UNELE ASPECTE ALE TEORIEI CONURILOR CONVEXE ÎN SPAŢII HILBERT, DIN PUNCTUL DE VEDERE AL NOŢIUNII DE POLARĂ

DE

A. B. NÉMETH

(Cluj)

Lucrare prezentată la şedinţa de comunicări din 2 aprilie 1963, a Institutului de calcul al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj

Scopul lucrării de faţă este de a generaliza noţiunea de polară a unei mulţimi şi de a cerceta condiţiile pentru care este valabilă lema lui Farkas în cazul noţiunii noi de polară. Rezultatul principal al lucrării este conţinut în afirmaţiile 13, 14, 15, 21, 22.

Noţiunea de con poliedral convex este legată de inegalităţile lineare, teorie de mare însemnătate în matematica economică. Conul poliedral convex nu este altceva decît interpretarea geometrică a unui sistem de inegalităţi lineare şi omogene. Tratarea problemelor de această natură se face într-o serie de lucrări, apărute în diferite monografii de matematică economică. Ca cele mai cuprinzătoare, amintim lucrările [1], [2], [3].

Introducerea şi aplicarea noţiunii de con în spaţii abstracte marchează un alt domeniu de aplicare a teoriei conurilor convexe. În această direcţie amintim în primul rînd rezultatele şcolii lui M. G. K r e i n; M. A. K r a s n o s e l s k i a folosit noţiunea de con pentru demonstrarea existenţei şi unicităţii soluţiilor pozitive a ecuaţiilor operaţionale [4].

Ca o noţiune generală de polară a unei mulţimi, amintim noţiunea dată în [5], III. 11. Totuşi, această noţiune pare să nu generalizeze noţiunea de polară introdusă de noi.

În tot cuprinsul lucrării de faţă, sub spaţiu vom înţelege un spaţiu Hilbert real, nu neapărat separabil, şi îl vom nota cu H.

DEFINIŢIA 1. *Submulţimea $M \subset H$ se numeşte conică, dacă din $x \in M$ urmează $\lambda x \in M$ pentru orice scalar $\lambda \geqq 0$.*

DEFINIŢIA 2. *Submulţimea $M \subset H$ se numeşte convexă dacă din $x, y \in M$ urmează $\alpha x + \beta y \in M$, pentru scalarii $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha + \beta = 1$.*

DEFINIŢIA 3. *Submulţimea* $K \subset H$ *se numeşte con convex închis dacă este mulţime conică, convexă şi închisă. Dacă, în afară de aceasta, din* $x \in K$ *şi* $-x \in K$ *urmează* $x = 0$, *conul convex închis* K *se numeşte propriu-zis.*

DEFINIŢIA 4. *Numărul* q *definit astfel ca*

$$q = \sup \{r \mid (x, y) \geqq r \|x\| \cdot \|y\| \text{ pentru toţi } x, y \in M\}$$

se numeşte deschizătura mulţimii M.

DEFINIŢIA 5. *Mulţimea* M *se numeşte epuizantă relativ la deschizătura* q, *dacă*

$$(x, y) \geqq q \|x\| \cdot \|y\|$$

pentru $x, y \in M$ *şi dacă nu există* $u \overline{\in} M$ *de aşa natură ca*

$$(x, u) \geqq q \|x\| \cdot \|u\|$$

pentru toţi $x \in M$.

DEFINIŢIA 6. *Mulţimea*

$$M^r = \{y \mid (x, y) \geqq r \|x\| \cdot \|y\| \text{ pentru toţi } x \in M\}$$

se numeşte polara de pas r *a mulţimii* M.

Următoarele afirmaţii sînt evidente

1. *Deschizătura oricărei mulţimi care conţine cel puţin două elemente nenule, este cuprinsă între* -1 *şi* $+1$.

2. *Polarea de pas* $r \leqq -1$ *a oricărei mulţimi nevide este întreg spaţiul, polara de pas* $r > 1$ *a oricărei mulţimi ce nu se reduce la elementul nul al spaţiului, este mulţimea vidă.*

3. *Mulţimea epuizantă relativ la deschizătura* $q = -1$ *este întreg spaţiul.*

4. *Mulţimea epuizantă relativ la deschizătura* $q > 1$ *este elementul nul al spaţiului.*

5. *Orice mulţime epuizantă este conică şi închisă.*

6. *Dacă* M_q *este o mulţime epuizantă relativ la deschizătura* q, *atunci* $-M_q = \{-x \mid x \in M_q\}$ *este tot mulţime epuizantă relativ la aceeaşi deschizătură.*

7. *Mulţimea epuizantă* M_q *relativ la deschizătura* $q \geqq 0$ *este convexă.*

Remarcăm că mulţimea epuizantă M_q relativ la deschizătura $q < 0$ poate să nu fie convexă.

Amintim următoarele afirmaţii cunoscute, fără să le mai demonstrăm.

8. *Dacă* L *este o mulţime mărginită convexă şi închisă, mulţimea*

$$K = \{x \mid x = \lambda y,\ \lambda \geqq 0,\ y \in L\}$$

formează con convex închis (vezi demonstraţia la [4]).

Dacă L *nu conţine originea,* K *este con propriu-zis.*

Demonstrăm :

9. *Pentru orice* $q > -1$ *există mulţime epuizantă* M_q *care să formeze con convex propriu-zis.*

Fie x_0 un element cu proprietatea $\|x_0\| = 1$. Sfera

$$\overline{S}\left(\frac{1}{2} x_0, \frac{1}{2}\right) = \left\{y \,\middle|\, \left\|\frac{1}{2} x_0 - y\right\| \leqq \frac{1}{2}\right\}$$

este mulţime convexă şi închisă, fapt din care urmează că

$$L = \overline{S}\left(\frac{1}{2} x_0, \frac{1}{2}\right) \cap \{y \mid (y, x_0) \geqq \rho,\ \rho \geqq 0\}$$

este tot convexă şi închisă, fiind intersecţia a două mulţimi convexe şi închise. Mulţimea

$$\mathcal{K}_\rho = \{\lambda x \mid x \in L,\ \lambda \geqq 0\}$$

formează con convex închis, numit de noi con circular $\mathcal{K}_\rho$ şi cu centrul x_0. Dacă $\rho > 0$, $\mathcal{K}_\rho$ este con convex propriu-zis. Vom presupune $\rho > 0$.

Observăm acum că dacă $\|x\| = 1$, $(x_0, x) = r \geqq \rho$ (adică $x \in \mathcal{K}_\rho$), atunci putem reprezenta vectorul x sub forma

$$x = 2(x_0, y)x_0 - y,$$

unde $(x_0, y) = r \geqq \rho$, $\|y\| = 1$. Fie $z \in \mathcal{K}_\rho$ şi $\|z\| = 1$. Atunci

$$(x, z) = 2(x_0, y)(x_0, z) - (y, z) \geqq 2\rho^2 - 1$$

Fie acum x un vector pentru care $\|x\| = 1$, $(x_0, x) = \rho$, iar $z = y$, unde y este vectorul din reprezentarea lui x. Avem

$$(x, z) = (2(x_0, x)x_0 - z, z) = 2(x_0, z)^2 - (z, z) = 2\rho^2 - 1.$$

De aici urmează că

$$\inf_{\substack{x, y \in \mathcal{K}_\rho \\ \|x\| = \|y\| = 1}} (x, y) = \min_{\substack{x, y = \mathcal{K}_\rho \\ \|x\| = \|y\| = 1}} (x, y) = 2\rho^2 - 1.$$

Arătăm că conul $\mathcal{K}_\rho$ este mulţime epuizantă relativ la deschizătura $2\rho^2 - 1$. Din cele de sus urmează să pentru orice pereche de puncte x, $y \in \mathcal{K}_\rho$,

$$(x, y) \geqq (2\rho^2 - 1) \|x\| \cdot \|y\|.$$

Fie $u \overline{\in} \mathcal{K}_\rho$. Vom arăta că există $x \in \mathcal{K}_\rho$ astfel ca $(u, x) < (2\rho^2 - 1)\|x\| \cdot \|u\|$.

Putem presupune $\|u\| = 1$. Distingem următoarele cazuri:
a) $0 < (x_0, u) < \rho$. Fie

$$y = \left(1 + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\mu^2-\rho^2}}\right)\rho x_0 - \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\mu^2-\rho^2}}\,\mu \cdot u,$$

unde $\mu = \frac{\rho}{(x_0, u)}$. Observăm că $\|y\| = 1$, $(x_0, y) = \rho$, deci $y \in \mathcal{K}_\rho$. Mai departe

$$(u, y) = \rho \cdot (u, x_0) - \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{\mu^2}} < \rho^2 - (1-\rho^2) = 2\rho^2 - 1.$$

b) $(x_0, u) < 0$. Dacă $-(x_0, u) \geqq \rho$, urmează că $-u \in \mathcal{K}_\rho$ şi $(-u, u) = -(u, u) = -1 < 2\rho^2 - 1$, deci acest caz îl putem exclude. Presupunem pe mai departe

$$0 < -(x_0, u) < \rho.$$

Construim vectorul y în felul următor:

$$y = \left(1 - \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\mu^2-\rho^2}}\right)\rho x_0 - \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\mu^2-\rho^2}}\,\mu u,$$

unde $\mu = -\frac{\rho}{(x_0, u)}$. Vectorul y are proprietatea $\|y\| = 1$, $(x_0, y) = \rho$, deci $y \in \mathcal{K}_\rho$.

Mai departe

$$(u, y) = \rho \cdot (u, x_0) - \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{\mu^2}} < \rho^2 - (1-\rho^2) = 2\rho^2 - 1.$$

c) $(x_0, u) = 0$. Vectorul

$$y = \left(1 + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\mu^2-\rho^2}}\right)\rho x_0 - \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\mu^2-\rho^2}}\,\mu z,$$

unde $\mu = \frac{\rho}{(x_0, z)}$, $z = \frac{x_0 + u}{\|x_0 + u\|}$, are proprietăţile $\|y\| = 1$, $(x_0, y) = \rho$.
Pentru produsul scalar (u, y) avem

$$(u, y) = -\sqrt{1-\rho^2} < 2\rho^2 - 1.$$

Cu aceasta am demonstrat în întregime că conul circular $\mathcal{K}_\rho$ este epuizant relativ la deschizătura $2\rho^2 - 1$. Ne-a rămas să arătăm că pentru $q > -1$ putem determina $\rho > 0$ astfel că $q = 2\rho^2 - 1$. Se vede imediat că un astfel de ρ poate fi găsit sub forma

$$\rho = \sqrt{\frac{1+q}{2}}.$$

Cu aceasta, afirmaţia 9 este în întregime demonstrată. Rezultatul obţinut se mai poate exprima în forma 10.

10. *Conul circular* $\mathcal{K}_\rho$ $(\rho > 0)$ *este mulţime epuizantă relativ la deschizătura* $2\rho^2 - 1$.

Observăm că $\mathcal{K}_0$ este de fapt semispaţiul $(x_0, x) \geqq 0$, şi încetează de a mai fi mulţime epuizantă.

11. *Dacă* $s > \rho$, *avem*

$$\mathcal{K}_\rho^s = 0,$$

unde 0 *este elementul nul al spaţiului.*

Pentru a demonstra afirmaţia 11, presupunem contrariul: există un element $x \neq 0$, $x \in \mathcal{K}_\rho^s$. Putem presupune $\|x\| = 1$. Dacă centrul conului circular $\mathcal{K}_\rho$ este x_0, atunci cum $x \in \mathcal{K}_\rho^s$, urmează

$$(x, x_0) \geqq s > \rho.$$

Fie $(x_0, x) = r \geqq s$. Vectorul

$$y = \left(\frac{\rho}{r} + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-r^2}}\right) r x_0 - \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-r^2}}\, x$$

are proprietatea $\|y\| = 1$ şi $(x_0, y) = \rho$, deci $y \in \mathcal{K}_\rho$.
Formăm produsul scalar (x, y)

$$(x, y) = \rho r - \sqrt{(1-r^2)(1-\rho^2)} \leqq \rho r \leqq \rho < s.$$

Inegalitatea obţinută contrazice presupunerea că $x \in \mathcal{K}_\rho^\rho$. Cu aceasta, afirmaţia 11 este demonstrată.

12. *În cazul cînd* $s = \rho$, *avem*

$$\mathcal{K}_\rho^s = \mathcal{K}_\rho^\rho = (x_0),$$

unde x_0 *este centrul conului* $\mathcal{K}_\rho$, *iar*

$$(x_0) = \{x \mid x = \lambda x_0,\ \lambda \geqq 0\}.$$

Pentru demonstrare, presupunem ca mai înainte că $x \in \mathcal{K}_\rho^\rho$ $\|x\| = 1$ şi construim vectorul y la fel cu cel de la punctul 11. Pentru produsul scalar (x, y) avem

$$(x, y) = \rho r - \sqrt{(1-r^2)(1-\rho^2)} \leqq \rho r \leqq \rho = s.$$

Egalitatea poate fi atinsă atunci şi numai atunci dacă $r = 1$, de unde urmează că x poate aparţine lui $\mathcal{K}_\rho^\rho$ numai dacă $x = x_0$. Cum pentru toţi vectorii din $\mathcal{K}_\rho$ avem

$$(x_0, z) \geqq \rho\|z\|,$$

ceea ce înseamnă că $x_0 \in \mathcal{K}_\rho^\rho$, şi afirmaţia 12 este demonstrată.

13. *Dacă* $-\sqrt{1-\rho_1^2} \leqq s \leqq \rho_1,\ \rho_1 > 0$
atunci
$$\mathcal{K}^s_{\rho_1} = \mathcal{K}_{\rho_2},$$
unde
$$\rho_2 = s\rho_1 + \sqrt{(1-s^2)(1-\rho_1^2)}.$$
Centrele conurilor circulare $\mathcal{K}_{\rho_1}$ *și* $\mathcal{K}_{\rho_2}$ *coincid.*

Pentru ρ_1 și s dați, valoarea lui ρ_2 este bine determinată și $0 \leq \rho_2 \leq 1$. Îl exprimăm pe s în funcție de ρ_1 și ρ_2:
$$s = \rho_1\rho_2 - \sqrt{(1-\rho^2)(1-\rho_2^2)}.$$

Presupunem la început $-\sqrt{1-\rho_1^2} < s$ și trecem la demonstrarea afirmației 13. Considerăm conurile circulare $\mathcal{K}_{\rho_1}$ și $\mathcal{K}_{\rho_2}$ cu centrele comune x_0. Fie $u \in \mathcal{K}_{\rho_1}$, $v \in \mathcal{K}_{\rho_2}$ și $\|u\| = \|v\| = 1$. Totodată
$$r_1 = (x_0, u) \geq \rho_1, \quad r_2 = (x_0, v) \geq \rho_2.$$
Observăm că putem presupune $\rho_1 < 1$, căci dacă $\rho_1 = 1$, $\mathcal{K}_{\rho 1}$ se reduce la (x_0) și afirmația este evidentă. Dacă $\rho_2 = 1$, avem $s = \rho_1$ și ne aflăm în condițiile afirmației 12, deci 13 este și în acest caz adevărat. Putem presupune deci că $\rho_1 < 1$, $\rho_2 < 1$. Mai presupunem că vectorii u, v sînt astfel aleși ca $r_1 < 1$, $r_2 < 1$. Construim vectorul
$$z = \left(\frac{r_1}{r_2} + \sqrt{\frac{1-r_1^2}{1-r_2^2}}\right) r_2 x_0 - \sqrt{\frac{1-r_1^2}{1-r_2^2}}\, v.$$
Pe baza presupunerii $-\sqrt{1-\rho_1^2} < s$, avem $r_2 \neq 0$, deci expresia lui z are sens. Observăm că $\|z\| = 1$, $(x_0, z) = r_1$, deci $z \in \mathcal{K}_{\rho_1}$. Îl exprimăm pe v din expresia lui z:
$$v = \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{1-r_2^2}{1-r_1^2}}\right) r_2 x_0 - \sqrt{\frac{1-r_2^2}{1-r_1^2}}\, z.$$
Am arătat în acest fel că orice element v pentru care $(x_0, v) = r_2$, poate fi exprimat în această formă, unde $\|z\| = 1$ și $(x_0, z) = r_1$. Fie u elementul dat mai sus. Formăm produsul scalar (u, v):
$$(u, v) = \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{1-r_2^2}{1-r_1^2}}\right) r_2 (x_0, u) - \sqrt{\frac{1-r_2^2}{1-r_1^2}}\,(u, z) \geq$$
$$\geq \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{1-r_2^2}{1-r_1^2}}\right) r_1 r_2 - \sqrt{\frac{1-r_2^2}{1-r_1^2}} = r_1 r_2 - \sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}.$$

Din inegalitatea
$$r_1 r_2 - \sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} \geq \rho_1\rho_2 - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_1^2)}$$
urmează că
$$(u, v) \geq \rho_1\rho_2 - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}. \qquad (*)$$

Făcînd restricția $r_1 < 1$, $r_2 < 1$, am exclus cazurile $u = x_0$, $v = x_0$. În aceste cazuri, însă, evaluarea de mai sus este evidentă. Vom arăta că există vectorii $u_1 \in \mathcal{K}_{\rho_1}$, $v_1 \in \mathcal{K}_{\rho_2}$, $\|u_1\| = \|v_1\| = 1$, pentru care în relația (*) să se realizeze egalitatea. Fie v_1 un vector oarecare pentru care avem $(x_0, v_1) = \rho_2$ și fie $u_1 = z$, unde z este dat de formula de mai sus cu $v = v_1$ și $r_1 = \rho_1$. Avem $u_1 \in \mathcal{K}_{\rho_1}$, $\|u_1\| = 1$ și
$$(u_1, v_1) = \rho_1\rho_2 - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}$$
și astfel am demonstrat că
$$\min_{\substack{u\in\mathcal{K}_{\rho_1},\, v\in\mathcal{K}_{\rho_2}\\ \|u\|=\|v\|=1}} (u, v) = \rho_1\rho_2 - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)} = s.$$
Urmează că pentru orice pereche de vectori $u \in \mathcal{K}_{\rho_1}$, $v \in \mathcal{K}_{\rho_2}$, avem
$$(u, v) \geq s\|u\|\cdot\|v\|,$$
deci
$$\mathcal{K}_{\rho_2} \subset \mathcal{K}_{\rho_1}.$$

Pentru a demonstra egalitatea, ne rămîne să arătăm că dacă $u \in \mathcal{K}_{\rho 2}$, atunci se poate determina un vector $y \in \mathcal{K}_{\rho_1}$ astfel ca
$$(u, y) < s\|u\|\cdot\|y\|.$$
Putem presupune de la început că $\|u\| = 1$.
Deosebim următoarele cazuri:

a) $0 < (x_0, u) = r < \rho_2$. Vectorul z determinat în forma
$$z = \left(\frac{\rho_1}{r} + \sqrt{\frac{1-\rho_1^2}{1-r^2}}\right) r x_0 - \sqrt{\frac{1-\rho_1^2}{1-r^2}}\, u$$
are proprietatea $\|z\| = 1$, $(x_0, z) = \rho_1$, deci $z \in \mathcal{K}_{\rho_1}$. Formăm produsul scalar
$$(u, z) = \rho_1 r - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-r^2)}.$$
Pe baza inegalității
$$\rho_1 r - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-r^2)} < \rho_1\rho_2 - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}$$

urmează că

$$(u, z) < s.$$

b) Dacă $(x_0, u) < 0$ şi dacă $-(x_0, u) \geqq \rho_1$, adică $-u \in \mathcal{K}_{\rho_1}$, atunci $(-u, u) = -(u, u) = -1 < s$, deci $u \overline{\in} \mathcal{K}^s_{\rho_1}$. Putem deci de la început presupune $-(u, x_0) < \rho_1$. Fie

$$z = \left(\frac{\rho_1}{r} - \sqrt{\frac{1-\rho_1^2}{1-r^2}}\right) r x_0 - \sqrt{\frac{1-\rho_1^2}{1-r^2}}\, u,$$

unde $0 < r = -(x_0, u) < \rho_1$. Observăm că $\|z\| = 1$, $(x_0, z) = \rho_1$, deci $z \in \mathcal{K}_{\rho_1}$. Mai departe

$$(u, z) = -\rho_1 r - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-r^2)}.$$

În condiţiile puse şi pentru $\rho_1 \leqslant \rho_2$, avem inegalitatea

$$-\rho_1 r - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-r^2)} < \rho_1\rho_2 - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)},$$

şi din această inegalitate urmează că

$$(u, z) < s.$$

Dacă $\rho_2 < \rho_1$, considerăm funcţia de r

$$\varphi(r) = -\rho_1 r - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-r^2)},$$

care ne dă valoarea produsului scalar (u, z) ,unde z este cel construit mai sus. Vom arăta că şi pentru cazul $\rho_2 < \rho_1$, avem $\varphi(r) < s$. Pentru aceasta, observăm că $\varphi(0) < s$ şi că $\varphi'(r) < 0$ pentru $0 < r < \rho_1$. Urmează că $\varphi(r) < s$. Prin urmare

$$(u, z) < s.$$

c) $(x_0, u) = 0$. Determinăm vectorul z în felul următor:

$$z = \left(1 + \sqrt{\frac{1-\rho_1^2}{\mu^2-\rho_1^2}}\right)\rho_1 x - \sqrt{\frac{1-\rho_1^2}{\mu^2-\rho_1^2}}\,\mu y,$$

unde $\mu = \dfrac{\rho_1}{(x_0, y)}$, $y = \dfrac{x_0 + u}{\|x_0 + u\|}$.

Observăm că $\|z\| = 1$, $(x_0, z) = \rho_1$, deci $z \in \mathcal{K}_{\rho_1}$. Totodată

$$(u, z) = -\sqrt{1-\rho_1^2}.$$

Această egalitate ne arată că $(u, z) < s$.

Am demonstrat egalitatea din pct. 13 pentru $\rho_1 > 0$, $-\sqrt{1-\rho_1^2} < s \leqq \rho_1$. Cînd $s = -\sqrt{1-\rho_1^2}$, avem $\rho_2 = 0$. În acest caz trebuie să admitem şi cazul $r_2 = 0$. Acesta se poate trata separat punînd pentru z expresia

$$z = r_1 x_0 - \sqrt{1-r_1^2}\, v.$$

Demonstraţia se continuă ca mai înainte, punctele a) şi c) devenind superflue. Cu aceasta, punctul 13 este în întregime demonstrat.

14. *Dacă admitem prin definiţie*

$$\mathcal{K}_0^{-1} = \mathcal{K}_0,$$

atunci avem pentru $-\sqrt{1-\rho_1^2} \leqq s \leqq \rho_1$, $\rho_1 \geqq 0$

$$\mathcal{K}^s_{\rho_1} = \mathcal{K}_{\rho_2},$$

unde $\rho_2 = s\rho_1 + \sqrt{(1-s^2)(1-\rho_1^2)}$ *şi centrele conurile circulare* $\mathcal{K}_{\rho_1}$, $\mathcal{K}_{\rho_2}$ *coincid.*

Pentru demonstrare, este suficient să observăm că demonstraţiile făcute la punctul 13 nu se modifică esenţial dacă $\rho_1 = 0$ şi $\rho_2 > 0$. În ceea ce priveşte cazul $\rho_1 = \rho_2 = 0$, acesta este rezolvat cu convenţia făcută.

15. *Pentru* $-\sqrt{1-\rho_1^2} \leqq s \leqq \rho_1$, $\rho_1 \geqq 0$, *avem*

$$\mathcal{K}^{ss}_{\rho_1} = \mathcal{K}_{\rho_1},$$

unde

$$\mathcal{K}^{ss}_{\rho_1} = (\mathcal{K}^s_{\rho_1})^s.$$

Expresiile

$$\rho_2 = s\rho_1 + \sqrt{(1-s^2)(1-\rho_1^2)} = \rho_2(\rho_1)$$

şi

$$\rho_1 = s\rho_2 + \sqrt{(1-s^2)(1-\rho_2^2)} = \rho_1(\rho_2)$$

sînt echivalente. Urmează că

$$\rho_1[\rho_2(\rho_1)] = \rho_1.$$

Pe baza punctului 14 avem

$$\mathcal{K}^s_{\rho_1} = \mathcal{K}_{\rho_2(\rho_1)}.$$

Mai departe

$$\mathcal{K}^{ss}_{\rho_1} = \mathcal{K}^s_{\rho_2(\rho_1)} = \mathcal{K}_{\rho_1[\rho_2(\rho_1)]} = \mathcal{K}_{\rho_1}.$$

16. *M^α, mulţimea polară de pas $\alpha \geqq 0$ a mulţimii M este intersecţia tuturor conurilor circulare $\mathcal{K}_\alpha$ cu centrele în punctele $\frac{x}{\|x\|}$ unde $x \in M$. Polara de pas $\alpha \geqq 0$ a oricărei mulţimi este con convex închis.*

17. *Pentru orice mulţime M avem*

$$M \subset M^{rr},$$
$$M^r = M^{rrr}.$$

DEFINIŢIA 7. *Numim înveliţoare convexă a mulţimii M mulţimea*

$$[M] = \{x \mid x = \sum_i c_i x_i,\ x_i \in M,\ c_i \geqq 0,\ \sum_i c_i = 1\}.$$

18. *Pentru $\alpha \geqq 0$ şi orice mulţime M*

$$M^\alpha = [M]^\alpha.$$

Este evident că $[M]^\alpha \subset M^\alpha$. Să presupunem $x \in M^\alpha$ şi $x \bar{\in} [M]^\alpha$. Urmează că există un element $y \in [M]$ astfel ca $(x, y) < \alpha \|x\| \|y\|$.

Putem presupune $\|x\| = \|y\| = 1$. Cum $y \in [M]$, avem $y = \sum_i c_i x_i$, unde $x_i \in M$, $c_i \geqq 0$ şi $\sum_i c_i = 1$. Mai departe

$$(x, y) = \sum_i c_i (x, x_i).$$

Cum însă $x \in M^\alpha$, avem $(x, x_i) \geqq \alpha \|x_i\|$ şi deci

$$(x, y) \geqq \alpha \sum_i c_i \|x_i\| \geqq \alpha,$$

ceea ce contrazice presupunerea $(x, y) < \alpha$.

DEFINIŢIA 8. *Mulţimile M pentru care*

$$M^{rr} = M$$

le vom numi mulţimi de tip $(\mathcal{F}, r)$

19. *Conul circular $\mathcal{K}_\rho$ este de tip $(\mathcal{F}, r)$ pentru orice r satisfăcînd $-\sqrt{1-\rho^2} \leqq r \leqq \rho$.*

20. *Mulţimea M de tip $(\mathcal{F}, \alpha)$, $\alpha \geqq 0$ este con convex închis.*

21. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o mulţime să fie de tip $(\mathcal{F}, \alpha)$, $\alpha \geqq 0$, este ca ea să fie intersecţie de conuri circulare $\mathcal{K}_\alpha$.*

Presupunem că $M^{\alpha\alpha} = M$. Cum M este polara de pas α a mulţimii M^α, urmează — pe baza punctului 16 — că ea este intersecţia de conuri circulare $\mathcal{K}_\alpha$.

Dacă M este intersecţie de conuri circulare $\mathcal{K}_\alpha$, atunci notînd cu N centrele acestor conuri, putem scrie

$$N^\alpha = M,$$

de unde, din 17,

$$M = N^\alpha = N^{\alpha\alpha\alpha} = M^{\alpha\alpha},$$

ceea ce înseamnă că M este de tip $(\mathcal{F}, \alpha)$.

22. *În cazul $0 \leqq \beta \leqq \alpha$, orice mulţime de tip $(\mathcal{F}, \alpha)$ este şi de tip $(\mathcal{F}, \beta)$.*

Pentru a demonstra această afirmaţie, conform punctului 21, trebuie să ne convingem că orice mulţime ce poate fi pusă în forma intersecţiei de conuri $\mathcal{K}_\alpha$, poate fi reprezentată şi sub formă de intersecţie de conuri $\mathcal{K}_\beta$ dacă $0 \leqq \beta \leqq \alpha$.

Pe baza punctului 15

$$\mathcal{K}_\alpha = \mathcal{K}_r^\beta,$$

unde

$$\mathcal{K}_r = \mathcal{K}_\alpha^\beta.$$

De aici, pe baza punctului 21, urmează că $\mathcal{K}_\alpha$ poate fi pus sub forma de intersecţie de conuri $\mathcal{K}_\beta$. Deci orice mulţime ce poate fi pusă sub formă de intersecţie de conuri $\mathcal{K}_\alpha$, este şi intersecţia de conuri $\mathcal{K}_\beta$, $0 \leqq \beta \leqq \alpha$, fapt care împreună cu pct. 21 demonstrează afirmaţia punctului 22.

О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГИЛЬБЕРТА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПОНЯТИЯ О ПОЛЯРЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В труде обобщается (определение 1) понятие о поляре множества, употребляемое в теории линейных неравенств (см. [1], [2] или [3],) и вводится (определение 2) понятие круглого конуса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Множество*

$$M^r = \{y \mid (x, y) \geqq r \|x\| \cdot \|y\| \text{ для всех } x \in M\}$$

называется полярой шага r множества M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Замкнутый выпуклый конус*

$$\mathcal{K}_\rho = \{\lambda x \mid x \in L,\ \lambda \geqq 0\}$$

где

$$L = \bar{S}\left(\frac{1}{2}\,x_0,\ \frac{1}{2}\right) \cap \{y\,|\,(y,\ x_0) \geq \rho,\ \rho \geq 0\},\quad \|x_0\| = 1,$$

называется круглым конусом с центром x_0.

Главные достигнутые результаты содержатся в пунктах 14 и 22 из труда.

Если $-\sqrt{1-\rho_1^2} \leq s \leq \rho_1,\ \rho_1 \geq 0$, то $\mathcal{K}^s_{\rho_1} = \mathcal{K}_{\rho_2}$ где $\rho_2 = s\rho_1 + \sqrt{(1-s^2)(1-\rho_1^2)}$, когда ρ_1, и ρ_2, не являются оба равными нулю. Центры круглых конусов $\mathcal{K}_{\rho_1}$ $\mathcal{K}_{\rho_2}$ и совпадают (пункт 14 из труда).

В том случае, когда $0 \leq \beta \leq \alpha$ для любого множества, удовлетворяющего $M^{\alpha\alpha} = M$ имеем $M^{\beta\beta} = M$ где $M^{rr} = (M^r)^r$ (пункт 22 из труда).

QUELQUES ASPECTS DE LA THÉORIE DES CÔNES CONVEXES DANS LES ESPACES DE HILBERT, DU POINT DE VUE DE LA NOTION DE POLAIRE

RÉSUMÉ

Dans ce travail on généralise (définition 1) la notion de polaire d'un ensemble, employée dans la théorie des inégalités linéaires (voir [1], [2] ou [3]) et on introduit (définition 2) la notion de cône circulaire.

DÉFINITION 1. *L'ensemble*

$$M^r = \{y\,|\,(x, y) \geq r\|x\|\cdot\|y\| \text{ pour tout } x \in M\}$$

s'appelle polaire de pas r de l'ensemble M.

DÉFINITION 2. *Le cône convexe fermé*

$$\mathcal{K}_\rho = \{\lambda x\,|\,x \in L,\ \lambda \geq 0\}$$

où

$$L = \bar{S}\left(\frac{1}{2}\,x_0,\ \frac{1}{2}\right) \cap \{y\,|\,(y,\ x_0) \geq \rho,\ \rho \geq 0\},\quad \|x_0\| = 1,$$

s'appelle cône circulaire au centre x_0.

Les principaux résultats obtenus figurent aux point 14 et 22 du travail :

Si $-\sqrt{1-\rho_1^2} \leq s \leq \rho_1,\ \rho_1 \geq 0$, alors

$$\mathcal{K}^s_{\rho_1} = \mathcal{K}_{\rho_2},\ \text{où}\ \ \rho_2 = s\rho_1 + \sqrt{(1-s^2)(1-\rho_1^2)}$$

toutes les fois que ρ_1 et ρ_2 ne sont pas tous deux zéro. Les centres des cônes circulaires $\mathcal{K}_{\rho_1}$ et $\mathcal{K}_{\rho_2}$ coincident (point 14 du travail).

Au cas où $0 \leq \beta \leq \alpha$, pour tout ensemble satisfaisant $M^{\alpha\alpha} = M$ on a $M^{\beta\beta} = M$, où $M^{rr} = (M^r)^r$ (point 22 du travail).

BIBLIOGRAFIE

1. Gale D., *Convex polyhedral cones and linear inequalities*, în vol. ,,*Activity analysis of production and allocation*'', ed. T. C. Koopmans, J. Wiley, New York, 1951.
2. Gerstenhaber M., *Theory of convex polyhedral cones*; în vol. ,,Activity analysis of production and allocation'', editat de T.C. Koopmans; J. Wiley, New York, 1951.
3. Goldman A. J., Tucker A. W., *Polyhedral convex cones*; în vol. ,,Linear inequalities and related systems'', editat de H. W. Kuhn şi A. W. Tucker. Princ. Univ. Press. 1956.
4. Красносельский М. А., *Положительные решения операторных уровнений*. Физматгиз, Москва, 1962.
5. Райков Д. А., *Векторные просшранства*. Физматгиз, Москва, 1962.

Primit la 28. III. 1963.