FUNCȚII CU VARIAȚIE MĂRGINITĂ

DE

ELENA MOLDOVAN

Comunicare prezentată la sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R., din 16–18 aprilie 1957.

1. Fie $\mathcal{F}_n$ o mulțime de funcții definite în intervalul $[a, b]$ și continue în acest interval. Mai presupunem despre mulțimea $\mathcal{F}_n$ că este interpolatoare de ordinul n, în $[a, b]$, adică este îndeplinită condiția:

(I_n) oricare ar fi sistemul de n puncte disctincte, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, din intervalul $[a, b]$ și oricare ar fi numerele $y_1, y_2, \ldots, y_n$, există în $\mathcal{F}_n$ o funcție și una singură $\varphi(x)$, astfel ca $\varphi(x_i)=y_i$, $i=1, 2, \ldots, n$.
Numerele y_i sînt întotdeauna valori ale unei funcții $f(x)$ definită pe punctele x_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Pentru a pune în evidență acest fapt, vom nota funcția $\varphi(x)$ care figurează în formularea proprietății (I_n) prin simbolul $L_n(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n; f|x)$.

Fie $g(x)$ o funcție definită în intervalul $[a, b]$ și fie

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_l \leqq x_0 \tag{1}$$

un sistem s de $l \geqq n+1$ puncte, unde x_0 este un punct fixat în $[a, b]$. Considerăm numărul

$$v[x_0; s]=v[x_0; x_1, x_2, \ldots, x_l]=\sum_{k=2}^{l-n+1} | L_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n-1}; g \mid x_0) - L_n(x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{k+n-2}; g \mid x_0) |. \tag{2}$$

În formula (2), $v[x_0; s]$ depinde de x_0 și de sistemul s de puncte (1). Dacă pentru x_0 fixat, considerăm mulțimea $\{D\}$ a tuturor sistemelor de puncte s de forma (1), obținem o mulțime de numere $v[x_0; s]$, unde sistemul de puncte de diviziune $s \in \{D\}$. Să considerăm marginea superioară exactă a mulțimii numerelor $v[x_0; s]$, cînd s parcurge mulțimea $\{D\}$,

$$\underset{x_0}{V}[g] = \sup_{s \in [D]} v[x_0; s]. \tag{3}$$

Observăm că $\underset{x_0}{V}[g]$ este o funcțională, care depinde de funcția $g(x)$ și de alegerea punctului x_0. Ea are proprietăți interesante, dar pentru cele ce urmează nu e necesar să ne oprim asupra lor.

2. Definiţie. *Prin variaţia totală a funcţiei $g(x)$ în intervalul $[a, b]$, relativă la mulţimea $\mathcal{F}_n$ se înţelege numărul*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}[g] = \sup_{x \in [a,b]} \overset{}{\underset{x}{V}}[g]$$

Dacă $\overset{b}{\underset{a}{V}}[g]$ e finit, spunem că $g(x)$ este o funcţie cu variaţie mărginită relativ la mulţimea $\mathcal{F}_n$ în intervalul $[a, b]$.

Cînd $n=1$ şi mulţimea $\mathcal{F}_1$ este mulţimea funcţiilor constante în $[a, b]$, proprietatea unei funcţii de a fi cu variaţie mărginită în $[a, b]$, faţă de această mulţime $\mathcal{F}_1$ în sensul definiţiei de mai sus, revine la proprietatea clasică obişnuită de variaţie mărginită.

Considerarea noţiunii de variaţie mărginită în sensul de mai sus constituie un aspect al studiului comportării funcţiilor definite într-un interval dat, faţă de o mulţime de funcţii interpolatoare, de un ordin dat, în acel interval. De fapt, prin definiţia dată, cînd $n=1$, se ataşează funcţiei $g(x)$ o mulţime de funcţii, după o anumită regulă. Pentru x_0 fixat, ataşăm lui $g(x)$ funcţia $\Phi_{x_0}(x)$, definită în felul următor:

$$\Phi_{x_0}(x) = \begin{cases} L_1(x\,;\,g \mid x_0) & \text{dacă} \quad a \leqq x < x_0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x \geqq x_0 \end{cases} \tag{4}$$

Cînd x_0 parcurge intervalul $[a, b]$, obţinem o mulţime de funcţii (4). Proprietatea funcţiei $g(x)$ de a fi cu variaţie mărginită în $[a, b]$ faţă de $\mathcal{F}_1$, revine la proprietatea mulţimii funcţiilor (4) de a fi cu variaţie egal mărginită în sensul clasic, în $[a, b]$. Extinderea în sensul de mai sus a noţiunii de funcţie cu variaţie mărginită prezintă interes, pentru că pune în evidenţă clase importante de funcţii cînd mulţimea $\mathcal{F}_n$ se particularizează. Este deosebit de interesant cazul cînd $\mathcal{F}_{2n}$ este mulţimea polinoamelor trigonometrice de ordin $2n-1$.

3. TEOREMA 1. *Dacă $n = 1$, funcţiile monotone faţă de $\mathcal{F}_1$, în $[a, b]$, sînt cu variaţie mărginită faţă de $\mathcal{F}_1$, în $[a, b]$.*

Demonstraţie[1]. Fie pentru fixarea ideilor $g(x)$ o funcţie nedescrescătoare în $[a, b]$ faţă de $\mathcal{F}_1$. Atunci, oricare ar fi $x_0 \in [a,b]$, $\overset{a}{\underset{x_0}{V}}[g] = g(x_0) - L_1(a\,;\,g|x_0)$ iar $\overset{a}{\underset{b}{V}}[g] = \sup_{x\in[a,b]}\{g(x) - L_1(a\,;\,g|x)\}$. Pe baza definiţiei monotoniei, rezultă că funcţia $g(x)$ este mărginită şi deci concluzia din teoremă rezultă. Demonstraţia se mai poate face şi altfel, ţinînd seama de faptul că toate funcţiile (4), în ipotezele teoremei 1, sînt monotone pentru $x < x_0$. În cursul raţionamentului intervine în mod esenţial faptul că două funcţii distincte din $\mathcal{F}_1$ nu pot lua valori comune în nici un punct din $[a, b]$.

[1] Funcţia $f(x)$, definită în intervalul $[a, b]$ spunem că este monotonă faţă de $\mathcal{F}_1$, în $[a,b]$, dacă pentru toate perechile de puncte $x' < x''$ din $[a, b]$ diferenţa $f(x'') - L_1(x'\,;\,f|x'')$ păstrează semn constant şi anume cînd ea este $\geqq 0$ sau > 0 spunem că $f(x)$ este nedescrescătoare sau crescătoare, iar cînd diferenţa $f(x'') - L_1(x'\,;\,f|x'')$ este $\leqq 0$ sau < 0, spunem că $f(x)$ este necrescătoare sau descrescătoare.

TEOREMA 2. *O funcţie monotonă faţă de $\mathcal{F}_1$ în $[a, b]$, are numai discontinuităţi de speţa 1-a.*

Demonstraţie. Fie $g(x)$ o funcţie nedescrescătoare în $[a, b]$ faţă de $\mathcal{F}_1$. Celelalte cazuri de monotonie se tratează în mod analog. Fie $x_0 \in (a,b)$ şi să considerăm funcţia interpolatoare $L_1(x_0\,;\,g\,|x)$. Fie U_{x_0} o vecinătate a punctului x_0. În cazul cel mai puţin favorabil avem:

$$g(x) - L_1(x_0\,;\,g\,|x) < 0 \quad \text{dacă} \quad x < x_0,\ x \in U_{x_0}$$

şi

$$g(x) - L_1(x_0\,;\,g\,|x) > 0 \quad \text{dacă} \quad x > x_0\ \ x \in U_{x_0}.$$

Să arătăm că $g(x)$ are limită la dreapta în x_0. Într-adevăr, oricare ar fi şirul $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de puncte care tind dinspre dreapta către x_0, din ele putem extrage un subşir monoton $\{x_{\nu_i}\}_{i=1}^{\infty}$. În orice punct $x > x_0$, funcţiile $L_1(x_{\nu_i}\,;\,g\,|x)$ formează un şir monoton de funcţii, mărginit inferior. Acest şir converge uniform[2] către o funcţie din $\mathcal{F}_1$, $\varphi(x)$. Şirul de numere $\{f(x_{\nu_i})\}_{i=1}^{\infty}$ este deci convergent şi are limita $\varphi(x_0)$. Analog se arată existenţa limitei finite la stînga în x_0. Cazurile $x_0 = a$ şi $x_0 = b$ se pot încadra în demonstraţia de mai sus ca şi cazuri particulare, deoarece în fiecare din ele interesează numai o limită unilaterală.

TEOREMA 3. *Dacă $n > 1$, funcţiile convexe, neconcave, neconvexe şi concave faţă de $\mathcal{F}_n$ în $[a, b]$ sînt funcţii cu variaţie mărginită faţă de $\mathcal{F}_n$ în $[a, b]$.*

Demonstraţie[3]. Ne bazăm pe o consecinţă a proprietăţii (I_n), conform căreia două funcţii distincte din $\mathcal{F}_n$ pot avea valori comune în cel mult $n-1$ puncte şi dacă există efectiv $n-1$ asemenea puncte în $[a, b]$, diferenţa celor două funcţii schimbă semnul în fiecare din aceste puncte. Concluzia din teoremă rezultă printr-un raţionament analog celui din demonstraţia teoremei 1.

TEOREMA 4. *O funcţie cu variaţie mărginită în $[a, b]$, faţă de $\mathcal{F}_n$, $n > 1$, este continuă în (a, b).*

Demonstraţie. Fie $g(x)$ o funcţie care satisface ipotezele din teorema (4). Fie x_0 un punct din (a, b). Dacă în vecinătatea lui x_0, $g(x)$ are una din proprietăţile de convexitate faţă de ea, e continuă în x_0, după cum rezultă din teoremele expuse în [1]. În caz contrar, există două sisteme de puncte $x' < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_0$ şi $x_1'' < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_0$ astfel ca pentru un $x > x_0$, $g(x)$ să fie cuprins între $L_n(x_1', x_2, \ldots, x_{n-1}, x_0\,;\,g|x)$ şi $L_n(x_1'', x_2, \ldots, x_{n-1}, x_0\,;\,g\,|x)$. Considerăm mulţimea funcţiilor din $\mathcal{F}_n$, care în $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_0$ iau respectiv valorile $g(x_2), g(x_3), \ldots, g(x_{n-1}), g(x_0)$. Dacă $x > x_0$, diferenţa dintre valorile în x a două funcţii din această mulţime trebuie să rămînă mărginită, pentru că $g(x)$ este cu variaţie mărginită faţă de $\mathcal{F}_n$ în $[a, b]$. Rezultă

[2] Uniformitatea convergenţei rezultă din proprietatea (I_n), aplicată cazului $n=1$.

[3] Funcţia $f(x)$, definită în $[a, b]$, este convexă, neconcavă, neconvexă sau concavă faţă de $\mathcal{F}_n$ în $[a, b]$, dacă pe orice sistem de $n+1$ puncte din $[a, b]$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$, avem $f(x_{n+1}) - L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\,f\,|\,x_{n+1}) >, \geqq, \leqq$ sau < 0.

că pentru $x > x_0$, suficient de apropiat de x_0, $g(x)$ rămîne cuprins între valorile în x a două funcții din mulțimea mai sus considerată. Continuitatea la dreapta în x rezultă atunci imediat. Un raționament analog ne demonstrează continuitatea la stînga în x_0.

4. O primă problemă importantă pe care ne-o punem în legătură cu noțiunea de funcție cu variație mărginită introdusă prin definiția din această notă, este extinderea teoremei lui Jordan. Din cauză că nu se cere mulțimii $\mathcal{F}_n$ proprietatea de a fi liniară, este necesară găsirea unui analog al teoremei lui Jordan, care nu se bazează pe liniaritatea mulțimilor $\mathcal{F}_n$. În cazul $n=1$ are loc

TEOREMA 5. *Pentru ca funcția $g(x)$, definită în intervalul $[a, b]$, să fie cu variație mărginită față de $\mathcal{F}_1$ în $[a, b]$, este necesar și suficient să existe o funcție crescătoare față de $\mathcal{F}_1$ în $[a, b]$, $\Psi(x)$ astfel ca oricare ar fi punctul x_0 fixat în $[a, b]$ să avem pentru orice pereche de puncte $x' < x''$ situate în $[\alpha, x_0]$ inegalitatea $L_1(x''; f|x_0) - L_1(x'; f|x_0) \leq L_1(x''; \Psi|x_0) - L_1(x'; \Psi|x_0)$.*

În cazul definiției clasice a funcțiilor cu variație mărginită, cînd $\mathcal{F}_1$ este mulțimea funcțiilor constante în $[a, b]$, această teoremă e echivalentă cu teorema de descompunere a lui Jordan. În cazul unei mulțimi oarecare $\mathcal{F}_1$, demonstrația teoremei 5 este imediată pentru că îndeplinirea condițiilor de inegalitate din enunț este echivalentă cu proprietatea funcțiilor (4) de a fi cu variație egal mărginită.

5. O altă problemă care se pune în legătură cu definiția dată în această lucrare este aceea de a face un studiu comparativ al funcțiilor cu variație mărginită în sensul acestei definiții și al funcțiilor cu variație mărginită în sensul definiției date de T. Popoviciu [2].

BIBLIOGRAFIE

1. E. Moldovan, *O generalizare a noțiunii de convexitate.* Studii și cercetări științifice — Acad. R.P.R. Filiala Cluj, t. VI, nr. 3–4, 1955, p. 65–73.
2. T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles.* Mathematica, t. VIII, 1934, p. 1–85.

Функции ограниченного изменения

(Краткое содержание)

В работе дается обобщение понятия полного изменения, введя понятие функции органиченного изменения, относительно некоторого интерполярного множества, данного порядка n в некотором интервале $[a, b]$. Даны основные теоремы об исследовании функций органиченного изменения в указанном смысле.

Fonctions à variation bornée

(Résumé)

On donne une extension à la notion de variation totale, en introduisant la notion de fonction a variation bornée par rapport à une ensemble interpolatoir d'ordre donné n dans un intervalle $[a, b]$. On donne les théorèmes fondamentaux de l'étude des fonctions à variation bornée dans ce sens.