# PROBLEME DE TRANSPORT CU CENTRE INTERMEDIARE

DE

B. BEREANU

(Bucureşti)

*Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8—13 decembrie 1960, Cluj*

În practică se întîlnesc adesea probleme al căror model matematic va fi numit în cele ce urmează *problema transportului cu centre intermediare*. Se arată că acestei probleme de programare liniară i se poate ataşa o anumită problemă de transporturi cu capacităţi de trafic limitate, a cărei soluţie, prin algoritmul lui Kantorovici, determină soluţia problemei iniţiale. Înlocuirea metodei simplex printr-un algoritm simplu, cum este cel al lui Kantorovici, prezintă importanţă şi în cazul utilizării maşinilor electronice de calcul, deoarece în acest mod se reduce volumul ocupat în „memoria" maşinii.

## § 1. Problema transportului cu capacităţi de trafic limitate

Fie $G$ un graf finit fără bucle, iar $i$ $(i = 1, \ldots, n)$ vîrfurile sale numerotate într-o ordine oarecare. Numerotăm de asemenea arcele lui $G$ şi fie $(i, j)_k$ $(k = 1, \ldots, n')$ arcul care are $i$ extremitate iniţială, $j$ extremitate finală şi căruia i s-a atribuit numărul de ordine $k$. Dacă fiecărei perechi ordonate de vîrfuri adiacente $(i, j)$ i se asociază numerele pozitive $\tau_{ij}$ şi $\gamma_{ij}$ respectiv, capacitatea de trafic în unitatea de timp şi costul unitar al transportului, se obţine o reţea de transport $R$.

În general $\tau_{ij} \neq \tau_{ji}$ şi $\gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}$. Fiecărui vîrf $i$ i se ataşează sarcina de transport $\pi_i$, astfel ca $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 0$. Se numeşte sistem posibil de transporturi în raport cu reţeaua de transport $R$ şi sarcinile de transport date, numerele $h_k$ corespunzătoare arcelor $(i, j)_k$ $(k = 1, \ldots, n')$, care satisfac condiţiile

$$-\tau_{ji} \leqslant h_k \leqslant \tau_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{\alpha_i} h_{\alpha_i} = \pi_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

suma fiind extinsă la toate arcele grafului care conţin vîrful $i$.

Presupunînd că sistemul (1), (2) este compatibil, fie

$$= \begin{cases} h_k \gamma_{ij} & \text{dacă} \quad h_k > 0, \\ 0 & \text{dacă} \quad h_k = 0, \\ -h_k \gamma_{ij} & \text{dacă} \quad h_k < 0, \end{cases}$$

$$\text{şi} \quad L = \sum_{k=1}^{n'} l_k.$$

Prin problema transporturilor cu capacităţi de trafic limitate se înţelege problema determinării unui sistem posibil de transporturi pentru care $L$ să ia valoarea minimă. Un astfel de sistem de transporturi se numeşte optimal. În interpretare economică, graful $G$ reprezintă o reţea de căi de comunicaţie. Vîrful $i$ al grafului este un centru de producţie al unui produs omogen dacă $\pi_i > 0$, centru de consum al aceluiaşi produs dacă $\pi_i < 0$, şi centru de tranzit (nod al căilor de comunicaţie) dacă $\pi_i = 0$. Arcele grafului sînt porţiuni din reţeaua de comunicaţii care leagă două centre vecine; capacitatea maximă de trafic pe porţiunea orientată $k$ a reţelei care uneşte centrele $i$ şi $j$ este $\tau_{ij}$, în sensul de la $i$ la $j$ şi $\tau_{ij}$ în sens invers. Cheltuielile de transport unitare respective sînt $\gamma_{ij}$ şi $\gamma_{ji}$; $|h_k|$ este cantitatea transportată pe porţiunea $k$, semnul lui $h_k$ fiind plus dacă transportul se face în sensul arcului $k$ şi minus, dacă transportul se face în sens invers; $l_k$ reprezintă costul transportului pe porţiunea $k$ a reţelei corespunzător lui $h_k$.

L. V. Kantorovici şi M. K. Gavurin [1] au arătat că pentru ca un sistem de transporturi posibil să fie optimal este necesar şi suficient ca să existe o funcţie potenţial $u(i)$ definită pentru toate vîrfurile grafului, care să verifice sistemul

$$\left.\begin{array}{llll} -\gamma_{ji} \leqslant u(j) - u(i) \leqslant \gamma_{ij} & \text{dacă} & h_k = 0, \\ u(j) - u(i) = \gamma_{ij} & \text{dacă} & 0 < h_k < \tau_{ij}, \\ u(i) - u(j) = \gamma_{ji} & \text{dacă} & -\tau_{ji} < h_k < 0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{llll} u(j) - u(i) \geqslant \gamma_{ij} & \text{dacă} & h_k = \tau_{ij}, \\ u(i) - u(j) \geqslant \gamma_{ji} & \text{dacă} & h_k = -\tau_{ji}. \end{array}\right\} \tag{4}$$

În articolul citat s-a indicat un procedeu simplu de a determina printr-un număr finit de iteraţii un sistem optimal de transporturi, pornind de la un sistem admisibil oarecare. M. A. Iakovleva [2] a utilizat aceeaşi metodă pentru rezolvarea problemei transporturilor cu capacităţi de trafic limitate la calculatorul electronic Strela. Dacă se consideră



$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = +\infty$, adică se neglijează limitările capacităţilor de transport, funcţia potenţial $u(i)$ trebuie să verifice relaţiile (3). O expunere elementară a algoritmului lui Kantorovici în acest caz se găseşte în [3]. În paragrafele următoare, unele probleme de programare liniară întîlnite des în practică sînt „modelate" prin probleme de transport cu capacităţi de trafic limitate al cărui optim furnizează optimul problemelor iniţiale. Rezolvarea acestor probleme se reduce deci la rezolvarea unor probleme de transport cu capacităţi de trafic limitate, cărora li se poate aplica algoritmul lui Kantorovici.

## § 2. Problema transporturilor cu centre intermediare

În practică se întîlneşte frecvent următoarea situaţie. Un produs omogen expediat din centrele de producţie $A_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ în cantităţi $a_i$ trebuie să treacă printr-unul dintre centrele intermediare $I_j$ $(j = m + 1, \ldots, m + p)$ cu capacitate maximă de recepţie $d_j > 0$, pentru a fi depozitat ori prelucrat înainte de a ajunge în centrul de consum $B_k$ $(k = m + p + 1, \ldots, m + p + n)$ în cantitatea fixată $b_k$. Să notăm cu $x_{ij}$ cantitatea expediată din $A_i$ în $I_j$, cu $x'_{jk}$ cantitatea expediată din $I_j$ în $B_k$ şi cu $c_{ij}$, $c'_{jk}$ cheltuielile unitare de transport respective. Se poate formula următoarea problemă, numită în cele ce urmează, *problema transporturilor cu centre intermediare*:

Să se determine valorile $x_{ij}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = m + 1, \ldots, m + p)$ şi $x'_{jk}$ $(j = m + 1, \ldots, m + p;\ k = m + p + 1, \ldots, m + p + n)$ care satisfac condiţiilor:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{j=m+1}^{m+p} x_{ij} = a_i & (i = 1, \ldots, m), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum\limits_{k=m+p+1}^{m+p+n} x'_{jk} \leqslant d_j \ (j = m + 1, \ldots, m + p), & \\ \sum\limits_{j=m+1}^{m+p} x'_{jk} = b_k & (k = m + p + 1, \ldots, m + p + n), \\ x_{ij} \geqslant 0 & (i = 1, \ldots, m;\ j = m + 1, \ldots, m + p), \\ x'_{jk} \geqslant 0 & (j = m + 1, \ldots, m + p;\ k = m + p + 1) \end{array}\right\} \tag{5}$$

şi care minimizează suma

$$C(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+p} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=m+1}^{m+p} \sum_{k=m+p+1}^{m+p+n} c'_{jk} x'_{jk}, \tag{6}$$

$a_i$, $d_j$, $b_k$, $c_{ij}$, $c'_{jk}$ fiind numere pozitive care satisfac relaţia

$$\Omega = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=m+p+1}^{m+p+n} b_k \leqslant \sum_{j=m+1}^{m+p} d_j. \ ^{*)} \tag{7}$$

---

*) Relaţiile (5) şi (16) s-ar putea scrie mai condensat dacă s-ar utiliza un model tridimensional, dar în vederea celor ce urmează, notaţiile introduse se dovedesc a fi mai potrivite.

*Cazuri particulare*:

*a*) Dacă

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=m+p+1}^{m+p+n} b_k = \sum_{j=m+1}^{m+p} d_j,$$

se observă că rezolvarea *problemei transporturilor cu centre intermediare* se reduce la rezolvarea a două probleme obişnuite de transporturi.

*b*) Dacă, ţinînd seama de datele problemei, capacitatea de recepţie a centrelor intermediare poate fi considerată nelimitată, *problema transporturilor cu centre intermediare* se reduce de asemenea la următoarea problemă obişnuită de transporturi:

Să se determine $\xi_{ik} \geqq 0$, $(i = 1, \ldots, m;\ k = m + p + 1, \ldots, m + p + n)$, ecuaţiile restrictive fiind

$$\sum_{k=m+p+1}^{m+p+n} \xi_{ik} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_{ik} = b_k \qquad (k = m + p + 1, \ldots, m + p + n), \tag{8}$$

pentru care suma

$$C(\Xi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=m+p+1}^{m+p+n} \gamma_{ik} \xi_{ik} \quad (i = 1, \ldots, m; k = m + p + 1, \ldots, m + p + n)$$

este minimă, unde

$$\gamma_{ik} = \min_j (c_{ij} + c'_{jk}) \qquad (j = m + 1, \ldots, m + p)$$

## § 3. Rezolvarea problemei transporturilor cu centre intermediare prin metoda „modelării"

Problema considerată este o problemă de programare liniară şi poate fi deci rezolvată printr-unul dintre algoritmele generale, de pildă prin metoda simplex. Ea poate fi însă rezolvată prin algoritmul mai simplu al lui Kantorovici, asociindu-i-se o problemă de transporturi cu capacităţi de trafic limitate, a cărei soluţie furnizează soluţia problemei iniţiale.

a) Problema admite un minim. Este suficient a arăta că mulţimea soluţiilor sistemului (5) nu este vidă.

Fie

$$0 \leqslant d'_j \leqslant d_j \qquad (j = m + 1, \ldots, m + p),$$

astfel ca

$$\sum_{j=m+1}^{m+p} d'_j = \Omega.$$



Atunci

$$x^0_{ij} = \frac{a_i d'_j}{\Omega} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = m + 1, \ldots, m + p),$$

$$x^{0'}_{jk} = \frac{d'_j b_k}{\Omega} \qquad (j = m + 1, \ldots, m + p; k = m + p + 1, \ldots, m + p + n),$$

verifică sistemul (5).

b) Considerăm reţeaua de transport al cărui graf este reprezentat în figură, unde am luat pentru exemplificare $m = 3$, $p = 2$, $n = 4$ şi în care am introdus centrele fictive $I'_j$, $(j = m + 1, \ldots, m + p)$.

Pentru simplificarea notaţiilor am numerotat centrele fictive $I'_j$ cu acelaşi număr cu care am notat centrul intermediar corespunzător.

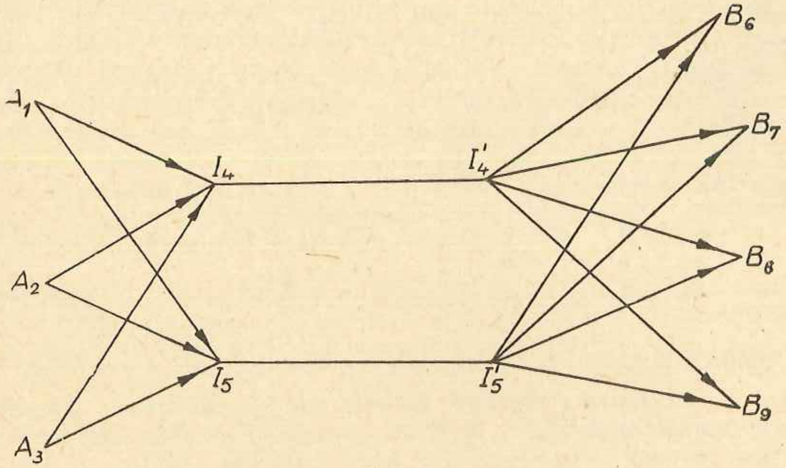


Fig. 1

Fie potrivit notaţiilor din § 1

$$\pi_i = \begin{cases} a_i & (i = 1, \ldots, m), \\ 0 & \text{în centrele intermediare}, \\ -b_i & (i = m + p + 1, \ldots, m + p + n), \end{cases} \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma_{ij} = c_{ij} & (i = 1, \ldots, m; j = m + 1, \ldots, m + p), \\ \gamma'_{jk} = c'_{jk} & (j = m + 1,\ldots, m + p; k = m + p + 1,\ldots, m + p + n) \\ \gamma_{jj} = \sigma > 0 & (j = m + 1, \ldots, m + p), \\ & \quad \text{cheltuielile unitare de transport} \\ \gamma_{ji} = \gamma'_{kj} = p & (\text{unde } p \text{ este un număr destul de mare}), \end{array}\right\} \tag{10}$$

astfel încît să fie suficient a lua în considerare numai acele sisteme posibile de transporturi pentru care $h_{\alpha\beta} \geqq 0$, adică pentru care transporturile au loc numai în sensul de orientare al grafului

$$\begin{array}{ll} \tau_{ij} = \tau_{ji} = \tau_{jk} = r & (i = 1, \ldots, m;\ j = m + 1, \ldots, m + p; \\ & \quad k = m + p + 1, \ldots, m + p + n), \\ \tau_{jj} = d_j & (j = m + 1, \ldots, m + p), \end{array} \tag{11}$$

unde $r$ este un număr pozitiv ales astfel ca (1) să fie verificate pentru orice plan de transport care satisface (2). Problema de transport cu capacităţi de trafic limitate corespunzătoare reţelei de transport (10) şi (11) şi sarcinilor de transport (9), o considerăm ca ataşată problemei (5), (6), (7).

Presupunem că $h_{\alpha\beta} \geqq 0$ este un sistem posibil de transporturi în raport cu reţeaua de transport definită prin graful din figură şi prin relaţiile (9), (10), (11). Scriind că valorile $h_{\alpha\beta}$ verifică condiţiile (1) şi (2), se obţine sistemul

$$\begin{aligned}
&h_{jj} = d_j \quad (j = m+1, \ldots, m+p),\\
&\sum_{j=m+1}^{m+p} h_{ij} = a_i \quad (i = 1, \ldots, m),\\
&\sum_{i=1}^{m} h_{ij} - h_{jj} = 0 \quad (j = m+1, \ldots, m+p),\\
&-h_{jj} + \sum_{k=m+p+1}^{m+p+n} h_{jk} = 0 \quad (j = m+1, \ldots, m+p),\\
&-\sum_{j=m+1}^{m+p} h_{jk} = -b_k \quad (k = m+p+1, \ldots, m+p+n),\\
&h_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = m+1, \ldots, m+p),\\
&h_{jj} \geqslant 0 \quad (j = m+1, \ldots, m+p),\\
&h_{jk} \geqslant 0 \quad (j = m+1, \ldots, m+p;\ k = m+p+1, \ldots, m+p+n).
\end{aligned} \tag{12}$$

Se vede că sistemul (12) coincide cu sistemul (5). Avem deci

LEMA 1. *Mulţimea soluţiilor posibile ale problemei de transport cu centre intermediare coincide cu mulţimea soluţiilor posibile ale problemei de transporturi cu capacităţi limitate de trafic* (9) (10), (11).

c) Putem deci să notăm

$$\begin{aligned}
&h_{ij} = x_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = m+1, \ldots, m+p),\\
&h_{jk} = x'_{jk} \quad (j = m+1, \ldots, m+p;\ k = m+p+1, \ldots, m+p+n).
\end{aligned} \tag{13}$$

Cu aceste notaţii au loc egalităţile:

$$L(\mathbf{H}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{m+p} l_{ij} + \sum_{j=m+1}^{m+p} l_{jj} + \sum_{j=m+1}^{m+p}\sum_{k=m+p+1}^{m+p+n} l_{jk} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{m+p} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=m+1}^{m+p}\sum_{k=m+p+1}^{m+p+n} c'_{jk}x'_{jk} + \sigma\Omega,$$

$$L(\mathbf{H}) = C(\mathbf{X}) + \sigma\Omega.$$

Într-adevăr

$$\sum_{j=m+1}^{m+p} l_{jj} = \sigma \sum_{j=m+1}^{m+p} h_{jj} = \sigma \sum_{j=m+1}^{m+p}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sigma \sum_{i=1}^{m} d_i = \sigma\Omega.$$



Fie deci $\mathbf{H}^*$ o soluţie optimală a sistemului (12) şi $\mathbf{X}^*$ soluţia corespunzătoare a sistemului (5), obţinută prin intermediul formulelor (13),

$$L(\mathbf{H}^*) = C(\mathbf{X}^*) + \sigma\Omega = \min\,[L(\mathbf{H})] = \min\,[C(\mathbf{X})] + \sigma\Omega.$$

Avem deci

LEMA 2. *Unei soluţii optimale a sistemului* (12) *îi corespunde prin formulele* (13) *o soluţie optimală a sistemului* (5).

Din lemele 1 şi 2 rezultă:

TEOREMA I. *Se poate obţine o soluţie a* **problemei transportului cu centre intermediare**, *rezolvînd problema de transporturi cu capacităţi de trafic limitate ataşată. Formulele* (13) *determină soluţia problemei iniţiale.*

*Problema transporturilor cu centre intermediare*, admite o generalizare imediată: produsul omogen expediat din centrul de producţie $A_i$ trebuie să treacă prin cîte unul dintre centrele intermediare $L_{j_1}, I_{j_2}, \ldots, I_{j_p}$, cu capacităţi de recepţie limitate, înainte de a ajunge în centrul de consum $B_k$. Dacă capacităţile de recepţie ale centrelor satisfac condiţii analoage cu condiţia introdusă în § 2, problema are soluţie şi ea se poate obţine rezolvînd o problemă de transporturi cu capacităţi de trafic limitate, analoagă cu cea introdusă în § 3. Un astfel de model se întîlneşte, de exemplu, în cazul prelucrării unui produs în mai multe întreprinderi înainte de a putea fi consumat.

*Observaţii*. 1. Este posibil ca soluţia optimală să nu prevadă transportul prin unele dintre centrele intermediare. Rezultă că metoda indicată poate servi la alegerea amplasării optimale a centrelor intermediare dintr-un număr finit de locaţii posibile (sensul cuvîntului optimal este acelaşi ca în problema transporturilor cu centre intermediare).

2. Să presupunem că avem $p$ întreprinderi $I_j$ $(j = 1, \ldots, p)$ care prelucrează o materie primă sau un semifabricat produs în centrele $A_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, produsul obţinut fiind expediat în centrele de consum $B_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Presupunem că cheltuielile de fabricaţie pe unitatea de produs în întreprinderea $I_j$ sînt $\alpha_j$ $(j = 1, \ldots, p)$. Fie $a'_i$ mărimea producţiei care se obţine din materia primă din $A_i$ şi $b_k$, mărimea consumului în $B_k$, astfel că $\sum_{i=1}^{m} a'_i = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Presupunem că $I_j$ are o capacitate de producţie $d_j$ şi că $\sum_{j=1}^{p} d_j \geqslant \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Se vede că problema repartizării producţiei între întreprinderile $I_j$ astfel încît cheltuielile totale (de producţie şi de transport) să fie minime revine la o problemă de transporturi cu centre intermediare.

3. Aceeaşi metodă de „modelare" poate fi utilizată în problema alegerii unui plan raţional de transporturi pe căile ferate dacă se ţine seama nu numai de capacităţile limitate de trafic pe diferitele porţiuni ale reţelei, ci şi de faptul că nodurile de cale ferată importante au o capacitate de tranzit limitată. În modelul corespunzător se înlocuiesc nodurile de cale ferată respective cu porţiuni de reţea cu aceeaşi capacitate de transport.

Cheltuielile de transport pe aceste porţiuni fictive de reţea se consideră egale cu un număr $m$, pozitiv arbitrar de mic.

4. *Problema măririi capacităţii centrelor de producţie.* Să considerăm problema obişnuită a transportului. Fie $a_i$ cantităţile expediate din centrele de producţie $A_i$ $(i = 1, \dots, m)$, $b_j$ cantităţile necesare în centrele de consum $B_j$ $(j = 1, \dots, n)$, în unitatea de timp. Presupunem că $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Notăm cu $m$ cheltuielile minime de transport corespunzătoare matricei $\mathbf{C} = (c_{ij})$ a costurilor. Presupunem că $\mathbf{C} = (c_{ij})$ $(i = 1, \dots, m;$ $j = 1, \dots, n)$ rămîne neschimbată, dar $b_j$ se înlocuiesc cu $b'_j \geqq b_j$ $(j = 1, \dots, n)$, astfel că $\sum_{j=1}^{n} b'_j = \sum_{j=1}^{n} b_j + s$. Fie $d_i$ creşterea maximă posibilă a capacităţii de producţie în $A'_i$ astfel ca $\sum_{i=1}^{m} d_i \geqq s$. Se cere să se repartizeze creşterea producţiei necesară pentru a acoperi nevoile de consum în $B_j$ între centrele $A_i$ astfel încît dacă $m'$ sînt cheltuielile minime corespunzătoare noilor sarcini de transport, $(m' - m)$ să fie minim.

Se vede că probleme menţionată este echivalentă cu următoarea problemă de transporturi cu centre intermediare :

Cantitatea $s$ dintr-un produs omogen trebuie transportată din centrul fictiv $Q$, în centrele $B_j$ în cantităţi $(b'_j - b_j)$ $(j = 1, \dots, n)$, astfel încît să treacă printr-unul dintre centrele intermediare $A_i$ $(i = 1, \dots, m)$, avînd capacitatea maximă de recepţie $d_i$ $(i = 1, \dots, m)$. Ştiind că cheltuielile de transport unitare pe ruta $OA_iB_j$ sînt $(\sigma + c_{ij})$ $(i = 1, \dots, m;$ $j = 1, \dots, n)$, să se determine un plan optimal de transport în sensul introdus anterior.

5. Aceeaşi metodă a „centrului fictiv" poate fi utilizată în următoarea problemă :

Fiind date centrele $A_i$ $(i = 1, \dots, m)$, $B_j$ $(j = 1, \dots, m)$, matricea cheltuielilor de transport $\mathbf{C} = (c_{ij})$ $(i = 1, \dots, m;$ $j = 1, \dots, n)$ şi numerele $b_j > 0$ $(j = 1, \dots, n)$ reprezentînd cantităţile necesare dintr-un produs omogen în centrele $B_j$ $(j = 1, \dots, n)$, să se aleagă centrele $A_{i_\alpha}$ şi cantităţile respective $a_{i_\alpha}$ (producţia) $(\alpha = 1, \dots, m')$, unde $m' < m$, iar

$$\sum_{\alpha=1}^{m'} a_{i_\alpha} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$a_{i_\alpha} \leqslant A$$

astfel încît costul cheltuielilor de transport să fie minim.



## ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕВОЗКИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ЦЕНТРАМИ

### РЕЗЮМЕ

Некоторые встречающиеся на практике задачи установления рационального плана транспортов, в случае хранения или обработки однородного продукта в промежуточном центре перед доставкой в центры потребления, а также распределения производства между различным предприятиями с таким расчетом, чтобы издержки на производство и транспорт, включая перевозки в центры потребления, были минимальными, ведут, при некоторых условиях, к задаче линейного программирования, названной в работе *задачей о перевозках с промежуточными центрами.*

Указанной задаче соответствует задача о перевозках ограниченными пропускнами способностями, если ввести фиктивные центры и подходящим образом выбрать элементы сетки перевозок (9), (10), (11). Доказывается, что оптимальное решение присоединенной задачи определяет посредством формулы (13) оптимальное решение первоначальной задачи. Таким образом, решение задачи о перевозках с промежуточными ценрами сводится к решению некоторой задачи о перевозках ограниченными пропускнами способностями, которое можно получить с помощью алгоритма Канторовича, более простого, чем симплекс-алгоритм.

Задача о перевозках с промежуточными центрами допускает непосредственное обобщение: однородный продукт, отправляемый в количествах $a_i$ из центров производства $A_i$ должен проходить через один из промежуточных центров $I_{j_1}, I_{j_2}, \dots, I_{j_p}$, с ограниченной емкостью приема перед тем, как поступить в центры потребления $B_k$, потребности которых суть $b_k$. Этой задаче можно также сопоставить подходящим образом выбранную задачу о перевозках с ограниченными пропускнами способностями, решение которой дает решение первоначальной задачи.

Рассматриваются еще задачи увеличения производственной мочност производительных центров и оптимального расположения производительных центров, которые в определенных условиях можно решить с помощью задач о перевозках с промежуточными центрами.

## PROBLÈMES DE TRANSPORT AVEC DES CENTRES INTERMÉDIAIRES

### RÉSUMÉ

Des problèmes rencontrés dans la pratique — l'établissement d'un plan de transports excluant les transports injustifiés dans le cas de l'entreposage ou de la transformation d'un produit homogène dans un centre intermédiaire avant qu'il parvienne aux centres de consommation, la répartition de la production entre différentes entreprises faite de manière que

les frais de production et de transport (y compris le transport dans les centres de consommation) soient minima — aboutissent, dans certaines conditions, à un problème de programmation linéaire que l'auteur dénomme *problème des transports avec des centres intermédiaires.*

On associe à ce problème un problème de transports avec des capacités de trafic limitées, par l'introduction de centres fictifs et le choix convenable des éléments du réseau de transport (9), (10), (11). On démontre qu'une solution optimale du problème associé, détermine, en vertu des formules (13), une solution optimale du problème initial. On ramène ainsi la détermination de la solution du problème des transports avec des centres intermédiaires à celle d'un problème de transports avec des capacités de trafic limitées, dont la solution peut s'obtenir par l'algorithme de Kantorovitch, qui est plus simple que l'algorithme simplex.

Le problème des transports avec des centres intermédiaires admet une généralisation immédiate : le produit homogène expédié des centres de production $A_i$ en des quantités $a_i$ doit passer chaque fois par l'un des centres intermédiaires $I_{j_1}, I_{j_2}, \ldots, I_{j_p}$, dont la capacité de réception est limitée, avant de parvenir aux centres de consommation $B_k$, dont les besoins sont $b_k$. On peut également associer à ce problème un problème de transports à capacités de trafic limitées et convenablement choisi, dont la solution fournit la solution du problème initial.

On considère aussi d'autres problèmes, comme l'augmentation de la capacité de production des centres producteurs et l'emplacement optimal de ces derniers qui, dans certaines conditions, peuvent être résolus par des problèmes de transports avec des centres intermédiaires.

BIBLIOGRAFIE

1. Канторович Л. В., Гавурин М. К., *Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков.* Проблема повышения эффективности работы транспорта, Москва, Изд. Акад. Наук СССР, 110—138 (1949).
2. Яковлева М. А., *Задача о минимуме транспортных затрат.* Применение математики в экономических исследованиях, Москва, Изд. Акад. Наук СССР, 390—399 (1959).
3. Mihu C., Bereanu B., *Reducerea parcursului în gol al vagonului de marfă (O aplicație a programării liniare).* Revista de statistică, *12*, 42—55 (1960).

Primit la 8. XII. 1960.