

e) În fine, din $B_1 > B_0$ și $h_1 \leqslant h_0$ urmează că

$$\rho_1 < \rho_0 < 4.$$

În consecință, condițiile 1°—5° sînt îndeplinite pentru $x_1$, unde cantitățile $B_0$, $\eta_0$, $h_0$, $\rho_0$ au fost înlocuite cu $B_1$, $\eta_1$, $h_1$, $\rho_1$.

Pe baza inducției complete se ajunge la relațiile

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}} \leqslant 2B_{n-1} \tag{10}$$

$$\eta_n \leqslant 2h_{n-1}^2 \eta_{n-1} \tag{11}$$

$$h_n \leqslant 4h_{n-1}^3 \tag{12}$$

$$\rho_n = \frac{5}{4 - 2h_n} + \frac{5N}{6B_n M^2} \leqslant 4. \tag{13}$$

Apoi din (11) și (12) rezultă

$$\eta_n \leqslant 2^{-n}(2h_0)^{3^n-1}\eta_n. \tag{14}$$

Se știe că $\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \eta_n$ și atunci, folosind relația (14), obținem

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant 2^{1-n}(2h_0)^{3^n-1}(1 - 2^{-p})\eta_0. \tag{15}$$

Sfera $S$ fiind completă, rezultă că există limita

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Dacă în relația (15) facem $p \to \infty$, atunci se obține

$$\| x^* - x_n \| \leqslant 2^{1-n}(2h_0)^{3^n-1}\eta .$$

Trebuie să mai arătăm că atît $x_n$, cît și $\xi_{n-1}$ rămîn în sfera $S(x_0, 2\eta_0)$, unde

$$\xi_{n-1} = x_{n-1} + t_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Într-adevăr

$$\| x_0 - x_n \| \leqslant \| x_0 - x_1 \| + \| x_1 - x_2 \| + \ldots + \| x_{n-1} - x_n \| \leqslant$$
$$\leqslant \eta_0 + \frac{\eta_0}{2} + \ldots + \frac{\eta_0}{2^n} < 2\eta_0.$$

Analog se demonstrează inegalitatea

$$\| x_0 - \xi_{n-1} \| < 2\eta_0.$$

Rămîne să mai verificăm dacă $x^*$ satisface ecuația operațională $P(x) = 0$. Pentru aceasta, considerăm identitatea (4) sub forma

$$P(x_0) + P'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2} P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 =$$
$$= \frac{1}{4} P''(x_0)[\Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_0))(x_1 - x_0)](x_1 - x_0). \tag{4'}$$



Atunci se obține delimitarea

$$\| P(x_1) \| \leqslant \frac{h_0^2}{B_0}\left(\frac{1}{4 - 2h_0} + \frac{N}{6B_0 M^2}\right)\eta_0 \leqslant \frac{4}{5}\,\frac{h_0^2}{B_0}\,\eta_0, \tag{7a}$$

iar pentru cazul $n$ avem

$$\| P(x_n) \| \leqslant \frac{4}{5}\,\frac{h_{n-1}^2}{B_{n-1}}\,\eta_{n-1}. \tag{7b}$$

Dacă ne folosim de relația (7a) pentru cazul $n$, atunci se obține ușor că pentru $n \to \infty$, $\lim \| P(x_n) \| = 0$. Pe baza continuității operației $P(x)$, avînd în vedere și faptul că $x_n \to x^*$, obținem

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = P(x^*) = 0.$$

*Observație*. Menționăm că $\Delta_1 < \delta_1$, unde $\delta_1$ înseamnă delimitarea corespunzătoare din lucrarea [1]. Observăm totodată că $\rho_0 \leqslant 4$ este mai puțin restrictivă decît condiția $R_0 \leqslant 9$ (vezi lucrarea [1]).

TEOREMA 2. *Dacă avem îndeplinite condițiile*:

1°. $\| \Gamma(x) \| \leqslant B < +\infty$ *pentru orice* $x \in S$, *unde s-a notat* $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$, *iar* $S$ *este o sferă în* $X$ *definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant K\eta$ *și* $K = \sum_{i=0}^{\infty} (hf)^{3^i-1}$.

2°. *Avem delimitarea*

$$\| x_1 - x_0 \| \leqslant \eta < +\infty.$$

3°. *Există derivatele de tip Fréchet pînă la ordinul* 3 *și*

$$\| P''(x) \| \leqslant M, \qquad \| P'''(x) \| \leqslant N$$

*pentru orice* $x \in S$.

4°. *Sînt îndeplinite inegalitățile*

$$h = B\eta M < 2 \quad \text{și} \quad hf < 1,$$

*unde am notat*

$$f^2 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2}}\left(\frac{1}{4 - 2h} + \frac{N}{6BM^2}\right).$$

*Atunci ecuația operațională* $P(x) = 0$ *admite o soluție* $x^* \in S$ *la care tind aproximațiile succesive calculate cu ajutorul procedeului* (1). *Rapiditatea convergenței se exprimă prin evaluarea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant K\eta (hf)^{3^n-1}.$$

*Demonstrație.* Pornind de la formula (7a), în condițiile teoremei 2 se ajunge ușor la delimitarea

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant h^2 \eta \left( \frac{1}{4 - 2h} + \frac{N}{6BM^2} \right) = \Delta,$$

unde $\Delta < \eta$. De aici

$$\| x_2 - x_1 \| \leqslant \frac{\Delta}{1 - \dfrac{h}{2}}$$

sau

$$\| x_2 - x_1 \| \leqslant \frac{B^2 M^2}{1 - \dfrac{h}{2}} \left( \frac{1}{4 - 2h} + \frac{N}{6BM^2} \right) \| x_1 - x_0 \|^3.$$

Prin inducție completă se stabilește

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant B^2 M^2 f^2 \| x_n - x_{n-1} \|^3$$

de la care se ajunge la delimitarea

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant (hf)^{3^n - 1} \eta. \tag{16}$$

Cu ajutorul inegalităților

$$\| x_0 - x_n \| \leqslant \| x_0 - x_1 \| + \| x_1 - x_2 \| + \ldots + \| x_{n-1} - x_n \| \leqslant$$
$$\leqslant \eta \sum_{i=0}^{n-1} (hf)^{3^n - 1} < K\eta$$

se arată faptul că aproximațiile $x_n \in S$ pentru orice $n$.

Avînd în vedere faptul că $S$ este complet, în baza inegalității

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \eta \sum_{i=n}^{n+p-1} (hf)^{3^i - 1} < K \eta (hf)^{3^n - 1}$$

rezultă că $x_n \to x^* \in S \subset X$.

Astfel pentru $p \to \infty$ avem

$$\| x^* - x_n \| < K\eta (hf)^{3^n - 1}.$$

Faptul că $P(x^*) = 0$ se demonstrează analog ca în cazul teoremei precedente.

*Observație.* Facem mențiunea că $g > f$, unde $g$ este notația corespunzătoare din lucrarea [2].



## О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ОБОБЩЕННЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ (I)

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде исследуется приближённое решение нелинейного операционального уравнения $P(x) = 0$ методом обобщённых касательных гипербол. Были установлены новые условия сходимости. Так, например условие $\rho_0 \leqslant 4$ менее ограничительно, чем условие $R_0 \leqslant 9$, данное в труде [1].

## SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON-LINÉAIRES PAR L MÉTHODE DES HYPERBOLES TANGENTES GÉNÉRALISÉES (I)

### RÉSUMÉ

On étudie la résolution approximative de l'équation opérationnelle non-linéaire $P(x) = 0$ par la méthode des hyperboles tangentes généralisées. On a établi de nouvelles conditions de convergence. Ainsi par exemple la condition $\rho_0 \leqslant 4$ est moins restrictive que la condition $R_0 \leqslant 9$ donnée dans le travail [1].

### BIBLIOGRAFIE

1. Мертвецова М. А., *Аналог процесса касакельных гипербол для общих функциональных уарвнений*. Доклады Акад. Наук. СССР, **88**, *4*, 611—614 (1953).
2. Мираков В. Е., *О сходимости метода касательных гипербол для нелинейных функциональных уравнений при условии типа Коши*. Труды Мокосвкого физ. — техн. ин-та. **1**, 204—213 (1958).

Primit la 28. III. 1963.