ASUPRA PROBLEMEI POLILOCALE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI (I)

DE

OLEG ARAMĂ și DUMITRU RIPIANU

Comunicare prezentată în ședința din 24 septembrie 1956 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

CAPITOLUL I

Introducere

§ 1. Se cunoasc numeroase lucrări în care se arată că dacă funcţia $\varphi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, care intervine în membrul drept al unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

satisface anumite condiţii Lipschitz relativ la variabilele $y,y',\ldots,y^{(n-1)}$ cînd x variază într-o vecinătate a unui punct x_0 de forma $[x_0, x_0+\varepsilon)$, atunci există o subvecinătate $[x_0, x_0+\varepsilon_1)$ în care mulţimea integralelor ecuaţiei diferenţiale respective este interpolatoare de ordinul n. Prin aceasta se înţelege că oricare ar fi nodurile distincte $a_1, a_2,\ldots,a_n$, situate toate în intervalul $[x_0, x_0+\varepsilon_1)$ și oricare ar fi numerele reale $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ecuaţia diferenţială respectivă admite o integrală $y(x)$, care pentru valorile $a_1, a_2,\ldots,a_n$, date variabilei independente, ia respectiv valorile $b_1, b_2,\ldots, b_n$. Geometricește, aceasta înseamnă că ecuaţia diferenţială respectivă admite o curbă integrală care trece prin punctele $P_1(a_1, b_1), P_2(a_2, b_2),\ldots P_n(a_n,b_n)$.

Să notăm cu $L(x_0;\varphi)$ lungimea celui mai mare interval deschis de forma $[x_0, x_0+\varepsilon_1)$ în care mulţimea integralelor ecuaţiei respective este interpolatoare de ordinul n. Rezultatele existente asupra problemei n-locale pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul n, cunoscute de autorii acestui articol, dau în general delimitări inferioare pentru $L(x_0;\varphi)$, delimitări care se obţin în anumite ipoteze restrictive asupra funcţiei φ. In cazul particular al ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, M. Biernacki în [1] a stabilit condiţii (referitoare la rădăcinile polinomului caracteristic) în care integrala generală este interpolatoare de un anumit *ordin* k, pe toată axa Ox, și de asemenea condiţii în care integrala generală nu este interpolatoare de un anumit ordin pe toată axa Ox. In prezenta lucrare autorii se ocupă de asemenea cu problema polilocală în cazul ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți, căutînd să determine efectiv expresia numărului L, în funcție de coeficienții ecuației.

§ 2. Să considerăm o ecuație diferențială de ordinul n, liniară cu coeficienți constanți reali. Fie $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ un sistem fundamental de integrale. Pentru a simplifica expunerea ce urmează, vom presupune întotdeauna că sistemul fundamental este scris sub o formă reală. Integrala generală a ecuației diferențiale considerate va fi în acest caz $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x)$. Pentru a determina numărul L în cazul unei astfel de ecuații diferențiale, va trebui determinată lungimea intervalului maxim cu extremitatea stîngă într-un punct dat x_0, astfel ca sistemul algebric de ecuații liniare în necunoscutele C_i :

$$\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(a_j) = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

să fie compatibil, oricare ar fi nodurile distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, situate în acest interval și oricare ar fi numerele reale $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Lungimea acestui interval ne va da numărul $L(x_0; \varphi)$ corespunzător[1]). Problema determinării numărului L revine deci la găsirea celui mai mare interval cu extremitatea stîngă în x_0, astfel ca determinantul

$$| f_i \ (a_j) |_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,n}} = \mathrm{D} \begin{Bmatrix} f_1(x), & f_2(x), \ldots, & f_n(x) \\ a_1, & a_2, \ \ldots, & a_n \end{Bmatrix} \tag{1.0}$$

să fie diferit de zero, oricare ar fi nodurile distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ situate în acel interval.

Observăm de la început că în cazul ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, determinantul $D\begin{Bmatrix} f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \\ a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n \end{Bmatrix}$ rămîne neschimbat în semn, dacă asupra tuturor nodurilor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se efectuează o translație $\xi = x + \lambda$ (λ fiind real), adică dacă în loc de nodurile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se iau respectiv nodurile $a_1 + \lambda, a_2 + \lambda, \ldots, a_n + \lambda$[2]). De aici rezultă că numărul L, care reprezintă lungimea intervalului maxim în care integrala generală este interpolatoare de ordinul n, nu depinde de poziția extremității x_0 a acestui interval, ci numai de natura operatorului diferențial liniar din membrul stîng al ecuației diferențiale respective. Acest operator diferențial poate fi caracterizat de exemplu prin rădăcinile $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ale polinomului caracteristic ce i se asociază. Intrucît numărul L nu depinde în cazul ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți de poziția punctului x_0, ci numai de rădăcinile $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ale polinomului caracteristic, îl vom nota cu $L\ (r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

In prima parte a acestei lucrări se va demonstra proprietatea că — fiind dată o ecuație diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți constanți reali, al cărei polinom caracteristic admite rădăcini distincte, dintre

[1]) Se poate demonstra că acest număr L nu depinde de alegerea sistemului fundamental.
[2]) Această observare este valabilă și în cazul cînd polinomul caracteristic are rădăcini multiple.

care cel puțin una reală — atunci numărul L corespunzător acestei ecuații diferențiale este delimitat inferior de numărul L corespunzător unei anumite ecuații diferențiale cu coeficienți constanți de ordin mai mic. Se va trece apoi la cazurile particulare pe care le prezintă ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți de ordinul al treilea și al patrulea, studiindu-se în ambele cazuri numărul L corespunzător.

TEOREMĂ: *Dacă polinomul caracteristic asociat unei ecuații diferențiale liniare de ordinul n, cu coeficienți constanți reali are rădăcinile* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, *distincte, dintre care cel puțin una reală,* ρ_1, *atunci are loc inegalitatea*

$$L\ (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n) \geqq L\ (\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n).$$

Pentru a demonstra această teoremă, vom stabili în prealabil următoarea

Lemă: *Fie* $f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ *un sistem de* $n-1$ *funcții, admițînd derivate de ordinul întîi, continue în* (α, β). *Dacă mulțimea combinațiilor liniare ale funcțiilor* $f'_1(x), \ldots, f'_{n-1}(x)$ *formează un sistem interpolator de ordinul* $n-1$ *în intervalul* (α, β), *atunci mulțimea combinațiilor liniare ale funcțiilor* $f_0(x) = 1, f_1(x), \ldots f_{n-1}(x)$ *formează un sistem interpolator de ordinul n în intervalul* $[\alpha, \beta]$.

Demonstrație. Întrucît prin ipoteză mulțimea combinațiilor liniare ale funcțiilor $f'_1, f'_2, \ldots, f'_{n-1}$, formează un sistem interpolator de ordinul $n-1$, în (α, β), rezultă că oricare ar fi nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, satisfăcînd condiția

$$\alpha < x_1 < x_2 < \ldots . < x_{n-1} < \beta \tag{1.1}$$

determinantul

$$D\begin{Bmatrix} f'_1, & f'_2, & f'_3, & \ldots, & f'_{n-1} \\ x_1, & x_2, & x_3, & \ldots & x_{n-1} \end{Bmatrix} = f'_i(x_j)\,\Big|_{\substack{i=1,2,\ldots,n-1 \\ j=1,2,\ldots,n-1}} \tag{1.2}$$

este diferit de zero. Mai mult chiar, afirmăm că acest determinant păstrează un semn constant, oricare ar fi pozițiile nodurilor $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, satisfăcînd condițiile (1.1). Într-adevăr, dacă s-ar presupune prin absurd că ar exista două sisteme de noduri $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ și $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, satisfăcînd fiecare condițiile (1.1) și astfel încît să aibă loc inegalitățile

$$D\begin{Bmatrix} f'_1, & f'_2, & \ldots, & f'_{n-1} \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1} \end{Bmatrix} > 0 \quad \text{și} \quad D\begin{Bmatrix} f'_1, & f'_2, & \ldots, & f'_{n-1} \\ \xi_1, & \xi_2, & \ldots, & \xi_{n-1} \end{Bmatrix} < 0$$

atunci deplasînd nodurile $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, prin continuitate, astfel ca nodul ξ_i să coincidă cu x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ și astfel ca în tot timpul deplasării nodurile $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ să satisfacă condiția (1.1), atunci determinantul $D\begin{Bmatrix} f'_1, f'_2, \ldots, f'_{n-1} \\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1} \end{Bmatrix}$ va varia în mod continuu și va tinde către valoarea pe care o are determinantul $D\begin{Bmatrix} f'_1, f'_2, \ldots, f'_{n-1} \\ x_1, x_2, \ldots \ x_{n-1} \end{Bmatrix}$. Întrucît acest proces de variație a nodurilor ξ_i poate fi conceput ca petrecîndu-se într-un interval închis strict interior intervalului (α, β), rezultă în virtutea continuității că va exista un sistem de noduri $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_{n-1}^*$, satisfăcînd condițiile (1.1) și pentru care determinantul (1.2) se anulează. Aceasta ar contrazice însă ipoteza că funcțiile $f_1', f_2', \ldots, f_{n-1}'$ formează un sistem interpolator de ordinul $n-1$, în (α, β). Rezultă deci că oricare ar fi nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, satisfăcînd condițiile (1.1), determinantul (1.2) păstrează un semn constant.

Să considerăm acum un sistem arbitrar de n noduri $a_1, a_2, \ldots, a_n$, satisfăcînd condițiile

$$\alpha \leqq a_1 < a_2 < \ldots . < a_n \leqq \beta \tag{1.3}$$

Pentru a demonstra lema enunțată, va trebuie să arătăm că determinantul

$$D\begin{Bmatrix} 1, & f_1, & f_2, & \ldots\ldots, & f_{n-1} \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots\ldots, & a_n \end{Bmatrix}$$

nu se anulează.

Pentru aceasta observăm că are loc următoarea egalitate folosită de prof. T. Popoviciu [2]:

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_2}^{a_3}\cdots\int_{a_{n-1}}^{a_n} D\begin{Bmatrix} f_1', & f_2' & \ldots, & f_{n-1}' \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1} \end{Bmatrix} dx_1 . dx_2 \ldots dx_{n-1} = \tag{1.5}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(a_2) - f_1(a_1) & \ldots\ldots & f_{n-1}(a_2) - f_{n-1}(a_1) \\ f_1(a_3) - f_1(a_2) & \ldots\ldots & f_{n-1}(a_3) - f_{n-1}(a_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ f_1(a_n) - f_1(a_{n-1}) & \ldots & f_{n-1}(a_n) - f_{n-1}(a_{n-1}) \end{vmatrix} = D\begin{Bmatrix} 1, & f_1, & f_2, & \ldots, & f_{n-1} \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n \end{Bmatrix}.$$

Dar întrucît determinantul ce figurează sub semnul integralei multiple din (1.5) nu se anulează și păstrează un semn constant, oricare ar fi valorile pe care le iau variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, respectiv în intervalele de integrare $(a_1, a_2), (a_2, a_3) \ldots (a_{n-1}, a_n)$, rezultă că integrala (1.5) va avea ca valoare un număr nenul. Deci determinantul (1.4) este diferit de zero, oricare ar fi nodurile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfăcînd condițiile (1.3).

Să trecem acum la demonstrarea teoremei enunțate. Să considerăm o ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul n, $E_n(y) = 0$, avînd coeficienții constanți și reali.

Să notăm cu $r_1, r_2, \ldots, r_p$ rădăcinile reale și cu $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_q + i\beta_q, \alpha_q - i\beta_q$, $(p + 2q = n)$, rădăcinile complexe ale polinomului caracteristic asociat. Vom presupune că $p \geqq 1$, adică polinomul caracteristic admite cel puțin o rădăcină reală. Un sistem fundamental de integrale pentru ecuația $E_n(y) = 0$, va fi:

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_p x}, e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \ldots, e^{\alpha_q x}\cos\beta_q x, e^{\alpha_q x}\sin\beta_q x.$$

Dacă în acest sistem suprimăm prima integrală, adică $e^{r_1 x}$, atunci funcțiile rămase pot fi considerate ca formînd un sistem fundamental pentru o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți reali de ordinul $n-1$, al cărei polinom caracteristic are ca rădăcini numerele

$r_2, \ldots, r_n, \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_q + i\beta_q, \alpha_q - i\beta_q$. Să notăm această ecuație cu $E_{n-1}(y) = 0$. Fie $L_{n-1} = L(r_2, \ldots, r_p, \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_2 + i\beta_q, \alpha_q - i\beta_q)$ lungimea intervalului maxim în care integrala generală a ecuației diferențiale $E_{n-1}(y) = 0$ este interpolatoare de ordinul $n-1$. Atunci oricare ar fi nodurile $x_2, x_3, \ldots, x_n$, satisfăcînd condițiile

$$x_2 < x_3 < \ldots . < x_n \tag{1.6}$$

$$x_n - x_2 < L_{n-1} \tag{1.7}$$

determinantul

$$D\begin{Bmatrix} e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_p x}, e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \ldots, e^{\alpha_q x}\cos\beta_q x, e^{\alpha_q x}\sin\beta_q x \\ x_2, \ldots, x_p, \quad x_{p+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

va fi diferit de zero. Dar deoarece s-a presupus că rădăcina r_1 este reală rezultă că și determinantul

$$D\begin{Bmatrix} e^{(r_2 - r_1)x}, \ldots, e^{(r_p - r_1)x}, e^{(\alpha_1 - r_1)x}\cos\beta_1 x, e^{(\alpha_1 - r_1)x}\sin\beta_1 x, \ldots, e^{(\alpha_q - r_1)x}\cos\beta_q x, e^{(\alpha_q - r_1)x}\sin\beta_q x \\ x_2, \ldots\ldots, x_p, \quad x_{p+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

este diferit de zero, întrucît este egal cu determinantul (1.8), înmulțit cu factorul pozitiv $e^{-r_1(x_2 + x_3 + \ldots + x_n)}$. Din faptul că determinantul (1.9) nu se anulează, rezultă îndată că va fi diferit de zero și determinantul ce se obține din (1.9), luînd însă în locul funcțiilor ce sînt scrise în rîndul de sus, derivatele lor, adică determinantul:

$$D\begin{Bmatrix} (r_2 - r_1)e^{(r_2 - r_1)x}, \ldots, (r_p - r_1)e^{(r_p - r_1)x}, e^{(\alpha_1 - r_1)}[(\alpha_1 - r_1)\cos\beta_1 x - \beta_1\sin\beta_1 x], \; e^{(\alpha_1 - r_1)x}[(\alpha_1 - r_1)\sin\beta_1 x + \beta_1\cos\beta_1 x], \ldots \\ x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_p, \quad x_{p+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{Bmatrix}. \tag{1.10}$$

Într-adevăr, se observă că determinantul (1.10) se obține din determinantul (1.9), prin înmulțirea acestuia cu factorul $(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \ldots \ldots (r_p - r_1)[(\alpha_1 - r_1)^2 + \beta_1^2][(\alpha_2 - r_1)^2 + \beta_2^2] \ldots\ldots [(\alpha_q - r_1)^2 + \beta_q^2]$, care este diferit de zero întrucît rădăcinile polinomului caracteristic al ecuației $E_n(y) = 0$ au fost presupuse destincte. În definitiv, din faptul că determinantul (1.10) nu se anulează oricare ar fi nodurile $x_2, \ldots, x_n$, satisfăcînd condițiilor (1.6) și (1.7), rezultă că sistemul de funcții

$$\begin{gathered} (r_2 - r_1)e^{(r_2 - r_1)}, \ldots, (r_p - r_1)e^{(r_p - r_1)x}, e^{(\alpha_1 - r_1)x}[(\alpha_1 - r_1)\cos\beta_1 x - \beta_1\sin\beta_1 x], \\ e^{(\alpha_1 - r_1)x}[(\alpha_1 - r_1)\sin\beta_1 x + \beta_1\cos\beta_1 x], \ldots, e^{(\alpha_q - r_1)x}[(\alpha_q - r_1)\cos\beta_q x - \beta_q\sin\beta_q x], \\ e^{(\alpha_q - r_1)x}[(\alpha_q - r_1)\sin\beta_q x + \beta_q\cos\beta_q x]. \end{gathered} \tag{1.11}$$

este interpolator de ordinul $n-1$ în orice înterval (deschis în ambele extremități), de lungime egală cu L_{n-1}.

Conform lemei stabilite anterior, rezultă că sistemul de funcții format din constanta 1 și din primitivele funcțiilor din (1.11). este interpolator de ordin n în orice interval de lungime L_{n-1}, considerat împreună cu extremitățile sale. Deci, oricare ar fi nodurile $x_1, x_2, \dots, x_n$, satisfăcînd condițiilor

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n \tag{1.12}$$

$$x_n - x_1 \leqq L_{n-1} \tag{1.13}$$

determinantul

$$D\left\{\begin{matrix} 1, & e^{(r_2-r_1)x}, \dots, & e^{(r_p-r_1)x}, & e^{(\alpha_1-r_1)x}\cos\beta_1 x, \; e^{(\alpha_1-r_1)}\sin\beta_1 x, \dots\dots \\ x_1, & x_2, \dots\dots, & x_p, & x_{p+1}, \dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \dots, e^{(\alpha_q-r_1)x}\cos\beta_q x, \; e^{(\alpha_q-r_1)x}\sin\beta_q x \\ \dots, x_n \end{matrix}\right\} \tag{1.14}$$

este diferit de zero.

Rezultă că este diferit de zero și determinantul

$$D\left\{\begin{matrix} e^{r_1x}, & e^{r_2x}, & \dots, & e^{r_px}, & e^{\alpha_1x}\cos\beta_1 x, \; e^{\alpha_1x}\sin\beta_1 x, \dots\dots \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_p, & x_{p+1}, \dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \dots, e^{\alpha_qx}\cos\beta_q x, \; e^{\alpha_qx}\sin\beta_q x \\ \dots\dots\dots\dots, x_n \end{matrix}\right\}$$

care se obține din determinantul (1.14) prin înmulțire cu factorul $e^{r_1(x_1+x_2+\dots+x_n)}$, care este evident diferit de zero.

Astfel teorema este demonstrată.

Observație. Teorema stabilită se extinde și la cazul cînd polinomul caracteristic are rădăcini multiple.

Aplicații. În cazul unei ecuații diferențiale liniare de ordinul trei cu coeficienți constanți reali, al cărei polinom caracteristic are o rădăcină reală r și două complexe ρ_1 și ρ_2, în baza teoremei de mai sus putem scrie

$$L(r, \rho_1, \rho_2) \geqq L(\rho_1, \rho_2).$$

Dacă notăm cu β partea imaginară a rădăcinii complexe ρ_1, atunci, precum se poate ușor constata, $L(\rho_1, \rho_2) = \dfrac{\pi}{|\beta|}$. Deci

$$L(r, \rho_1, \rho_2) \geqq L(\rho_1, \rho_2) = \frac{\beta}{\pi}.$$

În cazul unei ecuații diferențiale liniare de ordinul 4 cu coeficienți constanți, al cărei polinom caracteristic are două rădăcini reale r_1 și r_2, precum și două complexe $\rho_1 = \alpha + i\beta$, $\rho_2 = \alpha - i\beta$, vom avea:

$$L(r_1, r_2, \rho_1, \rho_2) \geqq L(r_2, \rho_1, \rho_2) \geqq L(\rho_1, \rho_2) = \frac{\pi}{|\beta|}$$

O altă aplicație a teoremei precedente o constituie următoarea proprietate, care este inclusă de altfel într-un rezultat obținut de T. Popoviciu [2] precum și într-o observație pe care o fac G. Polya și G. Szegő în [3].

Fiind dată o ecuație diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți constanți, al cărei polinom caracteristic are numai rădăcini reale și distincte $r_1, r_2, \dots, r_n$, atunci integrala ei generală este interpolatoare de ordinul n pe toată axa Ox, adică oricare ar fi nodurile reale distincte $a_1, a_2, \dots, a$ și oricare ar fi ordonatele $b_1, b_2, \dots, b_n$, ecuația diferențială respectivă admite o curbă integrală care trece prin punctele $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$.

Într-adevăr, aplicînd rezultatele teoremei precedente, putem scrie inegalitățile

$$L(r_1, r_2, \dots, r_n) \geqq L(r_2, r_3, \dots, r_n) \geqq L(r_3, \dots, r_n) \geqq \dots \geqq L(r_{n-1}, r_n) = \infty$$

§ 3. Să considerăm o ecuație diferențială $E(y) = 0$. Să notăm cu $r_1, r_2, \dots, r_p$ rădăcinile reale ale polinomului caracteristic și cu $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \dots; \alpha_q + i\beta_q, \alpha_q - i\beta_q$ rădăcinile complexe ($p + 2q = n$). Presupunînd că toate aceste rădăcini sînt simple, atunci un sistem fundamental de integrale pentru ecuația $E(y) = 0$ va fi sistemul

$$e^{r_1x}, e^{r_2x}, \dots, e^{r_px}, e^{\alpha_1x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_1x}\sin\beta_1 x, \dots, e^{\alpha_qx}\cos\beta_q x, e^{\alpha_qx}\sin\beta_q x$$

iar determinantul (1.0) se scrie:

$$D\left\{\begin{matrix} e^{r_1x}, & e^{r_2x}, \dots, & e^{r_px}, & e^{\alpha_1x}\cos\beta_1 x, & e^{\alpha_1x}\sin\beta_1 x, \dots\dots \\ x_1, & x_2, \dots, & x_p, & x_{p+1}, & x_{p+2}, \dots\dots \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \dots, e^{\alpha_qx}\cos\beta_q x, \; e^{\alpha_qx}\sin\beta_q x \\ \dots\dots\dots\dots, x_n \end{matrix}\right\}. \tag{1.15}$$

Să facem schimbarea de variabilă independentă

$$x = \mu\xi + \nu \tag{1.16}$$

unde μ și ν sînt reali, iar $\mu \neq 0$.

Atunci ecuația $E(y) = 0$ se va transforma într-o ecuație de același tip $E^*(y) = 0$ pentru care se poate considera ca sistem fundamental de integrale, sistemul:

$$e^{r_1\mu\xi}, e^{r_2\mu\xi}, \dots, e^{r_p\mu\xi} \; e^{\alpha_1\mu\xi}, \cos\beta_1\mu\xi, e^{\alpha_1\mu\xi}\sin\beta_1\mu\xi, \dots$$

$$\dots, e^{\alpha_q\mu\xi}\cos\beta_q\mu\xi, \; e^{\alpha_q\mu\xi}\sin\beta_q\mu\xi.$$

Să notăm cu L^* lungimea intervalului maxim, în care integrala generală a ecuației $E^*(y) = 0$ este interpolatoare de ordinul n. Vrem să arătăm că între numerele L și L^* există relația $L = |\mu| L^*$.

Într-adevăr, ținînd seamă de transformarea (1.16), determinantul (1.15) se poate scrie sub forma:

$$D\left\{\begin{matrix} e^{r_1x}, \ldots, e^{r_px}, & e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \ldots\ldots \\ x_1, \ldots, x_p, & x_{x+1}, & x_{p+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} =$$

$$= D\left\{\begin{matrix} e^{r_1(\mu\xi+\nu)}, \ldots, e^{r_p(\mu\xi+\nu)}, & e^{\alpha_1(\mu\xi+\nu)}\cos\beta_1(\mu\xi+\nu), \ldots \\ \xi_1, \ldots\ldots, \xi_p, & \xi_{p+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} = \tag{1.17}$$

$$= e^{\nu[r_1+r_2+\ldots+r_p+2(\alpha_1+\ldots+\alpha_q)]}\cdot D\left\{\begin{matrix} e^{r_1\mu\xi}, \ldots, e^{r_p\mu\xi}, e^{\alpha_1\mu\xi}\cos\beta_1\mu\xi, e^{\alpha_1\mu\xi}\sin\beta_1\mu\xi, \ldots \\ \xi_1, \ldots, \xi_p, \xi_{p+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\}$$

unde

$$\xi_j = \frac{x_j - \nu}{\mu}\ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Din această egalitate rezultă că dacă x_j și ξ_j sînt legate prin relația (1.16), atunci determinantul (1.15) și determinantul

$$D\left\{\begin{matrix} e^{r_1\mu\xi}, \ldots, e^{r_p\mu\xi}, e^{\alpha_1\mu\xi}\cos\beta_1\mu\xi, e^{\alpha_1\mu\xi}\sin\beta_1\mu\xi, \ldots\ldots \\ \xi_1, \ldots\ldots, \xi_p, \quad \xi_{p+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} \tag{1.18}$$

se anulează în același timp.

Ținînd seamă de aceasta și observînd că funcțiile ce intervin în primul, respectiv în ultimul determinant al egalității (1.17), formează un sistem fundamental pentru ecuația $E(y) = 0$, respectiv $E^*(y) = 0$, rezultă că $L = |\mu| L^*$.

Din cele de mai sus sîntem conduși la următoarea regulă: pentru a determina numărul L, adică lungimea celui mai mare interval în care determinantul (1.15) nu se anulează, este suficient să se determine lungimea L^* a celui mai mare interval în care determinantul (1.18) este diferit de zero și apoi să se țină seama de egalitatea $L = |\mu| . L^*$.

Pentru a putea utiliza cu profit această regulă, se va căuta să se scrie determinantul (1.18) sub o formă cît mai comodă pentru cercetare, alegînd parametrul μ într-un mod convenabil, de ex. $\mu = \frac{1}{\beta_1}$.

Ținînd seama de arbitraritatea parametrului ν, vom putea să-l determinăm astfel ca pentru orice grup de noduri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, primul nod din grupul corespunzător $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ să fie nul. Apoi, ținînd seama de faptul că determinanții (1.15) și (1.18) se anulează simultan atunci cînd nodurile respective sînt legate între ele prin relația (1.16), rezultă că pentru determinarea numărului L^* putem presupune în determinantul (1.18) că are loc întotdeauna egalitatea $\xi_1 = 0$.

Cu aceste observații determinantul (1.18) poate fi considerat sub forma

$$D\left\{\begin{matrix} e^{\frac{r_1}{\beta_1}\xi}, e^{\frac{r_2}{\beta_1}\xi}, \ldots, e^{\frac{r_p}{\beta_1}\xi}, e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\cos\xi, e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\xi}\sin\xi, \ldots, e^{\frac{\alpha_q}{\beta_1}}\cos\frac{\beta_q}{\beta_1}\xi, e^{\frac{\alpha_q}{\beta_1}}\sin\frac{\beta_q}{\beta_1}\xi \\ 0, \xi_2, \ldots, \xi_p, \xi_{p+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_n \end{matrix}\right\}. \tag{1.19}$$

Întrucît ne interesează anularea sau neanularea acestui determinant, vom putea împărți fiecare funcție ce intervine în prima linie cu o altă funcție ce nu se anulează în $(-\infty, +\infty)$, de exemplu cu $e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\xi}$ [3].

Atunci determinantul se scrie

$$D\left\{\begin{matrix} e^{\frac{r_1-\alpha_1}{\beta_1}\xi}, \ldots, e^{\frac{\alpha_p-\alpha_1}{\beta_1}\xi}, \cos\xi, \sin\xi, \ldots, e^{\frac{\alpha_q-\alpha_1}{\beta_1}\xi}\cos\frac{\beta_q}{\beta_1}\xi, e^{\frac{\alpha_q-\alpha_1}{\beta_1}\xi}\sin\frac{\beta_q}{\beta_1}\xi \\ 0, \ldots\ldots, \xi_p, \quad \xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_n \end{matrix}\right\} \tag{1.20}$$

Numărul L^* va fi dat de lungimea celui mai mare interval, avînd extremitatea stîngă egală cu zero, pentru care determinantul (1.20) nu se anulează, oricare ar fi nodurile distincte $0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ din acel interval (deschis).

Pentru a obține numărul L, se ține seamă de relația $L = \frac{1}{|\beta_1|}L^*$.

CAPITOLUL II

Determinarea numărului L în cazul ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, de ordinul 3

§ 1. Să considerăm o ecuație diferențială de ordinul 3, $E(y) = 0$, al cărei polinom caracteristic admite trei rădăcini distincte.

Dacă toate aceste rădăcini sînt reale, atunci dintr-o observație anterioară (cap. I, § 2) rezultă că $L = \infty$. Astfel, rămîne de studiat numai cazul cînd polinomul caracteristic admite o rădăcină reală r și două complexe $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. Se va presupune că rădăcinile complexe ale polinomului caracteristic sînt numerele $\pm i$, ceea ce se poate întotdeauna realiza cu ajutorul unor schimbări simple de variabile, după cum s-a arătat în cap. I, § 3. Problema trilocală pentru ecuația $E(y) = 0$ revine la găsirea unui număr pozitiv L, astfel ca determinantul

$$D\left\{\begin{matrix} e^{rx}, & \cos x, & \sin x \\ a, & b, & c \end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} e^{ra} & \cos a & \sin a \\ e^{rb} & \cos b & \sin b \\ e^{rc} & \cos c & \sin c \end{vmatrix}$$

să fie diferit de zero, oricare ar fi nodurile $a < b < c$, satisfăcînd condiția $c - a < L$.

În baza unei observări făcute în cap. I, § 3, se poate lua $a = 0$ și se poate presupune $r \geqq 0$. Determinantul precedent se scrie

$$D = f_c(b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{rb} & \cos b & \sin b \\ e^{rc} & \cos c & \sin c \end{vmatrix}; \quad (0 \leqq r\,;\, 0 \leqq b \leqq c) \tag{2.1}$$

---

[3]) Aceasta revine a efectua în ecuația diferențială schimbarea de funcție $z = \frac{y}{e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\xi}}$

Problema trilocală pentru ecuația diferențială considerată revine deci la aflarea marginei inferioare a numerelor $c > 0$, care se bucură de proprietatea că pentru fiecare din ele există cîte un număr b, $0 < b < c$, astfel încît determinantul (2.1) să fie nul. Să notăm cu C mulțimea tuturor numerelor c ce satisfac proprietatea enunțată mai sus. Această mulțime $\mathcal{C}$ este mărginită inferior de numărul 0, deci admite o margine inferioară. În baza teoremei de existență a lui de la Vallée Poussin [4], această margine inferioară va fi un număr pozitiv. Ea va reprezenta evident numărul L, corespunzător ecuației diferențiale considerate

$$L = \inf_{c \in C} \{c\}. \tag{2.2}$$

Pentru aflarea acestei margini inferioare, interpretăm determinantul (2.1) ca o funcție de o variabilă independentă b, depinzînd de parametrul c, și pe care o vom nota $f_c(b)$. Într-un sistem cartezian ortogonal de coordonate, în care abscisa se notează cu b, iar ordonata cu D, relația $D = f_c(b)$ reprezintă o familie de curbe depinzînd de parametrul c. Observăm de la început că această familie depinde continuu de parametrul c. Are loc:

Lema 1. *Curba de ecuație $D = f_L(b)$, ce corespunde valorii $c = L$ în intervalul $(0, L)$, este situată deasupra axei Ob*[4] *și este tangentă acestei axe în cel puțin un punct b^*, situat în intervalul* $[0, L]$ (fig. 1).

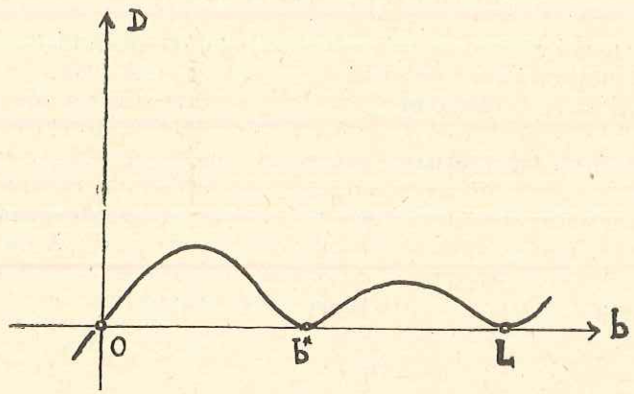

Fig. 1

Demonstrație. Observăm de la început că dacă $r = 0$, atunci

$$f(b) = 4 \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2} \sin\frac{c-b}{2}$$

și deci $L = 2\pi$. Atunci $f_L(b) \equiv 0$ și în acest caz lema se verifică banal. Rămîne de cercetat deci numai cazul $r > 0$ (întrucît s-a presupus inițial că $r \geqq 0$).

Observăm că:

$$\lim_{b\to 0} f_c(b) = \lim_{b \to c} f_c(b) = 0 \tag{2.3}$$

[4]) Nu în sens strict.

oricare ar fi valoarea aleasă pentru c. Apoi

$$\frac{d}{db} f_c(b) = -\cos(c-b) - re^{rb} \sin c + e^{rc} \cos b \tag{2.4}$$

și pentru $b \to 0$, avem:

$$\lim_{b\to 0} \frac{d}{db} f_c(b) = -\cos c - r \sin c + e^{rc}. \tag{2.5}$$

În baza teoremei stabilite în cap. I, rezultă că în cazul de față $\pi \leqq L$. Se constată ușor că L nu poate depăși numărul 2π, întrucît în caz afirmativ, alegînd $c = 2\pi$, determinantul $D = f_c(b)$ devine $f_{2\pi}(b) = (e^{2\pi r} - 1) \sin b$ și acesta se anulează pentru $b = \pi$, ceea ce ar contrazice definiția numărului L. Deci

$$\pi \leqq L \leqq 2\pi. \tag{2.6}$$

Ținînd seama de acest rezultat și de faptul că r a fost presupus nenegativ, rezultă din (2.5), înlocuind $c = L$, inegalitatea strictă

$$\lim_{b\to 0} \frac{d}{db} f_L(b) > 0. \tag{2.7}$$

Din (2.3) și (2.7) rezultă că la dreapta originii și într-o vecinătate suficient de mică a acesteia, curba de ecuație $D = f_L(b)$ se situează strict deasupra axei Ob. Vom arăta acum că în intervalul $(0, L)$ curba de ecuație $D = f_L(b)$ nu poate avea puncte situate strict dedesubtul axei ob, adică

$$f_L(b) > 0 \text{ cînd } b \in (0, L). \tag{2.8}$$

Intr-adevăr, să presupunem contrariul (fig. 2). Fie $b_1 \in (0, L)$ una din absci-

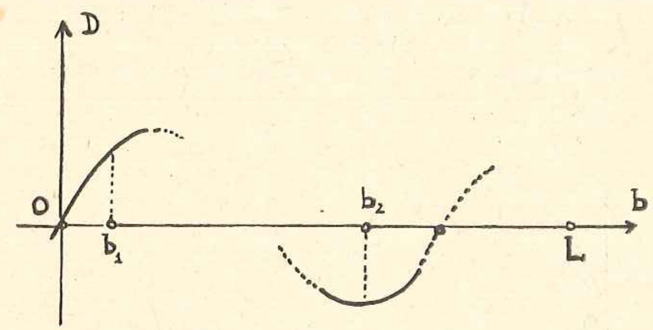

Fig. 2

sele pentru care funcția $f_L(b)$ ia o valoare pozitivă, iar $b_2 \in (0, L)$ una din abscisele pentru care $f_L(b)$ ia o valoare negativă.

$$f_L(b_1) > 0;\ f_L(b_2) < 0. \tag{2.9}$$

Putem lua b_1 și b_2 astfel încît

$$0 < b_1 < b_2 < L. \tag{2.10}$$

Să considerăm acum funcția $f_c(b)$ de două variabile independente b și c, definită de formula (2.1). Această funcție este continuă în raport cu ansamblul variabilelor b și c, în tot planul variabilelor b și c. De aici rezultă că porțiunea de curbă (Γ_c), de ecuație $D=f_c(b)$, corespunzătoare unui interval finit, închis, $\beta_1 \leqq b \leqq \beta_2$, este un arc continuu pentru orice valoare a parametrului c și se deformează continuu atunci cînd parametrul c variază continuu. Mai mult, dacă parametrul c variază într-un interval finit închis, $r_1 \leqq c \leqq r_2$, atunci deformarea curbei variabile (Γ_c) este uniform continuă. Aceasta înseamnă că fiind dat $\varepsilon<0$ arbitrar, acestuia îi corespunde un număr $\eta(\varepsilon)<0$ astfel încît oricare ar fi două valori c_1 și c_2 ale parametrului c, luate din intervalul $[\gamma_1, \gamma_2]$, satisfăcînd inegalitate $|c_2-c_1|<\eta(\varepsilon)$, distanța dintre cele două curbe corespunzătoare (Γ_{c_1}) și (Γ_{c_2}), măsurată după formula

$$\delta(\Gamma_{c_1}, \Gamma_{c_2}) = \sup_{b\in[\beta_1,\beta_2]} |f_{c_1}(b)-f_{c_2}(b)|$$

este mai mică decît ε.

În particular să luăm pentru intervalele $[\beta_1, \beta_2]$ și $[\gamma_1, \gamma_2]$ un același interval, anume intervalul $[0, L]$. Pentru ε vom lua o valoare satisfăcînd inegalitatea

$$\varepsilon<\min\{f_L(b_1),\ |f_L(b_2)|\} \tag{2.11}$$

Apoi vom lua $c_1=L$, iar pentru c_2 un punct oarecare din intervalul $(L-\eta(\varepsilon), L)$ și care este mai mare ca b_2:

$$\begin{cases} c_1=L, \\ L-\eta(\varepsilon)<c_2<L \quad \text{și} \quad b_2<c_2 \end{cases} \tag{2.12}$$

Evident că numerele c_1 și c_2, astfel alese, satisfac inegalitatea $|c_1-c_2|<\eta(\varepsilon)$. Atunci vom avea:

$$\delta(\Gamma_{c_1}, \Gamma_{c_2}) = \max_{b\in[0,L]} |f_{c_1}(b)-f_{c_2}(b)|<\varepsilon$$

Prin felul cum a fost ales ε în (2.12), rezultă că noua funcție $f_{c_2}(b)$ va avea

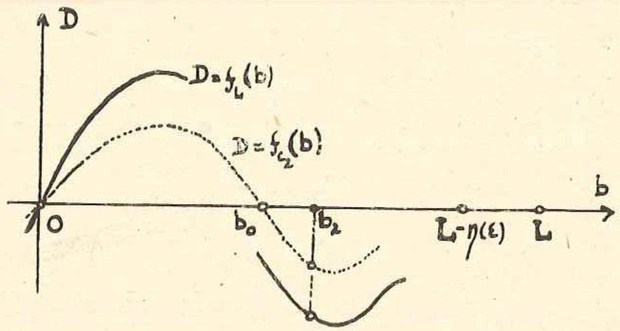

Fig. 3

în punctul $b=b_1$ o valoare pozitivă, iar în punctul $b=b_2$ o valoare negativă (fig. 3). Funcția $f_{c_2}(b)$ fiind continuă în $[b_1, b_2]$, rezultă că există un punct $b_0\in(b_1, b_2)$, astfel încît

$$f_{c_2}(b_0)=0 \tag{2.13}$$

Apoi din (2.12) rezultă:

$$b_0<b_2<c_2<L \tag{2.14}$$

Relațiile (2.13) și (2.14) contrazic proprietatea de definiție (2.2) a numărului L. Această contrazicere provine din presupunerea făcută anterior, anume că funcția $f_L(b)$ ia în intervalul $(0, L)$ valori negative. Rezultă deci că curba de ecuația $D=f_L(b)$ nu are puncte situate sub axa Ob; cu aceasta, relația (2.8) și deci prima afirmație a lemei este demonstrată.

Trecem acum la demonstrarea celei de a doua proprietăți din lemă. Să considerăm funcția $\frac{1}{b} f_c(b)$ și să aflăm limita ei cînd b tinde către 0. Observăm că oricare ar fi $c\in(-\infty, +\infty)$, avem din (2.5)

$$\lim_{b\to 0} \frac{1}{b} f_c(b) = \lim_{b\to 0} \frac{d}{db} f_c(b) = -\cos c - r \sin c + e^{rc} \tag{2.15}$$

Să considerăm de asemenea funcția $\frac{1}{c-b} f_c(b)$ și să-i aflăm limita cînd b tinde către c. Observăm că

$$\lim_{b\to c} \frac{1}{c-b} f_c(b) = -\lim_{b\to c} \frac{d}{db} f_c(b) = 1+e^{rc}(r \sin c - \cos c) \tag{2.16}$$

S-a arătat anterior în (2.6) că în ipotezele făcute inițial, numărul L este cuprins neapărat în intervalul $[\pi, 2\pi]$. Să arătăm întîi că L nu poate fi egal cu π și nici cu 2π.

Într-adevăr dacă L ar fi egal cu 2π, atunci din (2.1) am deduce că $f_L(b)=(e^{2\pi r}-1)\sin b$. In ipoteza făcută la început, că $r>0$, această funcție se anulează în punctul $b=\pi$, trecînd de la valori pozitive la valori negative. Ori, aceasta contrazice inegalitatea (2.8) stabilită anterior.

Să arătăm acum că L nu poate fi egal nici cu π. Într-adevăr, presupunînd contrariul, adică $L=\pi$, obținem din (2.1):

$$f_L(b)=f_\pi(b)=(1+e^{r\pi})\sin b. \tag{2.17}$$

Să considerăm funcția auxiliară:

$$\Phi_L(b) = \frac{f_L(b)}{b(L-b)} = \frac{(1+e^{\pi r})\sin b}{b(\pi-b)} \tag{2.18}$$

Observăm că

$$\lim_{b\to 0} \Phi_L(b) = \lim_{b\to\pi} \Phi_L(b) = \frac{1}{\pi}(1+e^{\pi r}) \tag{2.19}$$

De aici rezultă că funcția $\Phi_L(b)$ este continuă în tot intervalul $(-\infty+\infty)$ și că în intervalul închis $[0, \pi]$ ea nu se anulează. Apoi

$$\frac{1}{(1+e^{r\pi})} \frac{d}{db} \Phi_L(b) = \frac{b(\pi-b)\cos b-(\pi-2b)\sin b}{b^2(\pi-b)^2} = \frac{g(b)}{b^2(\pi-b)b^2}$$

Ținînd seama de faptul că $\frac{dg}{db} = (b^2-\pi b+2)\sin b$, se constată ușor că $g(b)$

are în intervalul $(0, \pi)$ o singură rădăcină $b = \frac{\pi}{2}$. Se obține următorul tablou de variație pentru funcția $\Phi_L(b)$, corespunzător intervalului $[0, L=\pi]$:

b	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\frac{d}{db}\Phi_L(b)$	0	$- - - - -$	0	$+ + + + +$	0
$\Phi_L(b)$	$1+e^{r\pi}$	$\searrow$	$\frac{4}{\pi^2}(1+e^{r\pi})$	$\nearrow$	$1+e^{r\pi}$

Din acest tablou rezultă că în intervalul $[0, \pi]$ funcția $\Phi_L(b)$ este strict pozitivă, mai precis satisface inegalitatea:

$$\Phi_L(b) \geqq \frac{4}{\pi^2}(1+e^{r\pi})\,; \quad b \in [0, \pi] \tag{2.19$_1$}$$

Intrucît în punctul $b=\pi$ funcția $\Phi_L(b)$ este continuă și ia valoarea $(1+e^{r\pi}) > \frac{4}{\pi^2}(1+e^{r\pi})$, rezultă de aici existența unui interval de forma $[\pi, \pi+h_1]$, în care încă se mai păstrează inegalitatea (2.19_1).

Curba corespunzătoare de ecuație $D=\Phi_L(b)$ este indicată în fig. 4.

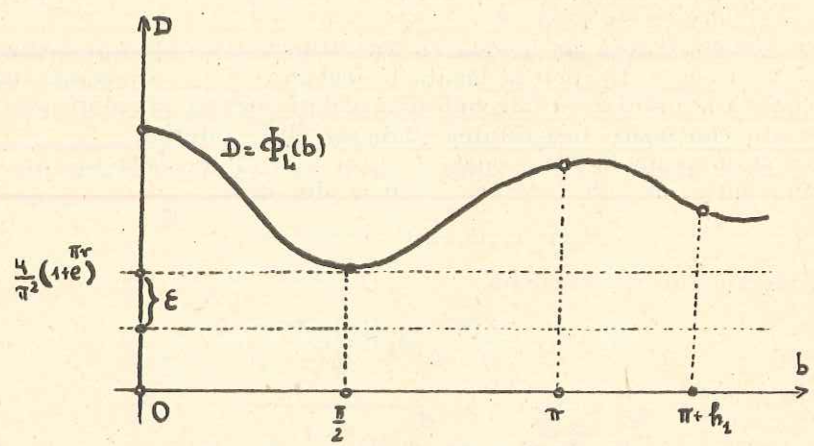

Fig. 4

Să considerăm acum familia de curbe depinzînd de parametrul c

$$D = \Phi_L(b) = \frac{f_c(b)}{b(c-b)} \tag{2.20}$$

Ținînd seama de relațiile (2.15) și (2.16), rezultă că orice curbă din familia (2.20) este continuă în tot intervalul $-\infty < b < +\infty$. Mai mult chiar, funcția

$\Phi_c(b)$ din (2.20), concepută ca funcție de două variabile independente b și c, este o funcție continuă în raport cu ansamblul variabilelor b și c, în tot planul acestor variabile.

Într-adevăr, funcția $\Phi_c(b)$ este evident continuă în orice domeniu (D) din planul bOc, ce nu conține puncte ale axei $b=0$ și ale dreptei $b=c$ (fig. 5). Mai rămîne de verificat că $\Phi_c(b)$ este continuă în punctele situate pe axa $b=0$ precum și în punctele situate pe dreapta $b=c$ (fig. 5). Intr-adevăr, fie

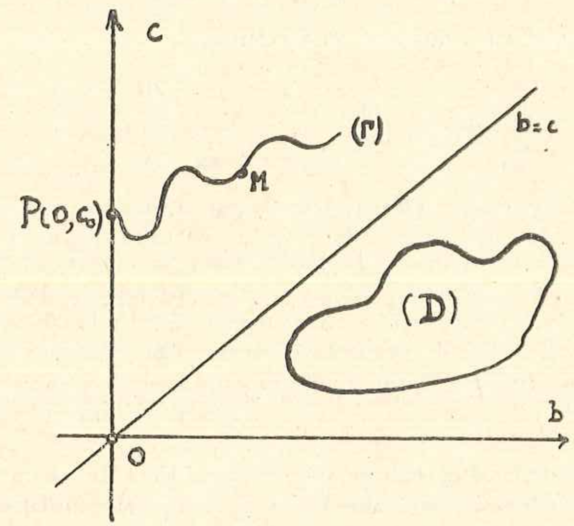

Fig. 5

$P(0, c_0)$ un punct situat pe axa $b=0$ și diferit de originea O. Să considerăm un drum oarecare (Γ), ce duce spre punctul P, sub forma:

$$(\Gamma)\,;\ \begin{cases} b = \varphi(t) \\ c = \psi(t) \end{cases}$$

unde φ și Ψ sînt funcții oarecare, continue, admițînd derivate de ordinul 1, continue într-un interval $(t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)$ și satisfăcînd în plus condițiile:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = c_0 \end{cases} \tag{2.21}$$

Mai presupunem că porțiunea considerată din drumul (Γ) nu taie dreapta $b=c$, iar dreapta $b=0$ o taie numai în punctul P (fig. 5).

Să calculăm limita funcției $\Phi_c(b)$, cînd punctul $M(b, c)$ tinde către $P(0, c_0)$ pe drumul (Γ). Pentru calculul acestei limite, putem aplica regula lui l'Hôspital, întrucît condițiile în care este valabilă această regulă sînt îndeplinite în cazul de față. Vom obține:

$$\lim_{\substack{M\to P\\(\Gamma)}} \Phi_c(b) = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{\varphi(t)\,.\,[\psi(t)-\varphi(t)]}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{r\varphi(t)} & \cos\varphi(t) & \sin\varphi(t) \\ e^{r\psi(t)} & \cos\psi(t) & \sin\psi(t)\end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to t_0}\frac{1}{\varphi'[\psi-\varphi]+\varphi[\psi'-\varphi']}\cdot\left(\varphi'\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ re^{r\varphi} & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ e^{r\psi} & \cos\psi & \sin\psi\end{vmatrix} + \psi'\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{r\varphi} & \cos\varphi & \sin\varphi \\ re^{r\psi} & -\sin\psi & \cos\psi\end{vmatrix}\right)$$

Ținînd seama de (2.21), obținem în continuare

$$\lim_{\substack{M\to P\\(\Gamma)}} \Phi_c(b) = \frac{1}{c_0}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \\ e^{rc_0} & \cos c_0 & \sin c_0\end{vmatrix} \tag{2.22}$$

Această egalitate ne arată că în ipoteza $c_0\neq 0$, limita de mai sus nu depinde de drumul (Γ) ales și deci funcția $\Phi_c(b)$ este continuă în punctul P, în raport cu ansamblul variabilelor b și c. In mod analog, se constată că funcția $\Phi(b)$ este continuă în orice punct P situat pe bisectoarea $b=c$ și diferit de originea 0. Mai mult, se poate arăta cu ușurință că funcția $\Phi_c(b)$ este continuă și în origine, dar de această proprietate nu ne vom servi în cele ce urmează.

In particular, funcția $\Phi_c(b)$ va fi continuă în domeniul D_1, definit de inegalitățile $0\leq b\leq\pi+h_1; \pi\leq c\leq\pi+h_1$, unde h_1 este un număr ce s-a definit anterior (fig. 4).

De aici rezultă că porțiunea de curbă (Γ_c^*) de ecuație $D=\Phi_c(b)$, corespunzătoare intervalului închis $0\leq b\leq\pi+h_1$, este continuă pentru orice valoare a parametrului $c\in[\pi, \pi+h_1]$, după cum s-a arătat mai sus, și mai mult — se deformează uniform continuu atunci cînd parametrul c variază în intervalul închis $[\pi, \pi+h_1]$. Aceasta înseamnă că fiind dat un număr ε (fig. 4), astfel încît

$$0<\varepsilon<\frac{4}{\pi^2}(1+e^{r\pi})=\inf_{b\in[0,\pi+h_1]}\Phi_L(b) \tag{2.23}$$

acestuia îi corespunde un număr $\eta(\varepsilon)>0$, astfel încît oricare ar fi două valori c_1 și c_2 ale parametrului c, luate din intervalul $[\pi, \pi+h_1]$ și satisfăcînd condiția $|c_2-c_1|<\eta(\varepsilon)$, distanța în intervalul $0\leq b\leq\pi+h_1$ dintre cele două curbe corespunzătoare $(\Gamma_{c_1}^*)$ și $(\Gamma_{c_2}^*)$ să fie mai mică ca ε, adică:

$$\sup_{b\in[0,\pi+h_1]}|\Phi_{c_1}(b)-\Phi_{c_2}(b)|<\varepsilon \tag{2.24}$$

Să luăm $c_1=\pi=L$ și să notăm $h_2=\min\{h_1, \eta(\varepsilon)\}$. Din (2.24) obținem inegalitățile:

$$\Phi_L(b)-\varepsilon\leq\Phi_{c_2}(b)\leq\Phi_L(b)+\varepsilon \tag{2.25}$$

valabile pentru orice $b\in[0, \pi+h_1]$ și $c_2\in[\pi, \pi+h_2)$. Ținînd seama de (2.23), rezultă din (2.25) inegalitățile

$$0<\frac{4}{\pi^2}(1+e^{r\pi})-\varepsilon\leq\Phi_c(b) \tag{2.26}$$

oricare ar fi $b\in[0, \pi+h_2]$ și $c\in[\pi, \pi+h_2]$. Din (2.26) rezultă că oricare ar fi $c\in[\pi, \pi+h_2]$ și oricare ar fi $b\in(0, c)$, are loc inegalitatea

$$0<\Phi_c(b)b(c-b)=l_c(b)$$

ceea ce arată că lungimea intervalului maxim, în care integrala generală a ecuației diferențiale considerate este interpolatoare de ordinul 3, este cel puțin egală cu $\pi+h_2$. Aceasta însă contrazice ipoteza făcută, că $L=\pi$. Deci L nu poate fi egal cu π și atunci rezultă în mod necesar (în ipoteza $r>0$) că:

$$\pi<L<2\pi \tag{2.27}$$

În concluzie, rezultă că întotdeauna avem $L>\pi$ și că egalitatea $L=2\pi$ este echivalentă cu $r=0$. Ținînd seamă de (2.27) vom distinge două cazuri, după cum numărul L este sau nu rădăcină a funcției

$$\varphi(c)=1+e^{rc}(r\sin c-\cos c) \tag{2.28}$$

care intervine în (2.16). In primul caz, cînd $\varphi(L)=0$, lema este evidentă întrucît conform relației (2.16) putem scrie: $-\lim\limits_{b\to L}\frac{d}{db}l_L(b)=\varphi(L)=0$.

Rămîne deci de considerat numai cazul:

$$\varphi(L)=1+e^{rL}(r\sin L-\cos L)\neq 0$$

Ținînd seamă de semnificația dată în (2.16) funcției $\varphi(c)$, apoi de relațiile (1.3) și de (2.8), se constată de la început că dacă expresia $\varphi(L)$ este diferită de zero, atunci această expresie este neapărat pozitivă. Deci, în cazul considerat are loc inegalitatea:

$$\varphi(L)=1+e^{rL}(r\sin L-\cos L)>0 \tag{2.29}$$

Să considerăm funcția $\varphi(c)=1+e^{rc}(r\sin c-\cos c)$ din (2.16). Se constată cu ușurință că această funcție admite în intervalul $\pi\leq c\leq 2\pi$ o singură rădăcină reală. Într-adevăr, se obține că $\varphi'(c)=(r^2+1)e^{rc}\sin c$ și pentru intervalul $[\pi; 2\pi]$ se obține următorul tablou de variație:

c	π		c_0		2π
$\varphi'(c)$	0	— — — —	— — —	— —	0
$\varphi(c)$	$1+e^{r\pi}$	↘ ↘	0	↘	$(1-e^{2r\pi})$

(2.30)

De aici rezultă că în intervalul $\pi\leq c\leq 2\pi$ funcția $\varphi(c)$ nu are decît o singură rădăcină reală, pe care o însemnăm cu c_0. Din inegalitatea (2.29) și din tabloul de variație alcătuit, rezultă inegalitățile

$$\pi<L<c_0<2\pi \tag{2.31}$$

Fie c_1 un număr arbitrar satisfăcînd inegalitățile

$$L<c_1<c_0 \tag{2.32}$$

Din tabloul (2.30) rezultă că pentru orice număr $c \in [L, c_1]$ are loc inegalitatea strictă

$$\varphi(c) \geqq \varphi(c_1) = m_\varphi > 0 \tag{2.33}$$

Să considerăm acum funcția

$$\psi(c) = -\cos c - r \sin c + e^{rc} \tag{2.34}$$

care intervine în (2.15). Ținînd seama de (2.31), se constată îndată că în intervalul închis $[L, c_1]$ funcția $\psi(c)$ este strict pozitivă. Există deci un număr $m_\psi > 0$, astfel încît să aibă loc pentru orice $c \in [L, c_1]$ inegalitatea:

$$\psi(c) \geqq m_\psi > 0 \tag{2.35}$$

Acestea fiind stabilite, să considerăm acum funcția auxiliară

$$\Phi_c(b) = \frac{f_c(b)}{b(c-b)} \tag{2.36}$$

Ținînd seama de (2.15), (2.34) și (2.35), rezultă că oricare ar fi valoarea parametrului $c \in [L, c_1]$, funcția $\Phi_c(b)$ are o limită pozitivă și finită, cînd $b \to 0$:

$$\lim_{b \to 0} \Phi_c(b) \gtreqqless \frac{m_\psi}{c} \gtreqqless \frac{m_\psi}{c_1} > 0\,; \quad c \in [L, c_1] \tag{2.37}$$

De asemenea, ținînd seama de (2.16), (2.28) și de (2.33), rezultă că oricare ar fi valoarea parametrului $c \in [L, c_1]$, funcția $\Phi_c(b)$ are o limită pozitivă și finită cînd $b \to c$.

$$\lim_{b \to c} \Phi_c(b) \geqq \frac{m_\varphi}{c} \geqq \frac{m_\varphi}{c_1} > 0\,; \quad c \in [L, c_1] \tag{2.38}$$

Apoi observăm că oricare ar fi $c \in [L, c_1]$, funcția $\Phi_c(b)$ este continuă în intervalul $-\infty < b < +\infty$, deci în particular și în intervalul $0 \gtreqqless b \gtreqqless c_1$.

S-a arătat anterior însă că funcția $\Phi_c(b)$, concepută ca funcție de două variabile b și c, este continuă în ansamblul variabilelor în tot planul acestor variabile și deci și în domeniul definit de inegalitățile $0 \leqq b \leqq c_1$; $L \leqq c \leqq c_1$. De aici rezultă că porțiunea de curbă (Γ_c^*), de ecuație $D = \Phi_c(b)$, corespunzătoare unui interval oarecare finit, este continuă pentru orice valoare a parametrului c și se deformează uniform continuu cînd parametrul c variază continuu într-un interval închis oarecare.

Să presupunem prin absurd că cea de a doua afirmație a lemei nu ar fi adevărată, adică curba (Γ_L) de ecuație $D = f_L(b)$ n-ar fi tangentă la axa Ob, în nici un punct interior intervalului $(0, L)$. Ar rezulta din această presupunere și din inegalitatea (2.8) stabilită anterior, inegalitatea strictă

$$f_L(b) > 0\,; \quad b \in (0, L) \tag{2.39}$$

Din (2.39), ținînd seama încă de (2.36), (2.37), (2.38), în care luăm $c = L$, ar rezulta inegalitatea strictă

$$\Phi_L(b) > 0\,; \quad b \in [0, L] \tag{2.40}$$

Din (2.40) și din constatarea făcută anterior, că funcția $\Phi_L(b)$ este continuă pe toată axa, ar rezulta inegalitatea strictă

$$\inf_{b \in [0, L]} \Phi_L(b) = m > 0 \tag{2.41}$$

ceea ce arată că în intervalul $0 \leqq b \leqq L$ curba (Γ_L^*), de ecuație $D = \Phi_L(b)$, se situează strict deasupra axei Ob, mai precis deasupra paralelei de ecuație $D = m$ (fig. 6). Fie m_1 un număr oarecare satisfăcînd inegalitatea:

$$0 < m_1 < m \tag{2.42}$$

Ținînd seama de faptul că $\Phi_L(L) \geqq m > 0$, (2.41), precum și de continuitatea

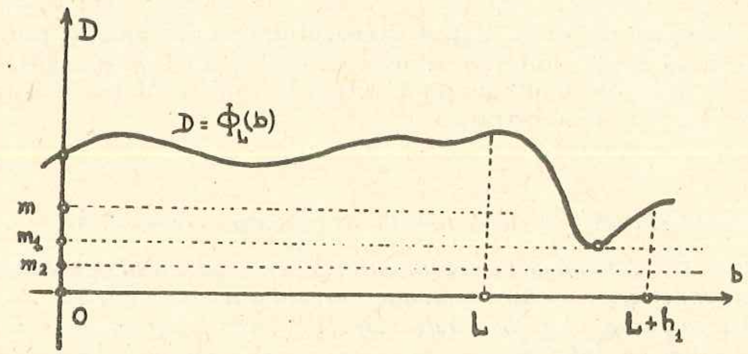

Fig. 6

funcției $\Phi_L(b)$, rezultă existența unui interval de forma $[L, L+h_1]$, în care funcția $\Phi_L(b)$ să continue a lua valori mai mari sau cel puțin egale cu m_1 (fig. 6). Vom avea deci

$$\Phi_L(b) \geqq m_1 > 0\,; \quad b \in [0, L+h_1] \tag{2.43}$$

Fie m_2 un număr astfel încît $m_1 > m_2 > 0$, (fig. 6). Considerăm acum curba (Γ_c^*) de ecuație $D = \Phi_c(b)$, unde c este considerat un parametru variabil. Să deformăm această curbă, făcînd parametrul c să varieze în mod continuu de la valoarea L la valoarea $L+h_1$. După cum s-a mai amintit anterior, curba (Γ_c^*) se va deforma uniform continuu. Înseamnă că fiind dat un număr pozitiv ε, arbitrar, pe care-l alegem în cazul de față astfel încît să satisfacă inegalitatea

$$\varepsilon < m_1 - m_2 \tag{2.44}$$

lui ε îi va corespunde un număr $\eta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi două valori c_1 și c_2 ale parametrului c, luate din intervalul $[L, L+h_1]$ și satisfăcînd condiția $|c_2 - c_1| < \eta(\varepsilon)$, distanța dintre cele două curbe corespunzătoare $(\Gamma_{c_1}^*)$ și $(\Gamma_{c_2}^*)$ să fie mai mică decît numărul ε ales, adică

$$\sup_{b \in [0, L+h_1]} |\Phi_{c_1}(b) - \Phi_{c_2}(b)| < \varepsilon \tag{2.45}$$

Să luăm $c_1=L$ și să notăm cu $h_2=\min\{h_1,\eta(\varepsilon)\}$. Din (2.45) obținem inegalitățile:

$$\Phi_L(b)-\varepsilon\leqq\Phi_{c_2}(b)\leqq\Phi_L(b)+\varepsilon \tag{2.46}$$

valabile pentru orice $b\in[0,\ L+h_1]$, $c\in[L,\ L+h_2]$.

Ținînd seamă de (2.43) și (2.44), obținem din (2.46) inegalitățile

$$0<m_1-\varepsilon\leqq\Phi_L(b)-\varepsilon\leqq\Phi_{c_2}(b) \tag{2.47}$$

oricare ar fi $b\in[0,\ L+h_2]$ și $c\in[L,\ L+h_2]$.

Din (2.47) rezultă că oricare ar fi $c\in[L,\ L+h_2]$ și oricare ar fi $b\in(0,\ c)$, are loc inegalitatea:

$$0<\Phi_c(b)b(c-b)=f_c(b)$$

ceea ce contrazice definiția (2.2) a numărului L. Contradicția provine din ipoteza absurdă făcută anterior, anume că curba (Γ_L), de ecuație $D=f_L(b)$, nu ar fi tangentă axei ob într-un punct situat în intervalul $(0,\ L]$. Cu aceasta, lema este complet demonstrată.

*

Din lema stabilită rezultă îndată următoarea consecință:

L e m a 2. *Numărul L, definit în (2.2), este egal cu marginea inferioară a mulțimii numerelor c_0 care satisfac inegalitatea $\pi\leqq c_0\leqq 2\pi$ și care au proprietatea că curba (Γ_{c_0}), de ecuație, $D=f_{c_0}(b)$, este tangentă axei ob într-un punct b_0, situat în intervalul $(0,\ c_0]$, adică că ecuația $f_{c_0}(b)=0$ admite o rădăcină dublă b_0, situată în intervalul $(0,\ c_0]$.*

D e m o n s t r a ț i e. Să notăm cu $\mathscr{C}$ mulțimea acestor numere c_0, și fie $\bar{c}=\inf.\ \mathscr{C}$. Din lema stabilită anterior, rezultă că un astfel de număr c_0 va fi și numărul L corespunzător ecuației diferențiale considerate. Vom putea deci scrie inegalitatea

$$\bar{c}\leqq L \tag{2.48}$$

Pentru a arăta că $\bar{c}=L$, vom arăta că o dată cu (2.48) are loc și inegalitatea $\bar{c}\geqq L$. Să presupunem prin absurd că

$$\bar{c}<L \tag{2.49}$$

Atunci, conform definiției lui $\bar{c}$ și conform inegalității (2.49), rezultă existența unui număr c_0, aparținînd mulțimii $\mathscr{C}$ și satisfăcînd inegalitățile $\bar{c}<c_0<L$. Să considerăm curba de ecuație $D=f_{c_0}(b)$, unde c_0 este numărul ales. Deoarece $c_0\in\mathscr{C}$, din felul cum s-a definit mulțimea $\mathscr{C}$ rezultă că această curbă va fi tangentă la axa ob într-un punct $b_0\in(0,\ c_0]$. Punctul b_0 nu poate fi însă strict interior intervalului $(0,\ c_0]$, întrucît în caz afirmativ determinantul (2.1) s-ar anula pentru valorile distincte $b=b_0$ și $c=c_0$ situate în $(0,\ L)$ și aceasta ar fi în contrazicere cu definiția numărului L, dată în (2.2). Apoi, prin felul cum s-a definit mulțimea $\mathscr{C}$, rezultă că $b_0>0$. Deci rămîne de considerat numai cazul $b_0=c_0$.

In acest caz, curba $D=f_{c_0}(b)$ fiind tangentă la axa ob în punctul $b=c_0$, rezultă că

$$\lim_{b\to c_0}\frac{d}{db}f_{c_0}(b)=0$$

adică, ținînd seama de (2.16), că

$$e^{rc_0}(\cos c_0-r\sin c_0)-1=0 \tag{2.50}$$

Să considerăm funcția auxiliară $\varphi(c)=e^{rc}(\cos c-r\sin c)-1$. Observăm că $\varphi'(c)=-(1+r^2)\,e^{rc}\sin c$.

Întrucît $\pi<c_0<L\leqq 2\pi$, rezultă că $\varphi'(c_0)>0$. Apoi, din (2.50) rezultă că $\varphi(c_0)=0$. Deci există o vecinătate a punctului c_0, situată la dreapta acestuia astfel încît funcția $\varphi(c)$ să fie pozitivă în această vecinătate. Fie intervalul $(c_0,\ c_0+h)$ această vecinătate. Extremitatea c_0+h o luăm astfel, încît să satisfacă inegalitatea $c_0+h<L$.

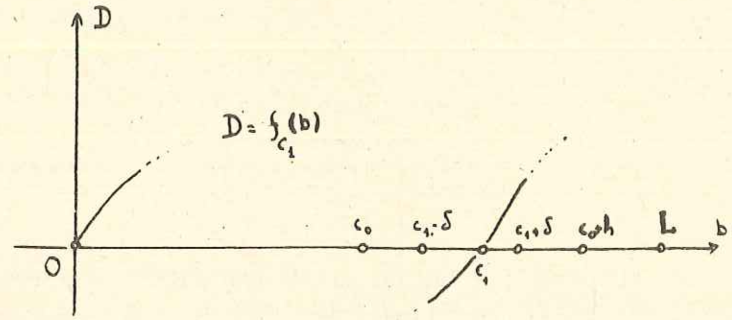

Fig. 7

Fie acum punctul $c_1\in(c_0,\ c_0+h)$. În acest punct (fig. 7) vom avea $\varphi(c_1)>0$, adică $\lim\limits_{b\to c_1}\frac{d}{db}f_{c_1}(b)>0$. Înseamnă că funcția $f_{c_1}(b)$ este strict crescătoare într-o vecinătate a lui c_1, de forma $(c_1-\delta,\ c_1+\delta)$. Dar $\lim\limits_{b\to c_1}f_{c_1}(b)=0$. Deci curba de ecuație $D=f_{c_1}(b)$ taie axa Ob în punctul c_1, traversînd această axă de jos în sus (fig. 7). Pe de altă parte din (2.5) deducem că $\lim\limits_{b\to 0}\frac{d}{db}f_{c_1}(b)>0$, întrucît $\pi<c_1<2\pi$. Deci, în vecinătatea originei, curba de ecuație $D=f_{c_1}(b)$ se află deasupra axei Ob. Rezultă că această curbă taie axa Ob într-un punct b_1 ce satisface inegalitatea $0<b_1<c_1$. Am arătat astfel existența a două numere b_1 și c_1 în relație $0<b_1<c_1<L$, pentru care determinantul (2.1) se anulează. Acesta contrazice însă definiția numărului L (2.2). Contradicția provine din ipoteza falsă pe care am presupus-o, anume că $\bar{c}<L$. Deci

$$\bar{c}\geqq L. \tag{2.51}$$

Din (2.48) și (2.51) deducem $\bar{c}=L$, ceea ce demonstrează complet lema 2.

Consecință. Un număr $c_0 \in \mathcal{C}$, precum și numărul b_0 corespunzător, verifică sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} f_c(b)=\sin(c-b)-e^{rb}\sin c+e^{rc}\sin b=0 \\ \dfrac{d}{db}f_c(b)=-\cos(c-b)-re^{rb}\sin c+e^{rc}\cos b=0 \end{cases} \tag{2.52}$$

Din lema 2 rezultă că, pentru a afla numărul L, trebuie să aflăm soluțiile (b_0, c_0) ale sistemului (2.52), care satisfac condițiile

$$0<b_0\leqq c_0\,;\quad \pi<c_0\leqq 2\pi \tag{2.53}$$

și din mulțimea acestor soluții să alegem soluția pentru care c_0 are o valoare strict pozitivă, cît mai mică posibilă. Numărul c_0 din această soluție ne va da pe L. Pentru a obține ecuația care să admită printre rădăcinile ei numărul L, se elimină necunoscuta b din sistemul (2.52). Eliminarea se poate realiza în felul următor :

Înlocuind în (2.52) pe $\sin(c-b)$ și $\cos(c-b)$ respectiv cu expresiile lor dezvoltate, obținem astfel un sistem liniar în $\sin b$ și $\cos b$, din care deducem

$$\begin{aligned} \sin b &= -\frac{(\cos c+r\sin c-e^{rc})\,e^{rb}\sin c}{\sin^2 c+(\cos c-e^{rc})^2} \\ \cos b &= \frac{(\sin c-r\cos c+re^{rc})\,e^{rb}.\sin c}{\sin^2 c+(\cos c-e^{rc})^2} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Ridicînd aceste egalități membru cu membru la patrat și apoi adunîndu-le, în urma unor reduceri și simplificări obținem ecuația :

$$1=\frac{(1+r^2)\,e^{2rb}\sin^2 c}{\sin^2 c+(\cos c-e^{rc})^2}$$

De aici se obține îndată

$$b=\frac{1}{2r}\ln\frac{\sin^2 c+(\cos c-e^{rc})^2}{(1+r^2)\sin^2 c}$$

și de asemenea

$$e^{rb}=-\frac{\sqrt{\sin^2 c+(\cos c-e^{rc})^2}}{\sqrt{(1+r^2)}\sin c}$$

întrucît valorile necunoscutei c se caută numai în intervalul $\pi<c<2\pi$, în care $\sin c$ este negativ. Introducînd valorile lui b și e^{rb}, aflate mai sus în una din ecuațiile sistemului (2.52), sau mai simplu în prima ecuație din (2.54), obținem ecuația

$$\Phi(c)=\sin\left[\frac{1}{2r}\ln\frac{\sin^2 c+(\cos c-e^{rc})^2}{(1+r^2)\sin^2 c}\right]-\frac{\cos c+r\sin c-e^{rc}}{\sqrt{1+r^2}\,[\sin^2 c+(\cos c-e^{rc})^2]^{1/2}}=0$$

Se poate arăta cu ușurință că această ecuație are în intervalul $(\pi, 2\pi)$ o infinitate de rădăcini, care admit ca puncte de acumulare numerele π și 2π.

Alt procedeu de eliminare. Eliminarea necunoscutei b din sistemul (2.52) s-ar putea face și astfel : în sistemul (2.52), înmulțim prima ecuație cu $(-r)$ și o adunăm cu a doua. Obținem ecuația

$$(e^{rc}-\cos c-r\sin c)\cos b+(r\cos c-\sin c-re^{rc})\sin b=0$$

De aici deducem

$$tg\, b=\frac{\cos c+r\sin c-e^{rc}}{r\cos c-\sin c-re^{rc}}, \tag{2,55}$$

de unde s-ar putea scoate valoarea necunoscutei b în funcție de c, bine-înțeles după ce în prealabil s-a studiat poziția pe care ar putea-o lua această necunoscută b în diversele cadrane, atunci cînd $\pi<c<2\pi$. Astfel din (2.54) se observă îndată că dacă $\pi<c<2\pi$, atunci $\sin b<0$, ceea ce înseamnă că valoarea corespunzătoare a necunoscutei b se află situată în intervalul $[\pi, c]$. Mai precis, dacă numărul r este mai mare ca rădăcina pozitivă r_0 a ecuației

$$re^{r\pi}-r-1=0\ ^{5)},$$

atunci din (2.54) se constată că $\cos b<0$, deci că b este situat în intervalul $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Atunci din (2.55) deducem

$$b=\pi+\operatorname{arctg}\frac{e^{rc}-r\sin c-\cos c}{re^{rc}+\sin c-r\cos c}.$$

Înlocuind această valoare în prima ecuație a sistemului (2.52), obținem ecuația ce ne va da numărul L

$$\sqrt{\frac{1-2e^{rc}\cos c+e^{2rc}}{1+r^2}}+\sin c\,.\,e^{r\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{e^{rc}-\sin c-\cos c}{re^{rc}+\sin c-r\cos c}\right)}=0\,;\ (\pi<c<2\pi). \tag{2.56}$$

Această ecuație are de asemenea neajunsul de a fi destul de complicată. Mai mult încă, în cazul cînd $r<r_0$ nu mai putem afirma că ea este verificată de numărul L întrucît nu știm în ce cadran se află valoarea necunoscutei b.

Aceste dificultăți ne impun o examinare mai serioasă a sistemului (2.52), pentru valori ale necunoscutei c cuprinse în intervalul $(\pi, 2\pi)$. Vom demonstra în acest sens

L e m a 3. *Presupunînd că numărul r satisface inegalitatea $r^2e^{\pi r}-1\geqq 0$, sistemul (2.52) admite o singură soluție b_0, c_0, care să satisfacă condițiile $\pi<b_0=c_0<2\pi$. Notînd cu λ această valoare comună a necunoscutelor, afirmăm încă că sistemul (2.52) nu admite nici o altă soluție b_0, c_0, care să satisfacă condițiile $b_0\leqq c_0$ și $\pi<c_0<\lambda$.*

D e m o n s t r a ț i e. Faptul că sistemul (2.52) admite în intervalul $(\pi, 2\pi)$ o singură soluție de tipul $b_0=c_0$ rezultă îndată, înlocuind în sistemul (2.52) $b=c_0$. Prima ecuație este verificată identic, iar din a doua obținem :

$$\varphi(c)=-1-re^{rc}\sin c+e^{rc}\cos c=0.$$

5) Se observă că $r_0<1$.

Se obține îndată că $\varphi'(c) = -e^{rc} \sin c\, (r^2+1)$, precum și următorul tablou de variație pentru funcția $\varphi(c)$:

c	π							2π
$\dfrac{d\varphi}{dc}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\varphi(c)$	$-(1+e^{r\pi})$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$(e^{2\pi r}-1)$		

Din acest tablou rezultă că ecuația (2.56) are o singură rădăcină în intervalul $[\pi, 2\pi]$, pe care o notăm cu λ. Mai rezultă din tablou că

$$\begin{aligned} \varphi(c) &< 0 \quad \text{dacă} \quad \pi \leqq c < \lambda \\ \varphi(c) &> 0 \quad \text{dacă} \quad \lambda < c \leqq 2\pi \end{aligned} \tag{2.57}$$

Pentru a demonstra a doua afirmație a lemei, să presupunem prin absurd că sistemul (2.52) ar admite o soluție b_0, c_0 astfel încît

$$b_0 < c_0 \quad \text{și} \quad \pi < c_0 < \lambda\ ^{6)}. \tag{2.58}$$

Atunci, ținînd seama de faptul că $c_0 < 2\pi$, din (2.54) se obține că $\sin b_0 < 0$ și deci că valoarea b_0 este situată în intervalul $(\pi, 2\pi)$. Să considerăm funcția de variabilă independentă b :

$$\Phi\,(b) = -\cos\,(c_0 - b) - re^{rb} \sin c_0 + re^{rc_0} \cos b$$

care se obține considerînd membrul stîng al ecuației a doua din sistemul (2.52), în care se înlocuiește $c = c_0$.

Vom arăta că această funcție nu se anulează în intervalul $\pi \leqq b \leqq c_0$. Într-adevăr, ținînd seama de (2.58) și de expresia funcției $\varphi(c)$, avem :

$$\Phi(c_0) = \varphi(c_0) < 0 \tag{2.59}$$

Apoi

$$\frac{d\Phi}{db} = -\sin c_0 \cos b + \sin b \cos c_0 - r^2 e^{rb} - e^{rc_0} \sin b \tag{2.60}$$

Referindu-ne la (2.60), oricare ar fi $b \in [\pi, 2\pi]$, avem

$$\sin b \cos c_0 - e^{rc_0} \sin b = \sin b\,(\cos c_0 - e^{rc_0}) \geqq 0$$

Dacă se presupune că r este astfel încît $r^2 . e^{\pi r} - 1 \geqq 0$, atunci

$$-\sin c_0 \cos b - r^2 e^{rb} \sin c_0 = -\sin c_0\,(\cos b + r^2 e^{rb}) \geqq 0.$$

Rezultă în definitiv că oricare ar fi $b \in [\pi, c_0]$ are loc inegalitatea $\dfrac{d\Phi}{db} > 0$, ceea ce arată că funcția $\Phi(b)$ este crescătoare în $(0, c_0)$. De aici, ținînd seama de (2.59), rezultă pentru orice $b \in [\pi, c_0]$ inegalitatea $\Phi(b) < 0$ și în particular

6) Posibilitatea $b_0 = c_0$, $\pi < c_0 < \lambda$, se exclude în baza faptului că ecuația $\varphi(c) = 0$ are o singură rădăcină în intervalul $[\pi, 2\pi]$.

$\Phi(b_0) < 0$, ceea ce exprimă faptul că rezultatul înlocuirii în a doua ecuație a sistemului (2.52) a necunoscutelor b și c, respectiv cu valorile b_0 și c_0, nu este nul. Aceasta contrazice însă presupunerea făcută la început, că b_0 și c_0 constituie o soluție a sistemului (2.52).

Rezultă deci că dacă $r^2 e^{\pi r} - 1 \geqq 0$, atunci sistemul (2.52) nu admite nici o soluție b_0, c_0 astfel încît $b_0 \gtreqqless c_0 < \lambda$ și $\pi < c_0 \leqq \lambda$. Astfel lema 3 este demonstrată.

Consecință. 1⁰. Ținînd seamă de lemele 2 și 3, în ipoteza că r este mai mare sau cel puțin egal cu rădăcina r_0 a ecuației $r^2 e^{\pi r} - 1 = 0$, rezultă că numărul L este rădăcina cuprinsă în intervalul $(\pi, 2\pi)$ a ecuației

$$1 + re^{rc} \sin c - e^{rc} \cos c = 0 \tag{2.61}$$

ce se obține din a doua ecuație a sistemului (2.52), înlocuind $b = c$.

2⁰. Ținînd seamă de faptul că membrii stîngi ai ecuațiilor sistemului (2.52) reprezintă respectiv funcția $f_c(b)$ precum, și $\dfrac{d}{db} f_c(b)$, din lema 3 și din faptul că b definit de relațiile (2.54) se determină unic rezultă că funcțiile $f_L(b)$ și $\dfrac{d}{db} f_L(b)$ nu se anulează simultan în nici un punct din intervalul $[O, L)$, decît numai în extremitatea dreaptă, $b = L$. În limbaj geometric înseamnă că curba (Γ_L), de ecuație $D = f_L(b)$ nu este tangentă axei Ob în intervalul (O, L) în nici un punct, fiind însă întotdeauna tangentă în punctul $b = L$.

Ținînd seamă de această constatare, precum și de lema 1, ajungem la concluzia că funcția $f\,(b)$ nu se anulează în intervalul (O, L) și deci că intervalul cel mai mare, în care integrala generală a ecuației diferențiale $E(y) = 0$ este interpolatoare de ordin 3, este intervalul (O, L), putînd fi considerat închis într-una din extremitățile sale.

Observare. Rezultatele enunțate la pct. 1 și 2 au fost obținute în ipoteza că r este mai mare sau cel puțin egal cu rădăcina pozitivă r_0 a ecuației $r^2 e^{\pi r} - 1 = 0$.

În cele ce urmează vom prezenta o nouă metodă de cercetare, care ne va permite să arătăm că concluziile enunțate la pct. 1 și 2 rămîn valabile și în cazul cînd $r \in (O, r_0)$. Această nouă metodă de cercetare ne va servi dealtfel și la tratarea problemei polilocale, în cazul ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți de ordin mai mare ca 3.

O altă metodă de cercetare

Metoda pe care o vom folosi în cele ce urmează se bazează pe următoarea observație, care de altfel este utilizată în demonstrația teoremei de existență și unicitate a lui de la Vallée Poussin, referitoare la ecuații diferențiale liniare [4] sau [5], precum și într-o alternativă a acestei teoreme, stabilită de S. Zeidmann [6].

Condiţia necesară şi suficientă ca integrala generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n să fie interpolatoare de ordinul n, într-un interval I, este ca orice integrală particulară nenulă a acestei ecuaţii să aibă în acest interval cel mult $n-1$ zerouri.

Din această teoremă rezultă ca o consecinţă, că numărul L este egal cu marginea inferioară a diferenţelor x_3-x_1, unde numerele $x_1<x_2<x_3$ reprezintă trei rădăcini consecutive ale unei integrale particulare oarecare a ecuaţiei diferenţiale $E(y)=0$, marginea inferioară luîndu-se pe mulţimea tuturor acestor grupe ce se obţin considerînd toate integralele particulare ale ecuaţiei diferenţiale date.

Vom presupune, întocmai ca în expunerea anterioară, că polinomul caracteristic al ecuaţiei diferenţiale considerate $E(y)=0$ are o rădăcină reală $r>0$ şi două rădăcini complexe $+i$ şi $-i$. Atunci integrala generală a ecuaţiei diferenţiale respective va fi

$$y(x)=c_1e^{rx}+c_2\sin x+c_3\cos x$$

În cele ce urmează vom scrie această integrală generală sub forma

$$y(x)=A\left[e^{rx}-R\sin(x-\alpha)\right],\ \text{cu } R\geqq 0 \tag{2.62}$$

unde A, R si α sînt constante arbitrare.

Vom căuta mai departe să aflăm marginea inferioară a diferenţelor x_3-x_1, unde $x_1<x_2<x_3$ reprezintă trei rădăcini consecutive ale unei integrale particulare oarecare, care nu este identic nulă — marginea inferioară fiind luată referitor la mulţimea tuturor grupelor de cîte trei rădăcini consecutive ale unei integrale particulare, şi relativ la mulţimea tuturor integralelor particulare care nu sînt identic nule. După cum s-a observat anterior, această margine inferioară va fi egală cu numărul L, corespunzător ecuaţiei diferenţiale considerate. În vederea determinării acestei margini inferioare, vom stabili în prealabil următoarea lemă, care va permite să reducem mulţimea tuturor integralelor particulare, relativ la care trebuie luată marginea inferioară amintită mai sus, la o submulţime a acesteia.

Vom începe prin a introduce cîteva notaţii simplificatoare.

Fie $y=f(x)$ o integrală particulară a ecuaţiei $E(y)=0$. Să notăm cu $\mathscr{X}_f$ mulţimea tuturor grupelor de cîte trei rădăcini consecutive $x_1<x_2<x_3$ ale integralei $f(x)$ şi apoi să considerăm reuniunea mulţimilor $\mathscr{X}_f$ extinsă la toate integralele f ale ecuaţiei diferenţiale $E(y)=0$; $\mathscr{X}=\bigcup_f \mathscr{X}_f$. Să considerăm diferenţa x_3-x_1, unde x_1, x_2, x_3 reprezintă 3 rădăcini consecutive ce figurează într-o grupă oarecare din mulţimea $\mathscr{X}$. Vom avea, evident

$$L=\inf_{(\mathscr{X})}(x_3-x_1). \tag{2.63}$$

Fie acum $y=f^*(x)$ ecuaţia unei curbe integrale oarecare, tangentă la axa Ox în punctul de abscisă x_0. Să notăm cu $L^*_{f^*}$ lungimea celui mai mic interval închis, care cuprinde două rădăcini consecutive $x_1^*<x_2^*$ ale integralei $f^*(x)$, printre care se află punctul de tangenţă x_0 al curbei corespunzătoare cu axa Ox.

Acest minim este luat în raport cu mulţimea tuturor grupelor (x_1^*, x_2^*) de cîte două rădăcini consecutive, care conţin printre ele punctul de tangenţă x_0. Evident că pentru o integrală oarecare $f^*(x)$ pot exista cel mult două astfel de grupe, întrucît există un singur punct de tangenţă a curbei integrale cu axa Ox. Mulţimea formată din aceste două grupe o notăm cu $\mathscr{X}^*_{f^*}$.

$$L^*_{f^*}=\min_{(x_1^*,\ x_2^*)\in\mathscr{X}^*_{f^*}}(x_2^*-x_1^*) \tag{2.64}$$

Mai departe, fie L^* marginea inferioară, relativ la mulţimea tuturor integralelor particulare $f^*(x)$ ale mulţimii valorilor funcţionalei $L^*_{f^*}$.

$$L^*=\inf_{\{f^*\}}L^*_{f^*} \tag{2.65}$$

L e m a 4. *Are loc întotdeauna egalitatea* $L=L^*$.

D e m o n s t r a ţ i e. Observăm de la început că în vederea determinării marginii inferioare (2.63), ne putem mărgini doar la integralele (2.62) în care presupunem $A=1$ şi $R>o$:

$$y(x)=e^{rx}-R\sin(x-\alpha);\ (R>o) \tag{2.66}$$

Aici R şi α sînt constante arbitrare, cu condiţia $R>o$.

În cele ce urmează va fi de folos să considerăm curbele (Y), (Z) respectiv de ecuaţii

$$Y(x)=e^{rx};\ Z(x)=R\sin(x-\alpha);\ (R>0)$$

a căror reprezentare grafică este indicată în fig. 8.

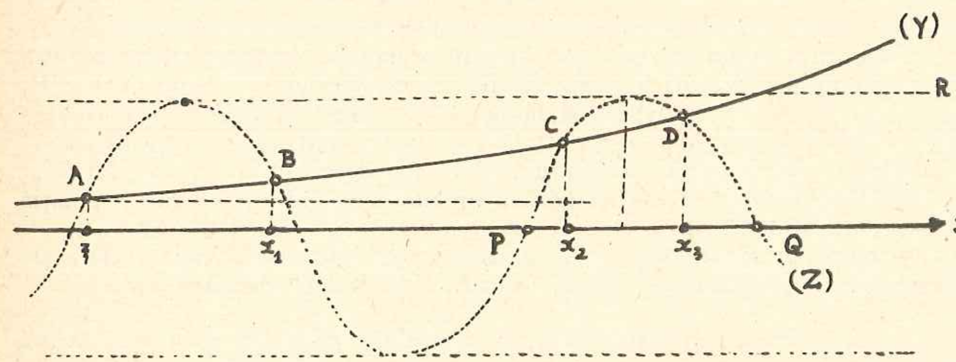

Fig. 8

Abscisele punctelor de intersecţie A, B, C, D,... ale celor două curbe reprezintă rădăcini ale integralei (2.66) considerate.

După configuraţie distingem două tipuri de grupări, de cîte 3 rădăcini consecutive ale integralei (2.66):

I. Grupări de tipul (ξ, x_1, x_2), care în fig. 8 şi 9 reprezintă respectiv abscisele punctelor A, B, C.

II. Grupări de tipul (x_1, x_2, x_3), care reprezintă în fig. 8 şi 9 abscisele punctelor B, C, D.

Se observă uşor pe figuri că — pentru grupările din prima, respectiv a doua categorie — au loc întotdeauna inegalităţile :

$$x_2-\xi>2\pi\ ;\quad x_3-x_1<2\pi.$$

Întrucît ne interesează problema determinării marginii inferioare a diferenţelor x_3-x_1, unde $x_1<x_2<x_3$ reprezintă trei rădăcini consecutive ale unei integrale oarecare neidentic nule, rezultă din observaţia făcută anterior că în această problemă putem face abstracţie de grupările din categoria I, mărginindu-ne la considerarea numai a grupărilor din categoria II.

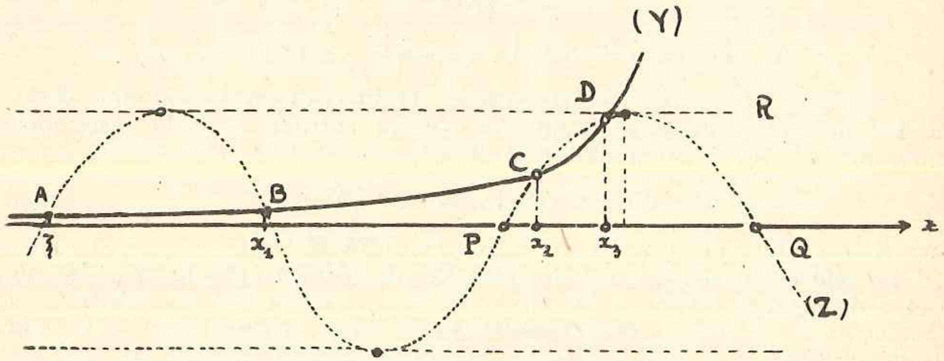

Fig. 9

Vom arăta acum că dacă considerăm o grupare oarecare din categoria II, de exemplu gruparea $x_1<x_2<x_3$ (fig. 8, 9), atunci — lăsînd curba (Y) fixă şi parametrul α constant şi făcînd ca parametrul R să descrească în mod continuu de la valoarea sa iniţială (care corespunde fig. 8, respectiv 9) — diferenţa x_3-x_1, privită ca funcţie de R, va descreşte în mod continuu. În această deformare a curbei (Z), la un moment dat, ea va lua o poziţie de tangentă faţă de curba (Y). De aici va rezulta afirmaţia lemei.

Intr-adevăr, întrucît x_1, x_2, x_3 reprezintă abscisele unor puncte de intersecţii ale curbelor (Y) şi (Z), rezultă că au loc egalităţile

$$Y(x_1)=Z(x_1) \quad \text{şi} \quad Y(x_3)=Z(x_3)$$

adică

$$\begin{cases} y(x_1)=e^{rx_1}-R\sin(x_1-\alpha)=0 \\ y(x_3)=e^{rx_3}-R\sin(x_3-\alpha)=0 \end{cases} \qquad (R>0) \tag{2.67}$$

Aceste ecuaţii definesc pe x_1 şi x_3 ca funcţii de R. Intr-adevăr, vom arăta că derivata parţială

$$\frac{\partial}{\partial x}y(x)=y'_x(x)=Y'_x(x)-Z'_x(x) \tag{2.68}$$

pentru $x=x_1$ şi $x=x_3$ este întotdeauna pozitivă, deci diferită de zero.

Într-adevăr, ţinînd seama de faptul că $Y'_x(x)$ şi $Z'_x(x)$ reprezintă coeficienţii unghiulari ai tangentelor duse la curbele (Y), respectiv (Z), se vede pe fig. 8 că au loc inegalităţile

$$\begin{matrix} Y'_x(x_1)>0 & Z'_x(x_1)<0 \\ Y'_x(x_3)>0 & Z'_x(x_3)<0 \end{matrix} \tag{2.69}$$

de unde rezultă că în cazul fig. 8 au loc inegalităţile

$$Y'_x(x_1)-Z'_x(x_1)>0\ ;\quad Y'_x(x_3)-Z'_x(x_3)>0. \tag{2.70}$$

În cazul fig. 9 avem

$$\begin{matrix} Y'_x(x_1)>0\ ;\quad Z'_x(x_1)<0 \\ Y'_x(x_3)>Z'_x(x_3) \end{matrix} \tag{2.71}$$

de unde rezultă că inegalităţile (2.70) se menţin şi în cazul fig. 9. Relaţiile (2.70) ne arată că expresiile $\frac{\partial}{\partial x_1}y(x_1)$ şi $\frac{\partial}{\partial x_3}y(x_3)$ ce se deduc din (2.68) sînt întotdeauna pozitive, cîtă vreme R este astfel încît curba (Y) taie arcul $PCDQ$ al sinusoidei (Z). In această ipoteză restrictivă asupra lui R, conform teoremei de existenţă a funcţiilor implicite, rezultă că funcţiile $x_1(R)$ şi $x_3(R)$ există, sînt continue şi admit derivate continue în intervalul de variaţie a lui R, $R_0<R<\infty$, unde R_0 este valoarea parametrului R, pentru care arcul $PCDQ$ al curbei (Z) devine tangent la curba fixă (Y)[7].

Să calculăm acum expresia $\frac{d}{dR}(x_3-x_1)$ şi să arătăm că în intervalul $R_0<R<\infty$ ea are semnul plus.

Derivînd în raport cu R, membru cu membru, ecuaţiile (2.67), deducem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dR}&=\frac{\sin(x_1-\alpha)}{re^{rx_1}-R\cos(x_1-\alpha)} \\ \frac{dx_3}{dR}&=\frac{\sin(x_3-\alpha)}{re^{rx_3}-R\cos(x_3-\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

De aici deducem

$$\frac{d}{dR}(x_3-x_1)=\frac{r[e^{rx_1}\sin(x_3-\alpha)-e^{rx_3}\sin(x_1-\alpha)]-R\sin(x_3-x_1)}{[re^{rx_1}-R\cos(x_1-\alpha)][re^{rx_3}-R\cos(x_3-\alpha)]} \tag{2.73}$$

Ţinînd seamă de ecuaţiile (2.67), primul termen ce figurează la numărătorul expresiei (2.73) este nul şi deci

$$\frac{d}{dR}(x_3-x_1)=-\frac{R\sin(x_3-x_1)}{[re^{rx_1}-R\cos(x_1-\alpha)][re^{rx_3}-R\cos(x_3-\alpha)]} \tag{2.74}$$

Se observă pe fig. 8 şi 9 că $\pi<x_3-x_1<2\pi$ şi deci că $\sin(x_3-x_1)<0$. Pentru a afla semnul expresiei $\frac{d}{dR}(x_3-x_1)$, va trebui să aflăm semnul fiecăruia

[7]) Valoarea parametrului α rămînînd tot timpul constantă, punctele P şi Q rămîn fixe atunci cînd parametrul R variază.

din factorii care intervin la numitorul expresiei (2.74). Din inegalitățile (2.70) rezultă că fiecare din acești factori este pozitiv. Deci $\frac{d}{dR}(x_3 - x_1) > 0$, oricare ar fi $R\in(R_0,\infty)$, unde R_0 este valoarea parametrului R, pentru care arcul $PCDQ$ al curbei (Z) devine tangent la curba fixă (Y). Rezultă de aici că dacă R descrește continuu de la valoarea sa inițială (corespunzătoare fig. 8, respectiv 9) pînă la valoarea R_0, atunci diferența $x_3(R)-x_1(R)$ descrește și atinge o valoare minimă atunci cînd $R=R_0$, adică atunci cînd curba (Z) devine tangentă la curba (Y). De aici rezultă îndată lema 4.

*

În cele ce urmează vom considera numai acele integrale particulare (2.66), pentru care curbele corespunzătoare (Y) și (Z) sînt tangente între ele, adică numai acele curbe integrale care sînt tangente la axa Ox într-un punct x_0.

Demonstrăm acum

L e m a 5. *Ecuația $E(y)=0$. admite o infinitate de curbe integrale tangente la axa Ox în cîte un punct dat x_0, care poate fi de altfel ales după voie. Aceste integrale au forma*

$$y(x)=A\,[e^{rx}-R\,\sin\,(x-\alpha)]$$

unde parametrul A rămîne arbitrar, iar R și α iau respectiv valorile

$$R=\sqrt{1+r^2}\,e^{rx_0};\quad \alpha=x_0-\operatorname{arctg}\frac{1}{r}. \tag{2.75}$$

D e m o n s t r a ț i e. Condițiile de tangență cu axa Ox în punctul x_0 vor fi $y(x_0)=y'(x_0)=0$, adică

$$\left.\begin{aligned} e^{rx_0}&=R\,\sin\,(x_0-\alpha)\\ re^{rx_0}&=R\,\cos\,(x_0-\alpha)\end{aligned}\right\}\ (R>0).$$

Ridicînd membru cu membru la patrat și adunînd, obținem expresia lui R dată în (2.75). Apoi, împărțind membru cu membru egalitățile de mai sus, obținem

$$\operatorname{tg}\,(x_0-\alpha)=\frac{1}{r}.$$

De aici, ținînd seama de semnele expresiilor $\sin\,(x_0-\alpha)$ și $\cos\,(x_0-\alpha)$ deduse din egalitățile de mai sus, obținem

$$x_0-\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{r}\qquad \text{q. e. d.}$$

* * *

Fie $y_0(x)=e^{rx}-R(x_0)\,\sin\,[x-\alpha(x_0)]$ o integrală particulară (2.66), a cărei curbă reprezentativă (y_0) este tangentă la axa Ox într-un punct M_0 de

abscisă x_0, aleasă după voie. Să notăm cu (Y_0) și (Z_0) curbele (Y), respectiv (Z) corespunzătoare. Fie apoi x_1 abscisa celui mai apropiat punct de intersecție M_1 a curbelor (Y_0) și (Z_0), situat la stînga punctului de tangență a lor, x_0 (fig. 10). În vederea determinării numărului L, mai stabilim încă

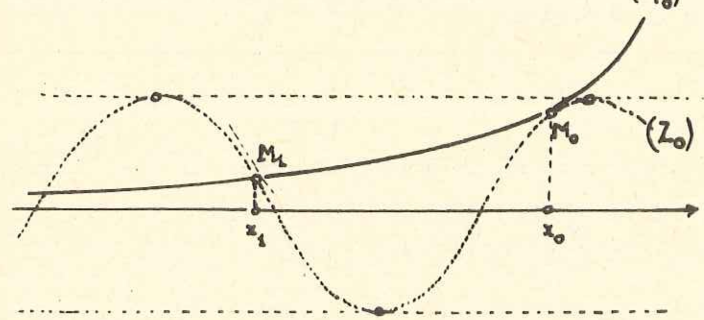

Fig. 10

L e m a 6. *Considerînd abscisa x_0 a punctului de tangență ca parametru variabil și rădăcina x_1 ca funcție de x_0, această funcție $x_1(x_0)$ există, este continuă și derivabilă pe toată axa Ox, iar diferența*

$$D(x_0)=x_0-x_1(x_0) \tag{2.76}$$

atinge valoarea sa minimă pentru

$$x_0=\bar{x}_0=\frac{1}{r}\ln\left(\frac{2+r^2}{1+r^2}\right)$$

D e m o n s t r a ț i e. Ecuația ce definește pe x_1 ca funcție de x_0 este

$$y_0(x_1)=e^{rx_1}-R(x_0)\,\sin\,[x_1-\alpha(x_0)]=0\,. \tag{2.77}$$

Se observă că derivata parțială a funcției ce reprezintă membrul stîng al ecuației (2.77) este pozitivă, oricare ar fi x_0 din $(-\infty,\ +\infty)$. Intr-adevăr

$$\frac{\partial}{\partial x_1}y_0(x_1)=\frac{\partial}{\partial x_1}Y_0(x_1)-\frac{\partial}{\partial x_1}Z_0(x_1)$$

iar termenii care intervin în această diferență reprezintă respectiv coeficienții unghiulari ai tangentelor duse în punctul de intersecție M_1, respectiv la curbele (Y_0) și (Z_0). Se observă pe fig. 10 că diferența de mai sus este pozitivă, oricare ar fi $x_0\in(-\infty,\ +\infty)$. Deci $\frac{\partial}{\partial x_1}y_0(x_1)>0$ în intervalul $-\infty<x_0<\infty$. Conform teoremei de existență pentru funcții implicite, rezultă că ecuația (2.77) definește în mod unic pe $x_1(x_0)$ ca funcție de x_0 și că această funcție este continuă și derivabilă în intervalul $-\infty<x_0<\infty$. Să considerăm acum diferența $D(x_0)=x_0-x_1(x_0)$ și să studiem variația ei în raport cu variabila x_0. În acest scop calculăm derivata $\frac{d}{dx_0}D\,(x_0)$.

Obținem :

$$\frac{d}{dx_0} D(x_0) = 1 - \frac{dx_1}{dx_0} \tag{2.78}$$

Expresia lui $\frac{dx_1}{dx_0}$ se obține derivînd ecuația (2.77), membru cu membru, în raport cu x_0. Se obține

$$\frac{dx_1}{dx_0} = \frac{\frac{dR}{dx_0} \sin (x_1 - \alpha) - R \frac{d\alpha}{dx_0} \cos (x_1 - \alpha)}{re^{rx_1} - R \cos (x_1 - \alpha)} \tag{2.79}$$

Ținînd seama de expresiile (2.75) ale variabilelor R și α, în funcție de x_0, obținem:

$$\frac{dR}{dx_0} = r\sqrt{1+r^2} \,.\, e^{rx_0}; \qquad \frac{d\alpha}{dx_0} = \frac{2+r^2}{1+r^2}.$$

Înlocuind în (2.79) derivatele $\frac{dR}{dx_0}$ și $\frac{d\alpha}{dx_0}$ cu expresiile lor obținute anterior, precum și factorul $\sin (x_1 - \alpha)$ ce figurează la numitor, cu expresia sa dedusă din (2.77), obținem :

$$\frac{dx_1}{dx_0} = \frac{re^{rx_1} - \frac{2+r^2}{\sqrt{1+r^2}} \cos (x_1 - \alpha)}{re^{rx_1} - \sqrt{1+r^2} \,.\, e^{rx_0} \cos (x_1 - \alpha)}$$

și ținînd seama de (2.78), deducem :

$$\frac{d}{dx_0} D(x_0) = 1 - \frac{dx_1}{dx_0} = \frac{\left(\frac{2+r^2}{\sqrt{1+r^2}} - \sqrt{1+r^2} \, e^{rx_0} \right) \cos (x_1 - \alpha)}{re^{rx_1} - \sqrt{1+r^2} \, e^{rx_0} \cos (x_1 - \alpha)} \tag{2.80}$$

Se observă că numitorul expresiei ce reprezintă $\frac{d}{dx_0} D(x_0)$ este întotdeauna pozitiv, întrucît $\cos (x_1 - \alpha)$ reprezintă, făcînd abstracție de un factor pozitiv, coeficientul unghiular al tangentei duse la curba (Z_0) în punctul M_1, și acesta este negativ, după cum se vede pe figura 10. Numărătorul expresiei $\frac{d}{dx_0} D(x_0)$ se anulează numai pentru valoarea

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{2+r^2}{1+r^2} \right)$$

și ținînd seama că $\cos (x_1 - \alpha) < 0$, obținem următorul tablou de variație :

x_0	$-\infty$				$\bar{x}_0$				$+\infty$
$\frac{d}{dx_0} D(x_0)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$D(x_0)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$		L		$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Deci numărul căutat L va fi dat de expresia

$$L = \lim_{x_0 \to \bar{x}_0} D(x_0) = \bar{x}_0 - x_1(\bar{x}_0) \tag{2.81}$$

Pentru a obține ecuația care să aibă ca rădăcină numărul L, ne folosim de ecuația (2.77), care definește numărul $x_1(\bar{x}_0)$:

$$e^{rx_1(\bar{x}_0)} - R(\bar{x}_0) \sin [x_1(\bar{x}_0) - \alpha(\bar{x}_0)] = 0$$

Înlocuind în aceasta valorile $R(\bar{x}_0)$ și $\alpha(\bar{x}_0)$ cu expresiile lor deduse din (2.75), obținem

$$e^{rx_1(\bar{x}_0)} - \sqrt{1+r^2} \, e^{r\bar{x}_0} \sin \left\{ [x_1(\bar{x}_0) - \bar{x}_0] + \operatorname{arctg} \frac{1}{r} \right\} = 0$$

Împărțind cu factorul nenul $e^{r.x_1(\bar{x}_0)}$ și dezvoltînd pe $\sin \left\{ [x_1 - x_0] + \operatorname{arctg} \frac{1}{r} \right\}$ obținem ecuația :

$$1 - e^{r[\bar{x}_0 - x_1(\bar{x}_0)]} \{\cos [\bar{x}_0 - x_1(\bar{x}_0)] - r \sin [\bar{x}_0 - x_1(\bar{x}_0)]\} = 0.$$

Ținînd seama că $\bar{x}_0 - x_1(\bar{x}_0) = L$, ecuația de mai sus se transcrie

$$\Psi(L) = 1 - e^{rL} (\cos L - r \sin L) = 0. \tag{2.82}$$

Se observă că $\Psi(\pi) > 0$, iar $\Psi(2\pi) < 0$. Apoi

$$\frac{d\Psi}{dL} = (1+r^2) \, e^{rL} \sin L$$

și în intervalul $(\pi, 2\pi)$, funcția $\Psi(L)$ este descrescătoare, deci ecuația (2.82) are în acest interval o singură rădăcină reală, care va reprezenta numărul L căutat.

O b s e r v ă r i . Se observă că ecuația (2.82) este chiar ecuația ce definește soluțiile $b_0 = c_0$ ale sistemului (2.52). Rezultă apoi că consecința 2^0, făcută cu ocazia lemei 3, rămîne valabilă oricare ar fi $r > o$. Demonstrația utilizată pentru stabilirea acestei consecințe se aplică și aici, cuvînt cu cuvînt.

Obținem în definitiv următoarea

TEOREMĂ : *Dacă polinomul caracteristic al unei ecuatii diferențiale liniare cu coeficienți constanți de ordinul 3 are o rădăcină reală $r > 0$, precum și două complexe, $+ i$ și $- i$, atunci numărul L corespunzător este rădăcina din intervalul $(\pi, 2\pi)$ a ecuației*

$$1 + e^{rL} (r \sin L - \cos L) = 0.$$

Relativ la diversele valori ale rădăcinii r, numărul L atinge valoarea maximă 2π dacă și numai dacă $r = 0$. Intervalul de lungime maximă, în care integrala generală este interpolatoare de ordin 3, este orice interval de lungime L închis în una din extremitățile sale și deschis în cealalta.

De aici rezultă îndată că fiind dată o ecuație diferențială liniară de ordinul 3 cu coeficienți constanți, al cărei polinom caracteristic are o rădăcină reală oarecare r şi două rădăcini complexe $\alpha+i\beta$ şi $\alpha-i\beta$, atunci numărul L corespunzător este egal cu rădăcina din intervalul $\left(\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|}\right)$ a ecuaţiei :

$$1 + e^{|r-\alpha| L}\left(\frac{|r-\alpha|}{|\beta|}\sin|\beta| L - \cos|\beta| L\right) = 0 .$$

Partea a doua a lucrării, tratînd cazul ecuaţiei diferenţiale de ordinul patru, va apare într-unul din numerele următoare ale acestei reviste.

Academia R.P.R. — Filiala Cluj
Institutul de calcul

BIBLIOGRAFIE

1. M. Biernacki, *Sur un problème d'interpolation relatif aux équations différentielles linéaires*. Annales de la Société Polonaise de Mathématique, tom. XX, 1947, pag. 169–214
2. T. Popoviciu, *Asupra unui determinant*. Gazeta Matematică, 36, 1930, pag. 405–408
3. G. Polya, G. Szegö, *Aufgaben und Lehrzätze aus der Analysis*, t. II. Berlin, 1925 ex. 76, 86.
4. Ch. I. de la Vallée Poussin, *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n*. Journ. de Math. Pur. et Appl., (9), 8, 1929.
5. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale. Parte prima*. Moscova, 1953, p. 154–159 (trad. în l. rusă).
6. S. Zeidman, *Evaluări ale distanţei între zerourile soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale*. Revista Univ. „C. I. Parhon", Seria ştiinţelor naturii, 6–7, 1955, Bucureşti.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ (I)

(Краткое содержание)

Говорят что семейство F функций, зависящих от некоторого числа n параметров, является интерполяторным k-го порядка ($k \leq n$) в некотором промеждутке $[\alpha, \beta]$, если, каковы бы ни были различные узла $x_1, x_2, \ldots x_k$ расположенные в $[\alpha, \beta]$ и каковы бы ни были числа $y_1, y_2, \ldots y_k$, существует и притом единственная функция $f(x) \in F$, удовлетворяющая условиям $f(x_i) = y_i$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ т. е. кривая уравнения $y=f(x)$ проходит через точки $M_i(x_i, y_i)$, $(i=1, 2, \ldots, k)$.

В этой первой части нашей работы рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэфициентами третьего порядка и определяется, в зависимости от коэффициентов данного дифференциального уравнения, длина L максимального отрезка, в котором общее решение уравнения является интерполяторным порядка 3.

В связи с этим, предварительно устанавливается следующая.

Лемма. Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_{n-1}(x)$ система $n-1$ функций; допускающих непрерывные производные первого порядка в интервале (α, β). Если множество линейных комбинаций производных этих функций являются интерполяторным $n-1$-ого порядка в интервале (α, β)

тогда множество линейных комбинаций функций $1, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ является интерполяторным n-го порядка в замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$.

Следствие. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постояными коэффициентами, соответствующее характеристическое уравнение которого имеет корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Обозначим через $L(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ длину наибольшего интервала в котором общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения являтся интерполяторным n-го порядка.

Из приведенной леммы следует: если среди корней характеристического уравнения находится по крайне мере один действительный, например r_1, тогда имеет место неравенство

$$L(r_1, r_2, \ldots, r_n) \geqslant L(r_2, r_3, \ldots r_n).$$

Последовательно применяя полученное неравенство, приходим к хорошо известному свойству: если все корни характеристического уравнения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэфициентами порядка n — действительны, тогда общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения является интерполяторным n-го порядка на всей оси переменной x.

Рассматривается потом линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами 3-го порядка, характеристическое уравнение которого имеет один действительный корень и два комплексных (сопряженных) корня.

С помощью простой заменой переменной можно свести проблему определения соответствующего числа L к частному случаю, когда корни характеристического уравнения суть r (действительный) и $\pm i$.

С этой целью принимается во внимание тот факт, что определяемое число равно нижней границе разностей x_3-x_1, где $x_1 < x_2 < x_3$ суть три последовательных корня некоторого частного решения, причем нижняя граница берется по множеству всевозможных троек последовательных корней всех частных решений данного уравнения. Оказывается, что эта нижняя грань достигается на множестве троек корней, для которых два из них совпадают.

Этот результат позволяет эффективно вычислить число L. Для этой цели рассматриваются только интегральные кривые, которые касаются оси Ох. Общий вид их уравнения есть

$$y=A\,[e^{rx}-R\sin(x-\alpha)],$$

где

$$R=\sqrt{1+r^2}\,e^{rx_0}, \quad \alpha=x_0-\operatorname{arctg}\frac{1}{r}$$

В этих выражениях параметр A может принимать любые значения, а x_0 — абсцисса точки касания — тоже может быть выбрано произвольным.

Доказывается, что любая интегральная кривая, касающаяся к оси Ох, не может пересекать эту ось правее точки касания.

Пусть x_1 ближайший корень соответствующего решения, расположенный левее двойного корня x_0. Рассматривается разность x_0-x_1 и

исследуется ее минимум по отношению параметра x_0, причем эта разность не зависит от параметра A.

Показывается, что именно этот минимум представляет собой искомое число L, и, что это число есть действительный корень, принадлежащий интервалу $(\pi, 2\pi)$, следующего трансцендентного уравнения:

$$1+e^{rL}(r \sin L - \cos L)=0$$

В работе дается еще один путь исследования данной проблемы. Замечается, что число L есть верхняя грань множества положительных чисел λ имеющих свойство: каковы бы ни были узла $a<b<c$, удовлетворяющие условию $c-a<\lambda$, обобщенный определитель Вандермонда, соответствующий фундаментальной системе, отличен от нуля:

$$D=f_c(b)=\begin{vmatrix} e^{ra} & \cos a & \sin a \\ e^{rb} & \cos b & \sin b \\ e^{rc} & \cos c & \sin c \end{vmatrix} \neq 0.$$

Всегда можно считать $a=0$. И так, $0<b<c$.

Рассматривая этот определитеь как функцию от b, зависящей от параметра c показано, что если $c=L$, тогда соответствующая кривая уравнения $D=f_L(b)$ в интервале $(0, L)$ расположена строго над осью Ox и касается к оси Ox в точке $b=L$. Отсюда следует равенство

$$\left[\frac{b}{db} f_c(b)\right]_{b=L}=0,$$

которое дает вышеполученное уравнение. Следует еще, что интервал максимальной длины, в котором общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения является интерполярным 3-го порядка, можно рассмотреть как замкнутым в одном конце т. е. $[0, L)$ или, вообще, $[a, a+L)$ где a — любое вещественное число.

SUR UN PROBLÈME POLYLOCAL POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS (I)

(Résumé)

Une famille de fonctions F dépendant d'un nombre quelconque n de paramètres est interpolatrice de l'ordre k $(k \leqq n)$ dans un intervalle $[\alpha, \beta]$, si, quels que soient les noeuds distincts $x_1, x_2, \ldots, x_k$, situés dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et quels que soient les nombres $y_1, y_2, \ldots y_k$, il existe une fonction $f(x) \in F$ et une seule qui satisfasse aux conditions $f(x_i) = y_i$, $(i=1, 2, \ldots, k)$, c'est-à-dire que la courbe d'équation $y=f(x)$ passe par les points $M_i(x_i, y_i)$, $(i=1, 2, \ldots, k)$.

Dans cette première partie du travail on considère des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 3 et on détermine, en fonction des coefficients de l'équation différentielle, la longueur

L de l'intervalle maximum dans lequel l'intégrale générale de l'équation est interpolatrice d'ordre 3. A cet effet, on établit en premier lieu le lemme suivant.

L e m m e. *Soit $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ un système de $n-1$ fonctions admettant des dérivées du premier ordre continues dans l'intervalle ouvert (α, β). Si l'ensamble des combinaisons linéaires des dérivées de ces fonctions est interpolateur de l'ordre $n-1$ dans l'intervalle (α, β), alors l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $1, f_1(x), f_2(x), \ldots f_{n-1}(x)$ est interpolateur de l'ordre n dans l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$.*

Conséquence. Considérons une équation différentielle linéaire de l'ordre n, à coefficients constants, dont le polynôme caractéristique a les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

On marque par $L(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ la longueur de l'intervalle maximum dans lequel l'intégrale de l'équation différentielle considérée est interpolatrice de l'ordre n.

On déduit du lemme ci-dessus que:

Si parmi les racines du polynôme caractéristique de l'équation respective il y a au moins une racine réelle, par exemple r_1, alors on a l'inégalité.

$$L(r_1, r_2, \ldots, r_n) \geqq L(r_2, r_3, \ldots, r_n)$$

En appliquant successivement cette inégalité, on aboutit à la propriété connue, suivant laquelle: si le polynôme caractéristique d'une équation différentielle à coefficients constants de l'ordre n a toutes les racines réelles, alors l'intégrale générale de l'équation différentielle considérée est interpolatrice de l'ordre n sur tout l'axe de la variable x.

On considère ensuite les équations différentielles à coefficients constants d'ordre 3, dont le polynôme caractéristique a une racine réelle et deux complexes (conjuguées).

Au moyen d'un changement simple de variables, on peut réduire le problème de la détermination du nombre correspondant L au cas particulier, où les racines du polynôme caractéristique sont $r=0$ et $\pm i$.

A cet effet, on tient compte du fait que le nombre en question est égal à la marge inférieure des differences $x_3 - x_1$, où $x_1 < x_2 < x_3$ sont trois racines consécutives d'une integrale particulière quelconque, la marge inférieure étant prise sur l'ensemble de tous les groupes de trois racines consécutives et en considérant toutes les intégrales particulières de l'équation donnée.

On démontre que inférieure est atteinte sur l'ensemble des groupes cette marge où deux des trois racines sont confondues.

Ce résultat permet de faire le calcul effectif du nombre L. A cet effet, on considère seulement les courbes intégrales tangentes à l'axe Ox.

La forme générale de leur équation est

$$y=A(e^{rx}-R \sin(x-\alpha))$$

où

$$R=\sqrt{1+r^2}\, e^{rx_0}, \ \alpha=x_0 - \operatorname{arctg}\frac{1}{r}.$$

Dans ces expressions, le paramètre A peut avoir n'importe quelle valeur, et x_0 est l'abcisse du point de contact et peut être également choisi à volonté.

On montre que n'importe quelle courbe intégrale tangente à Ox n'intersecte plus cet axe à droite du point de contact.

Soit x_1 la racine de l'intégrale respective, immédiatement inférieure à sa racine double x_0. On considère la différence $x_0 - x_1$ et on recherche son minimum par rapport au paramètre x_0, cette diférence ne dépendant pas du paramètre A.

On montre que la valeur de ce minimum représente le nombre cherché L et, que ce nombre est la racine réelle, située dans l'intervale $(\pi, 2\pi)$ de l'equation transcendente:

$$1 + e^{rL}(r \sin L - \cos L) = 0 .$$

Ce travail indique aussi une autre voie d'étude de la question. On remarque que le nombre L est la marge supérieure de l'ensemble des nombres positifs λ ayant la propriété que, quels que soient les noeuds $a<b<c$ satisfaient à la condition $c - a < \lambda$, le déterminant de Vandermonde généralisé, correspondant à un système fondamental, est différent de zéro:

$$D = f_c(b) = \begin{vmatrix} e^{ra} & \cos a & \sin a \\ e^{rb} & \cos b & \sin b \\ e^{rc} & \cos c & \sin c \end{vmatrix} \neq 0.$$

On peut toujours supposer $a = 0$.

Donc, $0 < b < c$. Envisageant ce déterminant comme une fonction de b, dépendant du paramètre c, on montre que si $c = L$, la courbe correspondant à l'équation $D = f_L(b)$ est située dans l'intervalle $(0, L)$, strictement au-dessus de l'axe Ob, et est tangente à l'axe Ob au point $b = c$.

Il en résulte l'égalité

$$\left[\frac{d}{db} f_L(b)\right]_{b=L} = 0$$

qui donne l'équation obtenue ci-dessus.

Il en résulte aussi que l'intervalle de longueur maxima où l'intégrale générale de l'équation différentielle considérée est interpolatrice d'ordre 3 peut être considéré comme étant fermé à un des bouts, c'est-à-dire $[0, L)$, ou, plus généralement, $[a, a + L)$, a étant un nombre réel quelconque).