REZOLVAREA PROBLEMEI DESCHIDERII OPTIME A UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE CU AJUTORUL UNEI MAȘINI ELECTRONICE DE CALCUL

DE

I. MARUȘCIAC, E. MUNTEANU și T. RUS
(Cluj)

1. Fie $P_1, P_2, \ldots, P_n$ un sistem de n puncte în plan, și masa materială M dată, distribuită pe acest sistem de puncte. Notăm cu x_i și y_i coordonatele punctului P_i. Putem presupune că masa $M = 1$. Se știe că centrul de greutate al acestui sistem este situat în interiorul înfășurătorii convexe închisă al acestuia, adică în interiorul celui mai mic poligon convex care conține în interior toate punctele sistemului.

Numim deschiderea sistemului de puncte materiale cea mai mare distanță de la un punct al sistemului la centrul de greutate.

Problema care se pune este de a determina o distribuție a maselor $m_1, m_2, \ldots, m_n$ pe punctele sistemului în așa fel ca deschiderea să fie minimă.*)

Problema astfel formulată se reduce la găsirea punctului de abatere minimă al sistemului (punctul Cebîșev), adică a unui punct $T(x_t, y_t)$ care se bucură de proprietatea că

$$\rho(P_i, T) = \min_{(P)} \rho(P_i, P), \tag{1}$$

unde $\rho(P_i, P)$ este distanța de la un punct P_i al sistemului la un punct P din plan.

Deoarece cunoscînd coordonatele punctului T, avem

$$x_t = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i,$$
$$y_t = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \tag{2}$$
$$1 = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

*) Această problemă a fost pusă cu ocazia discuțiilor care au avut loc în cadrul Seminarului de cea mai bună aproximație și programare liniară, Cluj, 1960.

Putem rezolva acest sistem în raport cu m_i, exprimînd trei din necunoscute în funcţie de celelalte. Evident că avem o infinitate de soluţii (adică o infinitate de distribuţii care au acelaşi centru de greutate).

Pentru a găsi coordonatele punctului Cebîşev, vom folosi un algoritm dat de S. I. Zuhovitki [1], [2].

În cele ce urmează dăm mai întîi o descriere a algoritmului, astfel încît pe baza lui să putem construi schema programului pentru o maşină cifrică.

2. Pentru început, luăm un punct arbitrar $P^{(0)}(x^{(0)}, y^{(0)})$ şi calculăm distanţele

$$\rho_i = \rho(P^{(0)}, P_i) = \sqrt{(x^{(0)} - x_i)^2 + (y^{(0)} - y_i)^2} \qquad (2')$$

şi fie P_{i_0} punctul pentru care

$$\rho_{i_0} > \rho_i, \qquad i \neq i_0.$$

Dacă există mai multe numere $\rho_i = \rho_{i_0}$, după cum vom vedea în cele ce urmează, aceasta va micşora numărul paşilor. De aceea putem presupune că $\rho_i > \rho_{i_0}$ pentru $i = i_0$.

În continuare construim versorul $\vec{Q}_1(\xi_1, \eta_1)$ pe direcţia $P^{(0)}\,P_{i_0}$ dirijat de la $P^{(0)}$ la P_{i_0}, adică cu componentele

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x_{i_0} - x^{(0)}}{\sqrt{(x^{(0)} - x_{i_0})^2 + (y^{(0)} - y_{i_0})^2}}, \\ \eta_1 &= \frac{y_{i_0} - y^{(0)}}{\sqrt{(x^{(0)} - x_{i_0})^2 + (y^{(0)} - y_{i_0})^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

şi considerăm ecuaţiile

$$\rho(P^{(0)} + \varepsilon\vec{Q}_1, P_{i_0}) = \rho(P^{(1)} + \varepsilon\vec{Q}_1, P_i), \qquad i \neq i_0,$$

sau, sub forma explicită,

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{\rho^2(P^{(0)}, P_{i_0}) - \rho^2(P^{(0)}, P_i)}{2[(x_{i_0} - x_i)\xi_1 + (y_{i_0} - y_i)\eta_1]}.$$

Fie $\varepsilon_{i_1} = \min \varepsilon_i^{(0)}$, $\varepsilon_i^{(0)} > 0$. Ca primă aproximaţie luăm punctul

$$P^{(1)} = P^{(0)} + \varepsilon_{i_1}Q_1 = P^{(1)}(x^{(0)} + \varepsilon_{i_1}\xi_1, y^{(0)} + \varepsilon_{i_1}\eta_1).$$

În acest punct vom avea

$$\rho(P^{(1)}, P_{i_0}) = \rho(P^{(1)}, P_{i_1}) > \rho(P^{(1)}, P_i), \quad i \neq i_0 \text{ şi } i_1.$$

Dacă $P^{(1)}$ este mijlocul segmentului $P_{i_0}\,P_{i_1}$, atunci evident el este punct Cebîşev şi algoritmul s-a terminat. Adică, dacă

$$x^{(0)} + \varepsilon_{i_1}\xi_1 = \frac{x_{i_0} + x_{i_1}}{2},$$

$$y^{(0)} + \varepsilon_{i_1}\eta_1 = \frac{y_{i_0} + y_{i_1}}{2},$$

atunci condiţia ca $P^{(0)}$ să fie T, se scrie

$$\frac{x_{i_0} + x_{i_1} - 2x^{(0)}}{\xi_1} = \frac{y_{i_0} + y_{i_1} - 2y^{(0)}}{\eta_1}.$$

Dacă $P^{(1)}$ nu se găseşte pe segmentul $\overline{P_{i_0}P_{i_1}}$, atunci pentru a construi a doua aproximaţie vom construi versorul $\vec{Q}_2(\xi_2, \eta_2)$ de pe mediatoarea segmentului $\overline{P_{i_0}P_{i_1}}$ dirijat de la $P^{(1)}$ spre segmentul $\overline{P_{i_0}P_{i_1}}$, adică

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{x_{0_1} - x^{(1)}}{\sqrt{(x_{0_1} - x^{(1)})^2 + (y_{0_1} - y^{(1)})^2}}, \\ \eta_2 &= \frac{y_{0_1} - y^{(1)}}{\sqrt{(x_{0_1} - x^{(1)})^2 + (y_{0_1} - y^{(1)})^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

unde

$$x_{0_1} = \frac{x_{i_1} + x_{i_1}}{2}, \quad y_{0_1} = \frac{y_{i_0} + y_{i_1}}{2}$$

şi considerăm ecuaţiile

$$\rho(P^{(1)} + \varepsilon\vec{Q}_2, P_{i_0}) = \rho(P^{(1)} + \varepsilon\vec{Q}_2, P_{i_1}), \quad i \neq i_0, i_1,$$

de unde

$$\varepsilon_i^{(1)} = \frac{\rho^2(P^{(1)}, P_{i_0}) - \rho^2(P^{(1)}, P_i)}{2[(x_{i_0} - x_i)\xi_2 + (y_{i_0} - y_i)\eta_2]}. \qquad (6')$$

Fie $\varepsilon'_{i_2} = \min \varepsilon_i^{(1)}$, $\varepsilon_i^{(1)} > 0$ şi fie ε''_{i_2} valoarea lui ε corespunzătoare mijlocului segmentului $\overline{P_{i_0}P_{i_1}}$, valoare care face minimă mărimea $\rho(P^{(1)} + \varepsilon\vec{Q}_2, P_{i_0})$, adică

$$\varepsilon''_{i_2} = (x_{i_0} - x^{(1)})\xi_2 + (y_{i_0} - y^{(1)})\eta_2. \qquad (7)$$

Punem $\varepsilon_{i_2} = \min(\varepsilon_{i_2}, \varepsilon''_{i_2})$.

Ca a doua aproximaţie luăm punctul

$$P^{(2)}(x^{(2)}, y^{(2)}) = P^{(1)} + \varepsilon_{i_2}\vec{Q}_2 = P^{(2)}(x^{(1)} + \varepsilon_{i_2}\xi_2, y^{(1)} + \varepsilon_{i_2}\eta_2). \qquad (7')$$

Dacă $\varepsilon_{i_2} = \varepsilon'_{i_2}$, atunci

$$\rho(P^{(2)}, P_{i_0}) = \rho(P^{(2)}, P_{i_1}) = \rho(P^{(2)}, P_{i_2}) > \rho(P^{(2)}, P_i),$$
$$i \neq i_0, i_1, i_2.$$

Dacă $\varepsilon_{i_2} = \varepsilon''_i$ atunci

$$\rho(P^{(2)}, P_{i_0}) = \rho(P^{(2)}, P_{i_1}) > \rho(P^{(2)}, P_i), \quad i \neq i_0, i_1.$$

Cînd $\varepsilon_{i_2} = \varepsilon'_{i_2}$, atunci dacă punctul $P^{(2)}$ este situat în interiorul simplexului bidimensional determinat de punctele P_{i_0}, P_{i_1}, P_{i_2}, avem $P^{(2)} = T$ şi procesul s-a terminat. Analitic această condiţie se exprimă în felul următor:

Notînd cu

$$L_{i_0 i_1}(x, y) = (y - y_{i_0})(x_{i_1} - x_{i_0}) - (x - x_{i_0})(y_{i_1} - y_{i_0}),$$

va trebui să fie verificate inegalităţile

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{i_0 i_1} &= L_{i_0 i_1}(x_{i_2}, y_{i_2})\ L_{i_0 i_1}(x^{(2)}, y^{(2)}) > 0, \\
\mathcal{L}_{i_0 i_2} &= L_{i_0 i_1}(x_{i_2}, y_{i_1})\ L_{i_0 i_2}(x^{(2)}, y^{(2)}) > 0, \\
\mathcal{L}_{i_1 i_2} &= L_{i_1 i_2}(x_{i_0}, y_{i_0})\ L_{i_1 i_2}(x^{(2)}, y^{)2)}) > 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Dacă $\varepsilon_{i_2} = \varepsilon''_{i_2}$, atunci evident $P^{(2)}$ este mijlocul segmentului $\overline{P_{i_0}P_{i_1}}$ şi deci $P^{(2)} = T$, adică procesul s-a terminat.

Presupunem că $P^{(2)}$ nu este situat în interiorul triunghiului $P_{i_0}, P_{i_1}, P_{i_2}$; atunci ne vom deplasa din punctul $P^{(2)}$ spre cea mai apropiată latură a triunghiului, pe mediatoare. Analitic aceasta înseamnă să comparăm mărimile pozitive

$$
\begin{aligned}
&\frac{L_{i_0 i_2}(x^{(2)}, y^{(2)})}{\pm\sqrt{(x_{i_0} - x_{i_2})^2 + (y_{i_0} - y_{i_2})^2}}\, d_{i_0 i_2}, \\
&\frac{L_{10 i_2}(x^{(2)}, y^{(2)})}{\pm\sqrt{(x_{i_1} - x_{i_2})^2 + (y_{i_1} - y_{i_2})^2}} = d_{i_1 i_2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

şi să luăm latura corespunzătoare celei mai mici dintre ele. Să presupunem că aceasta este $\overline{P_{i_1}P_{i_2}}$. Aceste două puncte împreună cu punctul $P^{(2)}$ joacă rolul respectiv al lui $\overline{P_{i_0}P_{i_1}}$ şi $P^{(1)}$. Aproximaţia următoare se calculează în mod analog.

Din algoritm se vede că

$$
\max_{(i)} \rho(P^{(\alpha)}, P_i) < \max_{(i)} \rho(P^{(\alpha-1}, P_i)
$$

şi după cel mult n paşi vom determina punctul Cebîşev.

4. Să presupunem deci că au fost determinate coordonatele punctului Cebîşev x_t şi y_t. Atunci, presupunînd că am numerotat sistemul în aşa fel încît $i_k = 1$, $i_{k+1} = 2$, $i_{k+2} = 3$, $P_{i_k}, P_{i_{k+1}}, P_{i_{k+2}}$ formînd triunghiul cu centrul cercului circumscris în $T(x_t, y_t)$, avem

$$
\begin{aligned}
m_1 + m_2 + m_3 &= 1 - \sum_{i=4}^{n} m_i, \\
x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 &= x_t - \sum_{i=4}^{n} m_i x_i, \\
y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 &= y_t - \sum_{i=4}^{n} m_i y_i.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Notînd

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},
$$

iar cu D_t^k şi cu D_i^k determinanţii obţinuţi din D prin înlocuirea coloanei a $k - a$ cu $1, x_t, y_t$, respectiv cu $1, x_i, y_i$, avem:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \frac{D_t^1}{D} - \frac{\sum_{i=4}^{n} m_i D_i^1}{D}, \\
m_2 &= \frac{D_t^2}{D} - \frac{\sum_{i=4}^{n} m_i D_i^2}{D}, \\
m_3 &= \frac{D_t^3}{D} - \frac{\sum_{i=4}^{n} m_i D_i^3}{D}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

O soluţie se obţine luînd $m_i = 0$, $i = 4, 5, \ldots, n$, căci se constată cu uşurinţă că D_t^k şi D au acelaşi semn, reprezentînd ariile orientate ale triunghiurilor cu vîrfurile în P_1, P_2, P_3 şi respectiv în P_1, P_2, T; P_1, T, P_3 şi T, P_2, P_3.

Celelalte soluţii se obţin luînd valori arbitrare pentru m_i, $i = 4, 5, \ldots, n$, cu condiţia ca ele să verifice inegalităţile

$$
\frac{\sum_{i=4}^{n} m_i D_i^j}{D} < \frac{D_t^j}{D}, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{12}
$$

Aceasta înseamnă că se pot dinainte fixa, în anumite puncte (în cel mult $n - 3$), anumite cantităţi de mase, supuse condiţiei (11), fără ca centrul de greutate să se schimbe, el rămînînd situat tot în punctul Cebîşev al sistemului considerat.

5. Schema operatorială a programului algoritmului de rezolvare a problemei puse mai sus este formată din două blocuri, pe care le notăm cu **A** şi **B**. Blocul **A** ne va da coordonatele punctului Cebîşev iar blocul **B** va calcula determinanţii de ordinul 3 care intervin în rezolvarea sistemului (10).

Blocul **A** are următoarea schemă operatorială:

$$
\begin{aligned}
&\overset{3}{\downarrow} \mathrm{A}_1^i[(\rho_i) \to \rho + 1] p_2[(\rho) > (\rho + 1)] \overset{1}{\uparrow} [(i - 1) \to (i_0)] \mathrm{O} \overset{2}{\uparrow} \times \\
&\times \overset{1}{\downarrow} [(\rho + 1) \to \rho] \cdot [(i) \to i_0] \overset{2}{\downarrow} p_3[(i) < (n)) \overset{4}{\uparrow} \mathrm{F}_4(i) \mathrm{O} \overset{3}{\uparrow} \times \\
&\times \overset{4}{\downarrow} [(P_{i_0}) \to P_0] \mathrm{A}_5[(1) \to i] \overset{9}{\downarrow} p_6[(i) \neq (i_0)] \overset{7}{\uparrow} \mathrm{A}_7^i \times \\
&\times p_8[(\varepsilon_i) > 0)] \overset{8}{\uparrow} [(\varepsilon_i) \to \varepsilon + 1] p_9[(\varepsilon) > (\varepsilon + 1)] \overset{5}{\uparrow} [(\varepsilon + 1) \to \varepsilon] \times \\
&\times [(i) \to i_1] \mathrm{O} \overset{6}{\uparrow} \overset{5}{\downarrow} [(i - 1) \to i_1] \overset{6}{\downarrow} \overset{7}{\downarrow} \overset{8}{\uparrow} p_{10}(i < n) \overset{10}{\uparrow} \mathrm{F}(i) \times
\end{aligned}
$$

$$\times\, \mathrm{O} \overset{9}{\uparrow} \overset{10}{\downarrow} [(P_{i_1}) \to P_1]\, \mathrm{A}_{12}[(P^{(1)}) \to P]\, p(\alpha \neq \beta) \overset{25}{\uparrow} \overset{22}{\downarrow} \overset{20}{\downarrow} \times$$

$$\times\, \mathrm{A}_{13}[(1) \to i] \overset{13}{\downarrow} p_{14}(i \neq i_0) \overset{14}{\uparrow} P_{15}(i \neq i_1) \overset{15}{\uparrow} [(0) \to \varepsilon] \times$$

$$\times\, \mathrm{A}^i_{16}\, [(\varepsilon^{(1)}_i) \to \varepsilon + 1] P_{17}[(\varepsilon) > (\varepsilon + 1)] \overset{11}{\uparrow} [(\varepsilon + 1) \to \varepsilon][(i) \to i_2] \times$$

$$\times \overset{12}{\uparrow} \overset{11}{\downarrow} [(i - 1) \to i_2] \overset{12}{\downarrow} p_{10}(i < n) \overset{16}{\uparrow} \overset{15}{\downarrow} \overset{14}{\downarrow} \mathrm{F}_{19}(i)\mathrm{O} \overset{13}{\uparrow} \overset{16}{\downarrow} \times$$

$$\times\, \mathrm{A}^i_{20} p_{21}[(\varepsilon''_{i_2}) > \varepsilon'_{i_2}] \overset{23}{\uparrow} [(\varepsilon'_{i_2}) \to \varepsilon]\, \mathrm{A}_{22}[(P^{(2)}) \to P] \times$$

$$\times\, p_{23}(\mathcal{L}_{i_0 i_1}) > 0) \overset{17}{\uparrow} p_{24}(\mathcal{L}_{i_0 i_2} > 0) \overset{18}{\uparrow} p_{25}(\mathcal{L}_{i_1 i_2} > 0) \times$$

$$\times \overset{19}{\uparrow} \mathrm{O} \overset{24}{\uparrow} \overset{17}{\downarrow} \overset{18}{\downarrow} \overset{19}{\downarrow} \mathrm{A}_{26} p_{27}(d_{i_0 i_2} > d_{i_1 i_2}) \overset{21}{\uparrow} [(i_1) \to i_0] \times$$

$$\times\, [(i_2) \to i_1]\mathrm{O} \overset{20}{\uparrow} \overset{21}{\downarrow} [(i_2) \to i_1]\mathrm{O} \overset{22}{\uparrow} \overset{23}{\downarrow} [(\varepsilon''_{i_2}) \to \varepsilon] \times$$

$$\times\, \mathrm{A}_{27}[P^{(2)} \to P] \overset{25}{\downarrow} \overset{24}{\downarrow} \mathrm{T}[(P), (i_0), (i_1), (i_2)] \overset{\mathrm{B}}{\uparrow},$$

unde A^i_j sînt operatori aritmetici care se execută după formulele date în descrierea algoritmului în felul următor.

A^i_1 calculează distanţele ρ_i după formula (2'); ρ şi $\rho + 1$ sînt două celule fixe folosite pentru a putea alege maximul distanţelor ρ_i.

A_5 execută calculul coordonatelor ξ_1 şi η_1 după formulele (3).

A^i_7 execută calculul mărimilor ε^0_i după formula (4). ε şi $\varepsilon + 1$ sînt două celule fixe folosite pentru a determina minimul mărimilor $\varepsilon^0_i > 0$.

A_{12} calculează coordonatele punctului $\mathrm{P}^{(1)}$ după formula (4'). Cu α şi β am notat primul respectiv al doilea termen al egalităţii (5), necesar pentru descrierea condiţiei logice $p(\alpha \neq \beta)$.

A_{13} calculează coordonatele punctului $\vec{Q}_3(\xi_2, \eta_2)$ după formula (6).

A^i_{16} calculează mărimile ε'_i după formula (6').

A^i_{20} calculează mărimile ε''_i după formula (7).

A_{22} calculează coordonatele punctului $P^{(2)}$ după formula (7').

A_{26} calculează distanţele $d_{i_0 i_2}, d_{i_1 i_2}$ după formulele (9). Operatorul A_{27} realizează acelaşi calcul ca şi operatorul A_{22}.

Prin $\mathrm{F}(i)$ am notat operatorii de formare a indicelui i, adică operatorii de mărire a indicelui i cu o unitate.

Se vor tipări coordonatele punctului T precum şi indicii i_0, i_1, i_2.

Blocul **A** predă conducerea calculului blocului **B** care are următoarea schemă operatorială:

$$\mathrm{A}_1[(D) \to R] \overset{1}{\downarrow} [(1) \to i]\mathrm{A}^i_2[(D^1_i) \to R^1_i]\, p_3[(i) < n) \overset{2}{\uparrow} \times$$

$$\times\, \mathrm{F}(i)\mathrm{O} \overset{1}{\uparrow} \overset{2}{\downarrow} \overset{3}{\downarrow} \mathrm{A}^i_5((D^2_i) \to R^2_i]\, p_6[(i) < n) \overset{4}{\uparrow} \mathrm{F}_7(i)\mathrm{O} \overset{3}{\uparrow} \overset{4}{\downarrow} \overset{5}{\downarrow} \times$$

$$\times\, \mathrm{A}^i_8[(D^3_i) \to R^3_i]\, p((i) < n) \overset{6}{\uparrow} \mathrm{F}_9(i)\mathrm{O} \overset{5}{\uparrow} \overset{6}{\downarrow} \mathrm{A}^i_{10}\, [(D^1_i) \to K_1] \times$$

$$\times\, [(D^2_i) \to K_2][(D^3_i) \to K_3]\mathrm{T}[(R), (R^1_i), (R^2_i), (R^3_i), (K_1), (K_2), (K_3)] \text{ stop.}$$

Operatorul A_1 calculează determinantul D.

Operatorii A^i_2, A^i_5 şi A^i_8 calculează respectiv determinanţii D^1_i, D^2_i, D^3_i.

Operatorul A^i_{10} calculează determinanţii D^1_i, D^2_i, D^3_i.

Am notat prin R, R^1_i, R^2_i, R^3_i, K_1, K_2, K_3 şirul de celule în care se păstrează, pentru tipărire rezultatele operaţiilor descrise mai sus.

6. Dăm acum un exemplu, considerînd sistemul format din patru puncte $P_1(2,2)$, $P_2(-1,0)$, $P_3(-1,1)$, $P_4(1, -1)$. Luăm $P^{(0)}\,(0,0)$.

Avem

$$\rho(P^{(0)}, P_1) = 2\sqrt{2},\quad \rho(P^{(0)}, P_2) = 1,\quad \rho(P^{(0)}, P_3) = \sqrt{2},\quad \rho(P^{(0)}, P_4) = \sqrt{2}$$

şi deci $\rho_1 = \rho(P^{(0)}, P_1) > \rho_i,\ i \neq 1$.

Versorul $\vec{Q}_1(\xi_1, \eta_1)$ are componentele $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Calculînd valorile lui $\varepsilon^{(0)}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, găsim

$$\varepsilon^{(0)}_2 = \frac{7\sqrt{2}}{10},\quad \varepsilon^{(0)}_3 = \frac{3\sqrt{2}}{4},\quad \varepsilon^{(0)}_4 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

şi deci $\varepsilon^{(0)}_2 = \min\, (\varepsilon^{(2)}_k)$. Prima aproximaţie este $P^{(1)}\,(x^{(1)}, y^{(1)}) = P^{(1)}\left(\frac{7}{10}, \frac{7}{10}\right)$.

Avem de asemenea

$$x_{12} = \frac{1}{2},\ y_{12} = 1,\ \rho(P^{(1)}, P_1) = \frac{13\sqrt{2}}{10},\ \rho(P^{(1)}, P_2) = \frac{\sqrt{338}}{10},\ \rho(P^{(1)}, P_3) = \frac{\sqrt{298}}{10},$$

$$\rho(P^{(1)}, P_4) = \frac{\sqrt{298}}{10},\quad \xi_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}},\quad \eta_2 = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

şi deci

$$\vec{Q}_2\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right),$$

iar

$$\varepsilon^{(1)}_3 = -\frac{\sqrt{13}}{15},\quad \varepsilon^{(1)}_4 = \frac{\sqrt{13}}{35}.$$

Singura valoare pozitivă a lui $\varepsilon^{(1)}_k$ fiind $\varepsilon^{(1)}_4 = \frac{\sqrt{13}}{35}$, avem a doua aproximaţie

$$P^{(2)}\,(x^{(2)}, y^{(2)}) = P^{(2)}\left(\frac{9}{14}, \frac{11}{14}\right).$$

Se verifică uşor că $P^{(2)} = T$ deoarece condiţiile (8) sînt îndeplinite. Trecînd la rezolvarea sistemului ce determină masele, avem

$$D = 7,\ D_t^1 = \frac{20}{7},\ D_t^2 = \frac{13}{14},\ D_t^3 = \frac{45}{14},$$

$$D_4^1 = 8,\ D_4^2 = -2,\ D_4^3 = 2$$

şi

$$m_1 = \frac{20}{49} - \frac{56}{49} m_4 = \frac{20}{49} - \frac{8}{7} m_4,$$

$$m_2 = \frac{13}{98} + \frac{28}{98} m_4 = \frac{13}{98} + \frac{2}{7} m_4,$$

$$m_3 = \frac{45}{98} - \frac{28}{98} m_4 = \frac{45}{98} - \frac{2}{7} m_4.$$

Prima soluţie este dată de $m_4 = 0$, adică

$$m_1 = \frac{20}{49},\ m_2 = \frac{13}{98},\ m_3 = \frac{45}{98},$$

iar restul soluţiilor se obţine dînd orice valoare lui m_4 din intervalul $0 \leqslant m_4 \leqslant 5/4$.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ

РЕЗЮМЕ

Назовем характеристикой системы n материальных точек $P_1, P_2, \ldots P_n$ на плоскости наибольшее расстояние от точки P системы до центра тяжести системы.

Ставится задача о нахождении распределения масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, расположенных в этих точках, так, чтобы характеристика была минимальной. Эта задача сводится к нахождению точки (точки Чебышева), наименее отклоняющейся от точек системы, т. е. точки $T(x_t, y_t)$, обладающей свойством (1).

В работе дается операторная логическая схема, осуществляющая на электронной вычислительной машине алгоритм С. И. Зуховицкого [1], с помощью которого можно определить координаты точки Чебышева. После определения этой точки дается алгоритм для решения системы (11), определяющей все распределения, которые дают минимальную характеристику.

В конце работы приводится пример.

RÉSOLUTION, AVEC UNE MACHINE À CALCULER ÉLECTRONIQUE, DU PROBLÈME DE L'OUVERTURE OPTIMUM D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

RÉSUMÉ

Les auteurs ont dénommé ouverture du système de n points matériels $P_1, P_2, \ldots, P_n$ d'un plan, la plus grande distance d'un point P_i du système à son centre de gravité.

Le problème consiste en la recherche d'une distribution des masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$, située en ces points, et telle que la distribution soit minimum. Ce problème se ramène à la découverte d'un point s'écartant le moins des points du système (du point de Tchébyschev), c'est-à-dire d'un point $T(x_t, y_t)$ jouissant de la propriété (1) du texte.

Le travail contient aussi le schéma logique opérationnel qui réalise à la machine à calculer électronique un algorithme de S. I. Zukhovitski [1], grâce auquel on peut déterminer les coordonnées du point de Tchébyschev. Pour déterminer ce point, on algorithmise aussi la résolution du système (11), qui détermine toutes les distributions qui donnent l'ouverture minimum.

A la fin, il y a un exemple.

BIBLIOGRAFIE

1. Зуховицкуй С. І., *Алгорифм для відшукання точки, що найменше відхиляэтся (в разумiнi П. Л. Чебишева) від даної системи m точек.* ДАНУРСР, 6, 404—407 (1951).
2. Зуховицкий С. И., *О наилучшем в смысле П. Л. Чебышева приближении конечной системы несовместных линейных уравнений.* Мат. сборник, 33(75), 2, 327—342 (1953).

Primit la 30. XII. 1961.