

CONTRIBUTIUNEA REZOLUTIVĂ LA TEORIA UNUI CLAS DE FUNCȚII TRANSCENDENTE
DE CĂROR COEFICIENȚI VERIFICĂ MAI MULTE
RELAȚII LINIARE

REZUMAT

Se rezolvă un caz particular de cel mai mic grad al funcțiilor care au
un număr finit de rădăcini în planul complex, utilizând un rezultat al lui
G. Polya. Se verifică că aceste funcții satisfac mai multe relații liniare
decît în cazul general. Se discută și problema de existență a unor astfel
de funcții care să satisfacă un număr finit de relații liniare dar să
nu satisfacă nici una din celelalte.

INTRODUCERE

1. Contribuția la teoria unuia din clasele de funcții transcendente
de grad finit de rădăcini în planul complex, utilizând un rezultat al lui
G. Polya. Se verifică că aceste funcții satisfac mai multe relații liniare
decît în cazul general. Se discută și problema de existență a unor astfel
de funcții care să satisfacă un număr finit de relații liniare dar să
nu satisfacă nici una din celelalte.
2. Contribuția la teoria unuia din clasele de funcții transcendente
de grad finit de rădăcini în planul complex, utilizând un rezultat al lui
G. Polya. Se verifică că aceste funcții satisfac mai multe relații liniare
decît în cazul general. Se discută și problema de existență a unor astfel
de funcții care să satisfacă un număr finit de relații liniare dar să
nu satisfacă nici una din celelalte.
3. Contribuția la teoria unuia din clasele de funcții transcendente
de grad finit de rădăcini în planul complex, utilizând un rezultat al lui
G. Polya. Se verifică că aceste funcții satisfac mai multe relații liniare
decît în cazul general. Se discută și problema de existență a unor astfel
de funcții care să satisfacă un număr finit de relații liniare dar să
nu satisfacă nici una din celelalte.

1960 11 1960 11

POLINOAME DE ABATERE MINIMĂ DE LA ZERO PE O MULȚIME COMPACTĂ DIN PLANUL COMPLEX, AI CĂROR COEFICIENȚI VERIFICĂ MAI MULTE RELAȚII LINIARE

DE
I. MARUȘCIAC
(Cluj)

1. În nota [4] s-au studiat polinoamele care se abat cel mai puțin de la zero pe o mulțime compactă din plan și ai căror coeficienți verifică o relație liniară dată, folosind un procedeu al lui G. Polya, care face legătura între cea mai bună aproximație exponențială și cea uniformă a unei funcții pe o mulțime compactă dată. În această notă se studiază cu aceeași metodă polinoamele care se abat cel mai puțin de la zero pe o mulțime compactă din plan în clasa polinoamelor ai căror coeficienți verifică mai multe relații liniare date.

O astfel de problemă a fost studiată, după câte știm, de V. S. Videnski [6] în cazul unei singure relații, și de E. G. Golștein [3] în cazul mai general, cînd în afară de un număr de relații liniare coeficienții polinomului mai sînt supuși și la alte restricții liniare.

În această notă vom da o formă specială polinomului care se abate cel mai puțin de la zero pe o mulțime compactă din planul complex, formă care rezultă ca o consecință a folosirii metodei lui Polya și care extinde forma dată în nota [4] polinomului de abatere minimă în cazul unei singure relații.

2. Fie deci K o mulțime compactă din planul complex, $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$ niște funcții complexe oarecari continue și liniar independente pe mulțimea compactă K .

Se pune problema găsirii unui polinom generalizat

$$P'_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(z) \tag{1}$$

care se abate cel mai puțin de la zero pe mulțimea compactă K , în următoarele $r + 1$ condiții suplimentare impuse coeficienților a_0, a_1, \dots, a_n :

$$L_i(P'_n) = \sum_{k=0}^n \alpha_{ik} a_k = 1, \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad 0 \leq r < n, \quad (2)$$

unde α_{ik} sînt niște numere complexe date cu rang $\|\alpha_{ik}\| = r + 1$.

Polinoamele (1) ai căror coeficienți verifică condițiile (2) le vom numi, pentru prescurtare, *polinoame de tipul $r + 1$* .

În lucrarea [3] amintită mai sus, se dau condiții necesare și suficiente pentru polinomul $M'_n(z)$ care se abate cel mai puțin de la zero pe mulțimea K , arătîndu-se totodată cum această problemă se poate reduce la problema analoagă în care însă mulțimea K este finită. De altfel, acest rezultat mai reiese și din rezultatul general a lui L. G. Schneirelman [7] aplicat acestui caz. De aceea, este important studiul cazului unei mulțimi finite.

Mulțimea punctelor $z_\nu \in K$, $\nu = 0, 1, \dots, m$, $m \leq 2(n - r) + 1$, se numește *sistem caracteristic* al polinomului lui Cebîșev în condițiile (2), dacă

a) Orice soluție a acestei probleme este în același timp soluție și pentru problema analoagă în care $K = \{z_\nu\}_{\nu=1}^m$.

b) Orice submulțime a acestei mulțimi nu se bucură de proprietatea a).

Vom considera numai mulțimi caracteristice pentru care $m \geq n - r + 1$. În acest caz unicitatea polinomului de abatere minimă este asigurată.

3. Fie acum $\{z_\nu\}_{\nu=1}^m$ ($m \geq n - r + 1$) o mulțime finită de puncte din planul complex (z). Considerăm media ponderată de ordinul p (p întreg pozitiv)

$$H_p(\mu) = \left(\sum_{\nu=1}^m \mu_\nu |P(z_\nu)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3)$$

unde $P(z)$ este un polinom de tipul $r + 1$, iar $\mu = \{\mu_\nu\}$ o pondere nenegativă cu $\sum \mu_\nu = 1$.

Vom studia minimul mediei $H_p(\mu)$ în raport cu polinoamele de tipul $r + 1$, adică minimul în raport cu coeficienții a_k supuși condițiilor (2). Va trebui ca în acest sens să rezolvăm o problemă de minim cu legături liniare.

Dacă notăm cu $P'_p(z; \mu)$ polinomul de tipul $r + 1$ care realizează minimul mediei (3), atunci avem

TEOREMA 1. *Oricare ar fi mulțimea finită $M = \{z_\nu\}_{\nu=1}^m$, p întreg pozitiv și ponderea pozitivă $\mu = \{\mu_\nu\}$, există un singur polinom $P'_p(z; \mu)$ de tipul $r + 1$ care realizează minimul mediei ponderate $H_p(\mu)$.*

Într-adevăr, deoarece rangul matricii $\|\alpha_{ik}\|$ este egal cu $r + 1$, putem scoate din (2) $r + 1$ coeficienți a_{k_0}, \dots, a_{k_r} în funcție de ceilalți $n - r$ coeficienți a_k . Înlocuindu-i în $H_p(\mu)$, acesta va fi un polinom în a'_k, a''_k ($a_k = a'_k + i a''_k$), luînd numai valori pozitive. Minimul deci există și e dat de un sistem de numere a'_i, a''_i ($i = 1, 2, \dots, n - r$) care verifică sistemul

$$\frac{\partial H_p(\mu)}{\partial a_{k_i}} = 0, \quad \frac{\partial H_p(\mu)}{\partial a_{k_i}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - r.$$

Unicitatea se demonstrează la fel ca în [4].

Notînd acum cu $M'_n(z)$ polinomul de tipul $r + 1$ care se abate cel mai puțin de la zero pe mulțimea M , iar cu

$$\rho'_n = \max_{z \in M} |M'_n(z)|,$$

atunci se poate arăta la fel ca și în nota amintită că are loc

TEOREMA 2. *Oricare ar fi $M = \{z_\nu\}_{\nu=1}^m$ o mulțime caracteristică a problemei lui Cebîșev în condițiile (2) și $\mu = \{\mu_\nu\}$ o pondere pozitivă, avem*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} P'_p(z; \mu) = M'_n(z), \quad h = \lim_{p \rightarrow \infty} h_p(\mu) = \rho'_n, \quad (4)$$

unde $h_p = \min_{(P_n)} H_p(\mu)$, convergența fiind uniformă într-un cerc Γ care conține în interior mulțimea M .

4. Pentru a ajunge la o formă specială a polinomului de abatere minimă, considerăm acum media simetrică

$$H_{2p} = \left(\frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m |P(z_\nu)|^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}}, \quad P(z) = a_0 z^n + \dots + a_n \quad (5)$$

și rezolvăm problema de minim pentru funcția:

$$\Phi(a'_0, a''_0, \dots, a'_n, a''_n) =$$

$$H_{2p}^{2p} \left(\frac{1}{m} \right) + \sum_{i=1}^r \lambda_i [L_i(P'_n) - 1] + \sum_{i=1}^r \lambda'_i [\bar{L}_i(P'_n) - 1] \quad (6)$$

în raport cu $a'_0, a''_0, \dots, a'_n, a''_n$, unde $\bar{L}(P'_n)$ înseamnă conjugata condiției (2).

Anulînd derivatele parțiale $\frac{\partial \Phi}{\partial a_k}$ și $\frac{\partial \Phi}{\partial a_k}$ și notînd pentru prescurtare

$$L_{ki} = \frac{1}{m} \sum |P(z_\nu)|^{2p-2} \cdot z_\nu^{n-k} \cdot z_\nu^{n-i}, \quad i, k = 0, 1, \dots, n,$$

vom avea

$$a_0 L_{k0} + a_1 L_{k1} + \dots + a_n L_{kn} + \frac{\bar{\lambda}_0}{p} \alpha_{0k} + \dots + \frac{\bar{\lambda}_r}{p} \alpha_{rk} = 0, \quad (7)$$

$$k = 0, 1, \dots, n.$$

Dacă la (7) mai adăugăm ecuațiile

$$\alpha_{i0} a_0 + \alpha_{i1} a_1 + \dots + \alpha_{in} a_n = 1, \quad i = 0, 1, \dots, r \quad (8)$$

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = P(z),$$

vom avea $n + r + 3$ ecuații cu $n + r + 2$ necunoscute: $a_0, \dots, a_n, \bar{\lambda}_0, \dots, \bar{\lambda}_r$.

Din condiția de compatibilitate a sistemului (7)–(8), efectuând un calcul analog cu cel din lucrarea [4], se găsește următoarea ecuație funcțională pentru polinomul $P_{2p}^r(z)$ care realizează minimul mediei (5):

$$P_{2p}^r(z) = \frac{\sum |P(z_{v_1}) \dots P(z_{v_{n-r}})|^{2p-2} \sum_{j=0}^r D^{(j)}(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; z; \alpha_j^{(r)}) \cdot \bar{D}(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; \alpha^{(r)})}{\sum |P(z_{v_1}) \dots P(z_{v_{n-r}})|^{2p-2} \cdot |D(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}})|^2} \quad (9)$$

(\sum se referă la toți indicii v , de la 1 la m).

$$D(z_1, \dots, z_{n-r}; \alpha^{(r)}) = \begin{vmatrix} z_1^n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n-r}^n & \dots & 1 \\ \alpha_{00} & \dots & \alpha_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r0} & \dots & \alpha_{rn} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

$$D^{(j)}(z_1, \dots, z_{n-r}; z; \alpha_j^{(r)}) = \begin{vmatrix} z_1^n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n-r}^n & \dots & 1 \\ \alpha_{00} & \dots & \alpha_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j-1,0} & \dots & \alpha_{j-1,n} \\ z^n & \dots & 1 \\ \alpha_{j+1,0} & \dots & \alpha_{j+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{rn} & \dots & \alpha_{rn} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

iar $\bar{D}(z_1, \dots, z_{n-r}; \alpha^{(r)})$ înseamnă conjugata lui $D(z_1, \dots, z_{n-r}; \alpha^{(r)})$.

Trecînd la limită în (9), vom găsi o formă specială pentru polinomul $M_n^r(z)$ care se abate cel mai puțin de la zero pe mulțimea M .

Pentru aceasta notăm

$$K_v = \frac{|P(z_v)|^{2p-2}}{\sqrt{\sum |P(z_{v_1}) \dots P(z_{v_{n-r}})|^{2p-2} |D(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; \alpha^{(r)})|^2}}. \quad (12)$$

Se vede că avem

$$\sum K_{v_1}^{(p)} \dots K_{v_{n-r}}^{(p)} |D(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; \alpha^{(r)})|^2 = 1. \quad (13)$$

Cu aceste notații, (9) se scrie

$$P_{2p}^r(z) = \sum K_{v_1}^{(p)} \dots K_{v_{n-r}}^{(p)} \sum_{j=0}^r D^{(j)}(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; z; \alpha_j^{(r)}) \cdot \bar{D}(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; \alpha^{(r)}). \quad (14)$$

Se poate arăta ușor că din șirul $\{K_v^{(p)}\}$ se poate extrage un subsir $\{K_{v_k}^{(p)}\}$ convergent, oricare ar fi $z_v \in M$. Astfel, trecînd la limită în (14), pentru $k \rightarrow \infty$, obținem pentru polinomul $M_n^r(z)$ următoarea formă

$$M_n^r(z) = \sum K_{v_1} \dots K_{v_{n-r}} \sum_{j=0}^r D^{(j)}(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; z; \alpha_j^{(r)}) \cdot \bar{D}(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; \alpha^{(r)}) \quad (15)$$

$$\sum K_{v_1} \dots K_{v_{n-r}} |D(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; \alpha^{(r)})|^2 = 1. \quad (16)$$

Se vede că acesta este un polinom de tipul $r + 1$, căci punînd în (15) $z^{n-k} = \alpha_{ik}$, $k = 0, 1, \dots, n$, se vede imediat că

$$[D^{(j)}(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; z; \alpha^{(r)})]_{z^{n-k}=\alpha_{ik}} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ D(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; \alpha^{(r)}), & i = j, \end{cases}$$

și prin urmare, este verificată relația $\sum_{k=0}^n \alpha_{ik} a_k = 1$, oricare ar fi $i = 0, 1, \dots, r$.

Din cauza teoremei 2, $M_n^r(z)$ este polinom de abatere minimă în clasa polinoamelor de tipul $r + 1$ pe M . Formula (15) reprezintă o formă deosebită a polinomului $M_n^r(z)$, căci în membrul doi — în afară de constantele K_v care rămîn de determinat — figurează numai mărimi cunoscute care depind numai de abscisele punctelor mulțimii și de sistemul de numere date α_{ik} . Constantele K_v au în plus o semnificație interesantă, după cum vom vedea mai jos.

Să dăm acum câteva cazuri particulare mai interesante.

a) Punînd $r = 0$, adică coeficienții a_k sînt legați printr-o singură relație liniară, obținem

$$M_u^0(z) = \sum K_{v_1} \dots K_{v_n} V(z_{v_1}, \dots, z_{v_n}, z) \cdot \bar{D}(z_{v_1}, \dots, z_{v_n}; \alpha^{(0)}) \quad (17)$$

$$\sum K_{v_1} \dots K_{v_n} |D(z_{v_1}, \dots, z_{v_n}; \alpha^{(0)})|^2 = 1. \quad (18)$$

Dacă luăm :

1°. $\alpha_{00} = 1$, $\alpha_{01} = \dots = \alpha_{0n} = 0$, [adică $a_0 = 1$, atunci, deoarece $D(z_{v_1}, \dots, z_{v_n}; \alpha^{(0)}) = V(z_{v_1}, \dots, z_{v_n})$, formula (17) se va scrie

$$T_n(z; M) = \sum K_{v_1} \dots K_{v_n} |V(z_{v_1}, \dots, z_{v_n})|^2 \cdot (z - z_{v_1}) \dots (z - z_{v_n}) \cdot \sum K_{v_1} \dots K_{v_n} |V(z_{v_1}, \dots, z_{v_n})|^2 = 1, \quad (18)$$

și reprezintă forma specială a polinomului lui Cebîșev în sens clasic și a fost găsită de către G. Călugăreanu [1].

2°. Dacă $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$, adică $a_n = 1$, atunci

$$D(z_{v_1}, \dots, z_{v_n}; \alpha^{(0)}) = V(z_{v_1}, \dots, z_{v_n}) \cdot z_{v_1} \dots z_{v_n}$$

și astfel formula (17) se va scrie

$$M_n(z) = \sum K_{v_1} \dots K_{v_n} |V(z_{v_1}, \dots, z_{v_n})|^2 \cdot z_{v_1} \dots z_{v_n} (z - z_{v_1}) \dots (z - z_{v_n}) \cdot \sum K_{v_1} \dots K_{v_n} |V(z_{v_1}, \dots, z_{v_n})|^2 \cdot |z_{v_1} \dots z_{v_n}|^2 = 1, \quad (19)$$

și reprezintă expresia polinomului care se abate cel mai puțin de la zero pe mulțimea M în clasa polinoamelor cu termenul liber egal cu 1.

3°. Dacă luăm $\alpha_k = \frac{1}{A_k}$ ($A_k \neq 0$) și $\alpha_k = 0$, $i \neq k$, atunci se poate verifica ușor că formula (17) devine

$$M_k(z) = \sum K_{v_1} \dots K_{v_n} |V(z_{v_1}, \dots, z_{v_n})|^2 \cdot \bar{\sigma}_k(z_{v_1}, \dots, z_{v_n}) (z - z_{v_1}) \dots (z - z_{v_n}) \cdot \sum K_{v_1} \dots K_{v_n} |V(z_{v_1}, \dots, z_{v_n})|^2 \cdot |\sigma_k(z_{v_1}, \dots, z_{v_n})|^2 = 1, \quad (20)$$

unde $\sigma_k(z_1, \dots, z_n)$ reprezintă funcția simetrică de ordinul k a numerelor z_1, \dots, z_n , și reprezintă expresia polinomului care se abate cel mai puțin de la zero pe mulțimea M în clasa polinoamelor cu coeficientul A_k fixat.

b) Luînd acum $\alpha_{00} = \frac{1}{A_0}, \dots, \alpha_{rr} = \frac{1}{A_r}$, și $\alpha_{ik} = 0$, pentru $i \neq k$ ($A_j \neq 0, j = 0, 1, \dots, r$), atunci dezvoltînd determinantul $D(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; \alpha^{(r)})$ după ultimele $r + 1$ linii cu regula lui Laplace și notînd cu

$$K'_v = \frac{K_v}{\sqrt{|A_0 \dots A_r|}},$$

formula (15) se va scrie

$$M'_n(z) = T'_n(z; M) = \sum K'_{v_1} \dots K'_{v_{n-r}} |V(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}})|^2 [\varphi(z) - L(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}}; \varphi)]^{*1} \cdot \sum K'_{v_1} \dots K'_{v_{n-r}} |V(z_{v_1}, \dots, z_{v_{n-r}})|^2 = 1 \quad (21)$$

și reprezintă expresia polinomului lui Cebîșev r -restrîns pe mulțimea M , adică polinomul care se abate cel mai puțin de la zero pe mulțimea M în clasa polinoamelor cu primii $r + 1$ coeficienți fixați.

Se poate verifica ușor că forma polinomului nu se schimbă dacă unii dintre coeficienții $A_k = 0$.

c) Mai considerăm cazul cînd $r = n - 1$. În acest caz

$$M_n^{n-1}(z) = \sum_{v=1}^m K_v \sum_{j=0}^{n-1} D^{(j)}(z_v, z, \alpha_j^{(n-1)}) \cdot \bar{D}(z_v; \alpha^{(n-1)}). \quad (22)$$

5. În cazul cînd numărul punctelor este $m = n - r + 1$, se pot calcula constantele K_v putîndu-se astfel scrie explicit polinomul de tipul $r + 1$ care se abate cel mai puțin de la zero pe $n - r + 1$ puncte din planul (z) .

În acest caz polinomul $M'_n(z)$ se scrie sub următoarea formă

$$M'_n(z) = \sum_{i=0}^{n-1} K_0 \dots K_{i-1} K_{i+1} \dots K_{n-r} \sum_{j=0}^r D^{(j)}(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{n-r}, z; \alpha^{(r)}) \times \bar{D}(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{n-r}; \alpha^{(r)}). \quad (23)$$

Constantele K_v se determină din

$$|M'_n(z_i)| = \rho_n^r, \quad i = 0, 1, \dots, n - r$$

și

$$\sum_{i=1}^{n-1} K_0 \dots K_{i-1} K_{i+1} \dots K_{n-r} |D(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{n-r}; \alpha^{(r)})|^2 = 1.$$

Astfel avem

$$\rho_n^r = \frac{\left| \sum_{j=0}^r (-1)^j D^{(j)}(z_0, z_1, \dots, z_{n-r}; \alpha_j^{(r)}) \right|}{\sum_{i=0}^{n-r} |D(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{n-r}, \alpha^{(r)})|}, \quad (24)$$

*1) $L(z_1, \dots, z_{n-r}; \varphi)$ reprezintă polinomu de interpolare a lui Lagrange al funcției $\varphi(x) = A_0 z^n + \dots + A_r z^{n-r}$.

$$M_n^r(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n-r} \sum_{j=0}^r \frac{\overline{D}(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{n-r}; \alpha^{(r)}) D^{(j)}(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+r}, \dots, z_{n-r}; \alpha^{(r)})}{|D(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+r}, \dots, z_{n-r}; \alpha^{(r)})|}}{\sum_{i=0}^{n-r} |D(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+r}, \dots, z_{n-r}; \alpha^{(r)})|} \quad (25)$$

Datorită generalității relațiilor (2), expresiile de mai sus sînt destul de complicate, însă în anumite cazuri particulare mai interesante ele se simplifică foarte mult. Astfel, de exemplu, pentru $r = 0$, forma (25) capătă forma

$$M_n^0(z) = M_n(z) = \quad (26)$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^n |L(P_n^0) \dots L(P_n^{i-1}) L(P_n^{i+1}) \dots L(P_n^n)| \cdot |V(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n)| |\overline{L}(P_n^i) P_n^i(z)|}{|L(P_n^0) \dots L(P_n^n)| \sum_{i=0}^n |L(P_n^i)| \cdot |V(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n)|},$$

unde $L(P_n^i)$ reprezintă membrul întâi al condiției (2) pentru polinomul

$$P_n^i(z) = (z - z_0) \dots (z - z_{i-1})(z - z_{i+1}) \dots (z - z_n),$$

6. Se vede ușor că dacă în loc de media (5) am fi considerat media ponderată (3), am fi ajuns la un rezultat analog, numai că peste tot apăreau în plus și constantele ponderii $\mu = \{\mu_\nu\}$. Astfel se constată ușor că atunci ecuația funcțională (9) pe care o verifică polinomul $P_{2p}(z; \mu)$, va conține în plus sub semnul \sum produsele $\mu_{\nu_1} \dots \mu_{\nu_{n-r}}$.

De altă parte, expresia polinomului $M_n^r(z)$ din (15), ținînd cont și de (16), se poate scrie sub forma:

$$M_n^r(z) = \frac{\sum K_{\nu_1} \dots K_{\nu_{n-r}} \sum_{j=0}^r D^{(j)}(z_{\nu_1}, \dots, z_{\nu_{n-r}}; z; \alpha_j^{(r)}) \cdot \overline{D}(z_{\nu_1}, \dots, z_{\nu_{n-r}}; \alpha^{(r)})}{\sum K_{\nu_1} \dots K_{\nu_{n-r}} |D(z_{\nu_1}, \dots, z_{\nu_{n-r}}; \alpha^{(r)})|^2} \quad (15')$$

Din această formă a polinomului $M_n^r(z)$ se vede că constantele K_ν sînt determinate pînă la un factor arbitrar. Astfel se poate presupune că $\sum K_\nu = 1$.

Comparînd acum formula (15') cu formula (9) care corespunde lui $P_2(z; K)$ ($K = \{K_\nu\}$), se vede imediat că avem

$$P_2^r(z; K) = M_n^r(z).$$

Mai mult, se poate arăta ușor, folosind inegalitatea lui Hölder, că

$$P_p^r(z; K) = M_n^r(z), \quad (27)$$

oricare ar fi $p \geq 2$.

Cu alte cuvinte, dacă se ia pentru ponderea din media (3) chiar numerele care figurează în expresia (15'), atunci cele două polinoame minime în metrica exponențială și cea uniformă coincid. De aici se vede că problema găsirii polinomului care se abate cel mai puțin de la zero pe o mulțime finită este echivalentă cu găsirea ponderii pentru care cele două polinoame coincid.

7. În încheiere mai dăm încă o interpretare a constantelor K . În acest sens are loc

TEOREMA 3. Pentru ca polinomul $P^*(z)$ de tipul $r + 1$ să fie polinom de abatere minimă pe mulțimea caracteristică $M = \{z_\nu\}$, este necesar și suficient să existe un sistem de numere complexe A_0, A_1, \dots, A_ν în așa fel încît să fie verificate relațiile

$$P^*(z_\nu) = \rho_n e^{-i\theta_\nu}, \quad z_\nu \in M, \\ \sum_{\nu=1}^m K_\nu e^{i\theta_\nu} \cdot z_\nu^{n-k} = \sum_{i=0}^r \alpha_{ik} A_i, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (28)$$

Demonstrația se bazează, ca și în lucrarea [4], pe faptul că în cazul ponderii $K = \{K_\nu\}$ polinoamele de abatere minimă de zero în cele două metrici coincid.

Această teoremă este de altfel un caz particular al unui rezultat conținut în lucrarea lui E. G. Golștein [3], însă aici au apărut constantele K_ν , pe cînd în teorema lui E. G. Golștein se afirmă numai existența lor.

МНОГОЧЛЕНЫ НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ НА КОМПАКТНОМ МНОЖЕСТВЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРЫХ УДОВЛЕТВОРЯЮТ ЛИНЕЙНЫМ ЗАВИСИМОСТЯМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе исследуется методом Поля, применённым и в работе [4], определение многочлена наименее уклоняющегося от нуля на конечном

множестве точек комплексной плоскости, коэффициенты которого удовлетворяют линейным соотношениям вида

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{ik} a_k = 1, \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad 0 \leq r \leq n-1, \quad (1)$$

где α_{ik} — заданные комплексные числа.

С этой целью исследуется минимум весового среднего

$$H_p(\mu) = \left(\sum_{v=1}^m \mu_v |P(z_v)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

где $P(z)$ — многочлен степени n , коэффициенты которого удовлетворяют условиям (1), а $\sum_{v=1}^m \mu_v = 1$.

После установления существования и единственности многочлена $P_p^r(z; \mu)$, осуществляющего минимум среднего (2), показывается, что при $p \rightarrow \infty$, эти многочлены стремятся к многочлену $M_n^r(z)$ наименее уклоняющемуся от нуля на множестве $M = \{z_v\}$.

Далее даётся специальная форма многочлена $M_n^r(z)$ (формула (15)), которая является обобщением специальной формы многочлена наименее уклоняющегося от нуля и удовлетворяющего одному данному линейному соотношению, данному автором в [4]. При помощи этой формы исследуются случаи совпадения многочленов $M_n^r(z)$ и $P_p^r(z; \mu)$. Доказывается, что

$$M_n^r(z) \equiv P_p^r(z; K),$$

при всех целых положительных $p \geq 2$, где $K = \{K_v\}_{v=1}^m$, а K_v постоянные фигурирующие в специальной форме (15).

POLYNOMES D'ÉCART MINIMUM DE ZÉRO SUR UN ENSEMBLE COMPACT DU PLAN COMPLEXE, DONT LES COEFFICIENTS VÉRIFIENT PLUSIEURS RELATIONS LINÉAIRES

RÉSUMÉ

On étudie, à l'aide de la méthode de Polya, appliquée aussi dans le travail [4], la détermination du polynôme d'écart minimum de zéro sur un ensemble fini de points du plan complexe, dont les coefficients vérifient plusieurs relations linéaires de la forme

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{ik} a_k = 1, \quad i = 0, \dots, r, \quad 0 \leq r \leq n-1, \quad (1)$$

où α_{ik} sont des nombres complexes donnés.

A cette fin on étudie le minimum de la moyenne pondérée

$$H_p(\mu) = \left[\sum_{v=1}^m \mu |P(z_v)|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré n , dont les coefficients vérifient les conditions (1), et $\mu_v > 0$, $\sum \mu_v = 1$.

Après avoir établi l'existence et l'unicité du polynôme $P_p^r(z; \mu)$ qui réalise le minimum de la moyenne (2), on montre que pour $p \rightarrow \infty$ ces polynômes tendent vers le polynôme $M_n^r(z)$ qui s'écarte le moins de zéro sur l'ensemble $M = \{z_v\}_{v=1}^m$.

Puis on établit une forme spéciale du polynôme $M_n^r(z)$ (formule (15) du texte), qui représente une généralisation de la forme spéciale donnée dans le travail [4] pour le polynôme qui s'écarte le moins de zéro et qui vérifie une seule relation linéaire donnée. Moyennant cette formule on étudie les cas de coïncidence des polynômes $M_n^r(z)$ et $P_p^r(z; \mu)$. On démontre que

$$M_n^r(z) \equiv P_p^r(z; K)$$

pour tous les p entiers $p \geq 2$, où $K = \{K_v\}_{v=1}^m$, et K sont les constantes qui figurent dans la forme (15).

BIBLIOGRAFIE

1. Călugăreanu G. *Asupra polinoamelor lui Cebîșev ale mulțimilor mărginite și închise*. Bul. științ. — Acad. R.P.R., Ser. Mat., II, 1, 7 (1950).
2. — *Despre polinoamele lui Cebîșev ale mulțimilor finite în plan*. Studia Univ. V. Babeș et Bolyai, Cluj, Ser. 1, Fasc. Mat., III, 3, 25 (1959).
3. Гольштейн Е. Г., *Задача наилучшего чебышевского приближения в комплексной области с дополнительными условиями на коэффициенты аппроксимирующего полинома*. Докл. А. Н. СССР, 141, 2, 247 (1942).
4. Марушак И., *О многочленах наименее уклоняющихся от нуля, коэффициенты которых удовлетворяют линейной зависимости*. Mathematica, 2(25), 117 (1961).
5. Шнирельман Л. Г., *О равномерных приближениях*. Известия Акад. Наук СССР, Сер. Mat., 2, 1, 53 (1938).
6. Виденский В. С., *О наименее уклоняющихся от нуля многочленах, коэффициенты которых удовлетворяют данной линейной зависимости*. Докл. А. Н. СССР, 126, 2, 248 (1954).