DESPRE CONTACTELE NOMOGRAMELOR CU TRANSPARENT

DE

FRANCISC RADÓ

Comunicare prezentată la sesiunea din 16—18 aprilie 1957 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

1. Nomograma cu transparent se compune dintr-un plan fix π şi unul mobil π' (transparentul), care se mişcă pe planul π. O condiţie geometrică care reduce cu o unitate numărul gradelor de libertate ale planului π' se numeşte *contact simplu*, iar una care reduce cu două unităţi numărul gradelor de libertate se numeşte *contact dublu*. În toate cazurile studiate intervine un singur tip de contact dublu : un punct P' din planul π' coincide cu un punct P din planul fix $P \models\!| \, P'$ şi două tipuri de contact simplu :

tip a : un punct P din planul π se află pe o curbă C' din planul π', $P \vdash\!\dashv C'$, sau invers ;

tip b : o curbă C' din planul π' este tangentă unei curbe C din planul π, $C \vdash\!\dashv C'$.

Punctele şi curbele date pot fi fixe sau pot face parte dintr-o familie de elemente cotate (scări, cîmpuri binare, respectiv familii de curbe). Astfel, un contact poate depinde de 0, 1, 2, 3 variabile. De exemplu, dacă un punct al unui cîmp binar al variabilelor z_1, z_2 din planul π se află pe o curbă din planul π' făcînd parte dintr-o familie de curbe depinzînd de z_3, $P_{12} \vdash\!\dashv C'_3$, atunci acest contact depinde de variabilele z_1, z_2, z_3. Poziţia planului π' faţă de planul π este determinată prin trei contacte simple sau printr-unul simplu şi unul dublu. Se introduce încă un contact simplu, numit contact de rezolvare, de exemplu $P_{ij} \rightarrow C'_k$; fiind date valorile variabilelor z_i şi z_j, punctul P_{ij} este determinat şi se poate citi cota z_k a curbei din familia C'_k care trece prin acest punct P_{ij}. Prin urmare dacă cunoaştem valorile variabilelor z_i, z_j şi ale celor care intervin în contactele de poziţie, atunci găsim o valoare pentru z_k. Astfel unei nomograme cu transparent îi corespunde o anumită relaţie între cel mult 12 variabile.

Să considerăm în planele π şi π' cîte un sistem de coordonate rectangulare xOy şi $x'O'y'$ şi fie α unghiul orientat dintre axele Ox, $O'x'$ iar a, b coordonatele lui O în sistemul $x'O'y'$. Atunci

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + a \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b. \end{cases} \tag{1}$$

Fie $P \vdash\!\dashv C'$ un contact simplu de tipul a, (x_0, y_0) coordonatele punctului P şi $F(x', y') = 0$ ecuaţia curbei C'. Atunci condiţia analitică a contactului $P \vdash\!\dashv C'$ se scrie astfel

$$F(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha + a, \; -x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha + b) = 0, \tag{2}$$

prin urmare o relaţie

$$\Phi(a, b, \alpha) = 0, \tag{3}$$

unde Φ este o funcţie de o anumită formă particulară.

Să stabilim acum forma analitică a unui contact de tip a, în care un punct din planul mobil este obligat să se afle pe o curbă din planul fix, $C \vdash\!\dashv P'$. Fie (x_1, y_1) coordonatele punctului P' şi $G(x, y) = 0$ ecuaţia curbei C. Coordonatele punctului P' în sistemul de coordonate din planul π sînt: $(x_1 - a) \cos \alpha - (y_1 - b) \sin \alpha$, $(x_1 - a) \sin \alpha + (y_1 - b) \cos \alpha$, deci avem

$$G[(x_1 - a) \cos \alpha - (y_1 - b) \sin \alpha, \; (x_1 - a) \sin \alpha + (y_1 - b) \cos \alpha] = 0, \tag{4}$$

un alt caz particular al relaţiei (3).

Dacă în contactul simplu intervin variabilele z_1, z_2, z_3, $P_{12} \vdash\!\dashv C_3'$, atunci coordonatele punctului P_{12} din cîmpul binar sînt

$$P_{12} \begin{cases} x = f_{12}(z_1, z_2) \\ y = g_{12}(z_1, z_2) \end{cases}$$

şi ecuaţia familiei de curbe C_3' este $F(x', y', z_3) = 0$. Condiţia analitică a contactului devine

$$F(f_{12} \cos \alpha + g_{12} \sin \alpha + a, -f_{12} \sin \alpha + g_{12} \cos \alpha + b, z_3) = 0,$$

prin urmare o relaţie de forma

$$\Phi\,(a, b, \alpha, z_1, z_2, z_3) = 0. \tag{5}$$

Se înţelege că dacă contactul depinde numai de două sau de o variabilă, atunci în (5) vor figura numai variabilele respective. Contactele de tip b conduc la relaţii analoage, contactele duble la două relaţii analoage.

Scriind relaţiile corespunzătoare tuturor contactelor monogramei, se găseşte un sistem de forma

$$\begin{cases} \Phi_1\,(a, b, \alpha, z_1, z_2, z_3) = 0 \\ \Phi_2\,(a, b, \alpha, z_4, z_5, z_6) = 0 \\ \Phi_3\,(a, b, \alpha, z_7, z_8, z_9) = 0 \\ \Phi_4\,(a, b, \alpha, z_{10}, z_{11}, z_{12}) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Eliminînd pe a, b, α din acest sistem, se obţine

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_{12}) = 0, \tag{7}$$

care este relaţia reprezentată de nomograma considerată.

Problema construirii unei nomograme ce reprezintă ecuaţia (7) revine la aflarea sistemului (6), în aşa fel ca eliminarea lui a, b, α să conducă la (7) şi în aşa fel ca funcţiile Φ_i să fie de forma particulară (5), respectiv cea corespunzătoare contactului de tip b, respectiv contactului dublu.

În cazul unui număr mai mic de variabile, de exemplu în cazul a patru variabile, funcţiile Φ_i vor depinde de mai puţine variabile, unele din ele putînd să nu depindă de z_i, să corespundă la contacte fixe.

Se poate admite şi cazul în care o variabilă z intervine în mai multe funcţii Φ_i; atunci avem o nomogramă cu variabile repetate. Variabila căutată nu se poate repeta.

2. Contactele întîlnite conduc la relaţii de forma (3), dar nu fiecărei relaţii de această formă îi corespunde un contact de tip a sau b. Într-adevăr relaţia (3) defineşte o mişcare a planului π' pe planul π depinzînd de doi parametri, ori într-o asemenea mişcare în general nu există un punct fix într-un plan care să fie mereu pe o anumită curbă fixă din celălalt plan şi nu există în cele două plane cîte o curbă care să fie în permanenţă tangente între ele.

Să găsim ce condiţie trebuie să îndeplinească funcţia $\Phi(a, b, \alpha)$ pentru ca (3) să definească un contact de tip a. Pentru aceasta, relaţia (3) o scriem sub formă rezolvată în raport cu b

$$b = \varphi(a, \alpha)$$

şi demonstrăm următoarea teoremă:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca relaţia $b = \varphi\,(a, \alpha)$ să definească un contact de tip a, este ca rangul uneia din următoarele două matrici să fie mai mic decît 3:

$$\begin{pmatrix} b_\alpha & -1 & b_a \\ b_{a\alpha} & 0 & b_{a^2} \\ b_{\alpha^2} & b_a & b_{a\alpha}+1 \\ b_{a^2\alpha} & 0 & b_{a^3} \\ b_{a\alpha^2} & b_{a^2} & b_{a^2\alpha} \\ b_{\alpha^2} & 2b_{a\alpha}+1 & b_{a\alpha^2}-b_a \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{pmatrix} 1 & b_a & a + b_\alpha \\ 0 & b_{a^2} & 1 + b_{a\alpha} + b_a^2 \\ 0 & b_{a\alpha} & b_{\alpha^2} + b_a b_\alpha \\ 0 & b_{a^3} & b_{a^2\alpha} + 3 b_a b_{a^2} \\ 0 & b_{a^2\alpha} & b_{a\alpha^2} + 2 b_a b_{a\alpha} + b_\alpha b_{a^2} \\ 0 & b_{a\alpha^2} & b_{\alpha^3} + b_a b_{\alpha^2} + 2 b_\alpha b_{a\alpha} \end{pmatrix}.$$

Condiţia este necesară. Presupunem întîi că un punct fix din planul π se află pe o curbă fixă din planul π', deci avem (2) sau

$$b = f(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha + a) + x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha.$$

Derivînd parţial în raport cu a şi α

$$b_a = f'(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha + a)$$
$$b_\alpha = f'(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha + a) . (-x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha) + x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha,$$

de unde deducem

$$b_\alpha = x_0(-b_a \sin \alpha + \cos \alpha) + y_0(b_a \cos \alpha + \sin \alpha);$$

deci funcţiile de variabile a şi α

$$b_\alpha,\ b_a \cos\alpha + \sin\alpha,\ \ -b_a \sin\alpha + \cos\alpha$$

sînt liniar dependente. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca trei funcţii de două variabile independente să fie liniar dependente se exprimă prin faptul că rangul matricei formate din aceste funcţii şi derivatele lor parţiale de ordinul întîi şi al doilea să fie cel mult doi. Deci rangul următoarei matrici este cel mult doi

$$\begin{pmatrix} b_\alpha & b_a\cos\alpha + \sin\alpha & -b_a\sin\alpha+\cos\alpha \\ b_{a\alpha} & b_{a^2}\cos\alpha & -b_{a^2}\sin\alpha \\ b_{\alpha^2} & b_{a\alpha}\cos\alpha - b_a\sin\alpha+\cos\alpha & -b_{a\alpha}\sin\alpha - b_a\cos\alpha - \sin\alpha \\ b_{a^2\alpha} & b_{a^3}\cos\alpha & -b_{a^3}\sin\alpha \\ b_{a\alpha^2} & b_{a^2\alpha}\cos\alpha - b_{a^2}\sin\alpha & -b_{a^2\alpha}\sin\alpha - b_{a^2}\cos\alpha \\ b_{\alpha^3} & b_{a\alpha^2}\cos\alpha - 2b_{a\alpha}\sin\alpha - b_a\cos\alpha - \sin\alpha & -b_{a\alpha^2}\sin\alpha - 2b_{a\alpha}\cos\alpha + b_a\sin\alpha - \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Înmulţind coloana a doua şi a treia cu $-\sin\alpha$, respectiv $-\cos\alpha$ şi adunînd aceste coloane, apoi cu $\cos\alpha$ şi $-\sin\alpha$ şi iarăşi adunîndu-le, nu schimbăm rangul matricei şi obţinem exact prima matrice din teorema enunţată.

Presupunem acum că un punct fix din planul π' se află pe o curbă fixă din planul π, deci (4). Derivînd parţial în raport cu a şi α, obţinem

$$G_u\cdot(-\cos\alpha + b_a\sin\alpha) + G_v\cdot(-\sin\alpha - b_a\cos\alpha) = 0$$

$$G_u\cdot[-(x_1-a)\sin\alpha - (y_1-b)\cos\alpha + b_\alpha\sin\alpha] + {}$$
$$+ G_v\cdot[(x_1-a)\cos\alpha - (y_1-b)\sin\alpha - b_\alpha\cos\alpha] = 0,$$

de unde deducem

$$\begin{vmatrix} -\cos\alpha + b\ \sin\alpha & -\sin\alpha - b\ \cos\alpha \\ -(x_1-a)\sin\alpha - (y_1-b)\cos\alpha + b_\alpha\sin\alpha & (x_1-a)\cos\alpha - (y_1-b)\sin\alpha - b_\alpha\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$a + b_\alpha + bb_a = x_1 + y_1 b_a.$$

Deci funcţiile $1,\ b_a,\ a+b_\alpha+bb_a$ sînt liniar dependente; rezultă că rangul matricei următoare este cel mult 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_a & a + b_\alpha + bb_a \\ 0 & b_{a^2} & 1 + b_{a\alpha} + b_a{}^2 + bb_{a^2} \\ 0 & b_{a\alpha} & b_{\alpha^2} + b_\alpha b_a + bb_{a\alpha} \\ 0 & b_{a^3} & b_{a^2\alpha} + 3b_a b_a{}^2 + bb_{a^3} \\ 0 & b_{a^2\alpha} & b_{a\alpha}{}^2 + 2b_a b_{a\alpha} + b_\alpha b_a{}^2 + bb_{a^2\alpha} \\ 0 & b_{a\alpha^2} & b_{\alpha^3} + b_{\alpha^2} b_\alpha + 2b_\alpha b_{a\alpha} + bb_{a\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Scăzînd din ultima coloană elementele coloanei a doua înmulţite cu b, obţinem matricea din teoremă.

Condiţia este suficientă. Să presupunem că pentru funcţia $b=\varphi(a,\alpha)$ prima matrice este de rang mai mic decît trei; atunci funcţiile

b_α, $b_a\cos\alpha+\sin\alpha$, $-b_a\sin\alpha+\cos\alpha$ sînt liniar dependente

$$Ab_\alpha + B(-b_a\sin\alpha + \cos\alpha) + C(b_a\cos\alpha + \sin\alpha) = 0.$$

Dacă $A=0$, atunci

$$b_a = \frac{C\sin\alpha + B\cos\alpha}{B\sin\alpha - C\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{B}{C}}{\operatorname{tg}\alpha\,.\,\dfrac{B}{C} - 1}$$

sau notînd $\dfrac{B}{C} = -\operatorname{tg} x_0$

$$b_a = -\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_0}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha_0} = -\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0),$$

de unde

$$b = -a\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) + b_0.$$

Avem forma (4); de altfel se verifică uşor că în acest caz punctul de coordonate $x'=0$, $y'=b_0$ din planul π' se află pe dreapta $y=\operatorname{tg}\alpha_0\cdot x$ din planul π, deci avem un contact de *tip a*.

Dacă $A\neq 0$, notăm $-\dfrac{B}{A} = x_0$ şi $-\dfrac{C}{A} = x$ şi avem

$$\frac{\partial b}{\partial\alpha} = (-x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha)\frac{\partial b}{\partial a} + x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha\,.$$

Introducem funcţia auxiliară

$$\Psi = b(a,\alpha) - x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha.$$

Atunci

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = \frac{\partial b}{\partial\alpha} - x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial a} = \frac{\partial b}{\partial a},$$

deci

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = (-x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha)\frac{\partial\Psi}{\partial a}\,.$$

Această ecuaţie cu derivate parţiale, omogenă de ordinul 1, admite ca soluţie particulară funcţia $x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha + a$, deci orice soluţie a ei este de forma

$$\Psi = f(x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha + a),$$

de unde

$$b = f(x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha + a) + x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha,$$

dacă iarăşi avem un contact de tip a.

Să admitem acum că pentru funcţia $b=\varphi(a,\alpha)$ matricea a doua are un rang mai mic decît 3. Urmează că funcţiile 1, b_a, $a+b_\alpha+bb_a$ sînt liniar dependente, deci

$$A(a + b_\alpha + bb_a) = B + Cb_a,$$

unde A, B, C sînt constante nu toate nule.

Dacă $A=0$, $b_a=-\frac{B}{C}=k$, $b=ka+b_0$. Originea planului π avînd coordonatele (a, b) în sistemul de coordonate din planul π', ea se află pe dreapta fixă $y'=kx'+b_0$. Avem un contact de tip a.

Dacă $A\neq 0$, notînd $x_1=\frac{B}{A}$, $y_1=\frac{C}{A}$, avem

$$\frac{\partial b}{\partial \alpha}=\frac{\partial b}{\partial a}(y_1-b)+(x_1-a).$$

Fie

$$V(a, \alpha, b)=0$$

o relație pe care b o satisface identic. Atunci

$$\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha}+\frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \alpha}=0$$

și

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}=\frac{\partial V}{\partial a}(y_1-b)-\frac{\partial V}{\partial b}(x_1-a).$$

Această ecuație cu derivate parțiale de ordin 1, liniară și omogenă, are integralele particulare

$$V_1=(x_1-a)\cos\alpha-(y_1-b)\sin\alpha,$$

$$V_2=(x_1-a)\sin\alpha+(y_1-b)\cos\alpha,$$

deci V este de forma $V=G(V_1, V_2)$. Rezultă că avem

$$G[(x_1-a)\cos\alpha-(y_1-b)\sin\alpha,\ (x_1-a)\sin\alpha+(y_1-b)\cos\alpha]=0,$$

unde G este o anumită funcție de două argumente. Am găsit relația (4), deci avem un contact de tip a și cu aceasta teorema este complet demonstrată.

3. Introducem un contact nou pe care să-l numim contact de *tip c*. Pentru aceasta să considerăm în planul π' o familie de curbe (necotate) F și în planul π un vector legat $\bar{v}$ cu punctul de aplicație în P (fig. 1). Contactul are loc dacă vectorul $\bar{v}$ este tangent la acea curbă a familiei F care trece prin P.

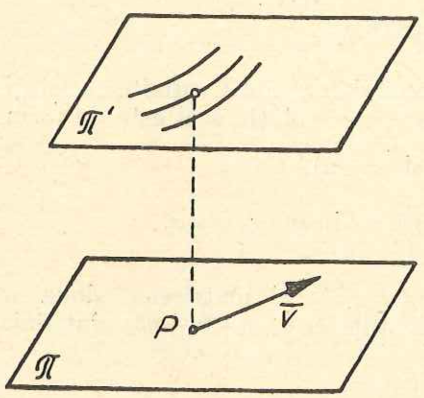

Fig. 1

Pentru a afla forma analitică a condiției între a, b, α, corespunzătoare contactului de tip c, să notăm cu (x_0, y_0) coordonatele punctului P, cu θ_0 unghiul format de Ox și $\bar{v}$, iar ecuația diferențială a familiei F cu

$$\frac{dy'}{dx'}=f(x', y').$$

Pentru unghiul θ' format de tangentă la curba familiei F, care trece prin P, cu axa $O'x'$, avem

$$\operatorname{tg}\theta'=f(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha+a,\ -x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha+b)$$

și ținînd seamă că

$$\theta_0=\theta'+\alpha,$$

obținem

$$\operatorname{tg}(\theta_0-\alpha)=f(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha+a,\ -x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha+b). \tag{8}$$

Contactul de tipul c este *general*, în sensul că fiind dată o relație oarecare

$$\Phi(a, b, \alpha)=0 \tag{3}$$

se poate întotdeauna determina în mod convenabil familia F și vectorul $\bar{v}$ astfel ca acest contact să conducă tocmai la relația dată (3). Într-adevăr, n-avem decît să alegem $x_0=y_0=0$, $\theta_0=0$; atunci relația (8) se scrie astfel

$$-\operatorname{tg}\alpha=f(a, b)$$

și f se determină rezolvînd (3) în raport cu α. Funcția f fiind determinată, și familia F este determinată.

Putem face ca și în contactul de tip c să intervină o variabilă sau două. Pentru a obține un contact cu o variabilă, considerăm în planul π o scară z și prin fiecare punct al scării o direcție dată (fig. 2), (în caz particular direcția dată poate fi înlocuită cu tangenta la suportul scării). Fiind dată o valoare a variabilei z, luăm ca punct de aplicație P punctul scării care corespunde cotei z, și vectorul $\bar{v}$ pe direcția ce trece prin acest punct. Ecuația corespunzătoare este

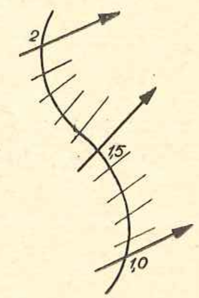

Fig. 2

$$\operatorname{tg}[\theta(z)-\alpha]=f[\varphi(z)\cos\alpha+\psi(z)\sin\alpha+a,-\varphi(z)\sin\alpha+\psi(z)\cos\alpha+b],$$

unde $x=\varphi(z)$, $y=\psi(z)$ sînt ecuațiile scării și $\theta(z)$ este o funcție determinată de direcțiile date. În cazul particular amintit (cînd pentru direcții se iau tangentele la suport), $\operatorname{tg}\theta(z)=\frac{\psi'(z)}{\varphi'(z)}$. Pentru a obține un contact cu două variabile, punctul P se ia într-un cîmp binar și vectorul $\bar{v}$ tangent la o familie de curbe G.

Se înțelege că contactele de tip c care conțin o variabilă sau două nu mai au caracter general deoarece o relație $\Phi(a, b, \alpha, z)=0$ între patru variabile în general nici nu se poate reprezenta cu familii de elemente geometrice plane cu un singur parametru, fiind o congruență de curbe. Totuși contactele de tip c și în acest caz sînt mai generale decît cele de tip a sau b.

4. Prin utilizarea contactului de tip c fix putem rezolva nomografic tipuri de ecuații cărora pînă în prezent nu li s-au găsit reprezentări nomografice.

Să considerăm nomograma cu formula de structură (fig. 3) :

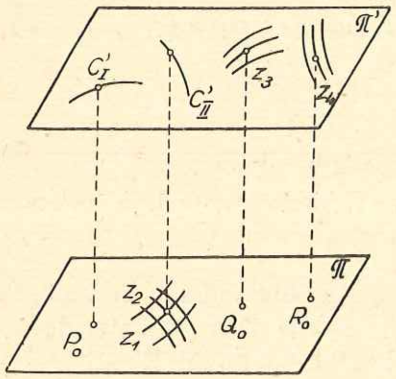

Fig. 3

$$P_0 \mathrel{H} C'_{I},\ P_{12} \mathrel{H} C'_{II},\ Q_0 \mathrel{H} C'_3,\ R_0\, C'_4.$$

Notînd $P_0(x_0, y_0)$, $Q_0(x_1, y_1)$, $R_0(x_2, y_2)$,

$$P_{12}\begin{cases} x = f_{12}(z_1, z_2) \\ y = g_{12}(z_1, z_2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} C'_{I}) & F_1(x', y') = 0 \\ C'_{II}) & F_2(x', y') = 0 \\ C'_3) & F_3(x', y', z_3) = 0 \\ C'_4) & F_4\,(x', y', z_4) = 0, \end{array}$$

obţinem următorul sistem :

$$\left.\begin{array}{ll} F_1(x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha + a, & -x_0 \sin\alpha + y_0 \cos\alpha + b) = 0 \\ F_2(f_{12} \cos\alpha + g_{12} \sin\alpha + a, & -f_{12} \sin\alpha + g_{12} \cos\alpha + b) = 0 \\ F_3(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha + a, & -x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + b, z_3) = 0 \\ F_4(x_2 \cos\alpha + y_2 \sin\alpha + a, & -x_2 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha + b, z_4) = 0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

Rezolvînd sistemul format din ecuaţia întîia, a treia şi a patra în raport cu a, b, α, obţinem

$$\begin{aligned} a &= \varphi(z_3, z_4) = \varphi_{34} \\ b &= \psi(z_3, z_4) = \psi_{34} \\ \alpha &= \alpha(z_3, z_4) = \alpha_{34} \end{aligned}$$

şi înlocuind în ecuaţia a doua

$$F(f_{12} \cos\alpha_{34} + g_{12} \sin\alpha_{34} + \varphi_{34},\ -f_{12} \sin\alpha_{34} + g_{12} \cos\alpha_{34} + \psi_{34}) = 0 \quad (10)$$

(am scris F în loc de F_2).

Să vedem acum dacă orice ecuaţie de forma (10) se poate rezolva prin nomograma din fig. 3.

Pentru aceasta presupunem că relaţia (10) este dată şi căutăm sistemul (9). Înlocuim ecuaţia (10) prin sistemul

$$\left.\begin{aligned} F(f_{12} \cos\alpha + g_{12} \sin\alpha + a,\ -f_{12} \sin\alpha + g_{12} \cos\alpha + b) &= 0 \\ A &= \varphi_{34}(z_3, z_4) \\ b &= \psi_{34}(z_3, z_4) \\ \alpha &= \alpha_{34}(z_3, z_4). \end{aligned}\right. \quad (11)$$

Prin eliminarea lui z_4 se obţin două relaţii între a, b, α şi z_3

$$\Phi_1(a, b, \alpha, z_3) = 0, \qquad \Phi_2(a, b, \alpha, z_3) = 0 \quad (12)$$

şi putem alege (chiar într-o infinitate de feluri) constantele x_1, y_1 şi funcţia de trei argumente F_3, astfel ca din ecuaţiile (12) să rezulte

$$F_3(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha + a,\ -x_1 \sin\alpha + \cos\alpha + b, z_3) = 0. \quad (13)$$

Pentru aceasta, $\Phi(a, b, z_3) = 0$ fiind rezultatul eliminării lui α din (12), luăm de exemplu $x_1 = y_1 = 0$ şi $F_3 \equiv \Phi$. Putem raţiona şi geometric : fiind fixat z_3, a, b şi α depind de un singur parametru, de z_4, deci pentru z_3 fixat planul π' are un grad de libertate şi deci un punct fixat în planul π va descrie o curbă în planul π' ; făcînd să varieze z_3, obţinem o familie de curbe în planul π'. Luînd pentru (x_1, y_1) coordonatele punctului ales în planul π şi pentru $F_3 = 0$ ecuaţia familiei obţinute, regăsim ecuaţia (13). La fel, eliminînd z_3 din (11) obţinem ultima ecuaţie a sistemului (9).

Problema revine deci la determinarea primei ecuaţii din sistemul (9). Eliminînd z_3 şi z_4 din (11), se obţine o relaţie

$$\Psi\,(a, b, \alpha) = 0. \quad (14)$$

Ecuaţia dată (10) se poate rezolva cu nomograma din fig. 3 numai dacă ecuaţia (14) se poate pune sub forma primei ecuaţii din (9), ceea ce am văzut că în general nu se poate (lucru posibil numai în condiţiile teoremei de la nr. 2).

Prin urmare, nomograma considerată rezolvă numai anumite cazuri particulare ale ecuaţiei (10).

Dacă însă înlocuim contactul $P_0 \mathrel{H} C'$ printr-un contact de tip c, atunci oricare ar fi funcţia Ψ, acest contact se poate determina convenabil şi *deci orice ecuaţie* (10) *devine reprezentabilă prin această nomogramă.*

Academia R.P.R.— Filiala Cluj
Institutul de calcul

О контактах номограмм с транспарантом

(Краткое содержание)

Пусть π фиксированная плоскость и π' переменная плоскость для некоторой номограммы с транспарантом. Контакт $P \mathrel{H} C'$ (точка P из плоскости π находится на кривой C' плоскости π'), и контакт $C \mathrel{H} P'$ называются контактами типа a, а контакт $C \mathrel{H} C'$ (кривые С и С' из этих двух плоскостей касаются) называется контактом типа b. Эти два типа простых контактов использованы для номограмм с транспарантом.

Рассматриваются системы прямоугольных координат xOy и $x'O'y'$ в плоскостях π и π' и обозначим через α ориентированный угол между осями Ox и $O'x'$, и через (a, b) координаты точки O в системе $O'x'y'$ Некоторому (фиксированному) простому контакту соответствует соотношение:

$$b = \varphi(a, \alpha).$$

Соотношение, соответственное некоторому контакту типа a есть (2) или (4). Контакт типа b ведёт тоже к некоторому частному случаю функции φ.

В работе доказывается: необходимое и достаточное условие, чтобы соотношение $b=\varphi(a, \alpha)$ определяло контакт типа a состоит в том, чтобы ранг одной из матриц (8) был меньше 3.

Автор выводит новый контакт, названный им контактом типа c: вектор $\bar{v}$ плоскость π с точкой приложения в P заставляем быть касательным к той кривой, данного семейства кривых из плоскости π', которая проходит через P (черт. 1). Фиксированный контакт типа c является общим в том смысле, что, задавая некоторое соотношение $b=\varphi(a, \alpha)$, можно всегда определить вектор $\bar{v}$ и семейство кривых, так, чтобы этот контакт вёл именно к данному соотношению.

Пример из черт. 3 показывает что использованием контакта типа c, мы можем номографически решить некоторые уравнения, номографическое представление которых до сих пор неизвестно. В самом деле, номограмма из черт. 3 решает некоторый подкласс уравнений (10); если мы заменяем фиксированный контакт $P_0 \vdash\!\dashv C_1'$ через другой контакт типа c, и тогда любое уравнение (10) представимо посредством этой номограммы.

Контакт типа c можно распространить и для переменных контактов.

Sur les contacts des nomogrammes à transparent

(Résumé)

Soient π le plan fixe et π' le plan variable d'un nomogramme à transparent. Le contact $P \vdash\!\dashv C'$ (le point P du plan π se trouve sur la courbe C' du plan π') et le contact $C \vdash\!\dashv P'$ sont nommés des contacts du type a et le contact $C \vdash\!\dashv C'$ (les courbes C et C' des deux plans sont tangentes) est nommé contact du type b. Ces deux types de contacts simples sont utilisés au cas des nomogrammes à transparent.

On considère les systèmes de coordonnées rectangulaires xOy et $x'O'y'$ dans les plans π et π' et on note par α l'angle orienté entre les axes Ox et $O'x'$ et par (a,b) les coordonnées du point O dans le système $x'O'y'$. A un contact (fixe) simple correspond une relation

$$b = \varphi(a,\alpha).$$

La relation correspondant à un contact du type a est (2) ou (4). Un contact du type b conduit de même à un cas particulier de la fonction φ.

On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que la relation $b = \varphi(a,\alpha)$ définisse un contact du type a est que le rang de l'une des deux matrices (8) soit plus petit que 3.

L'auteur introduit un nouveau contact qu'il nomme du type c: un vecteur $\bar{v}$ du plan π avec le point d'application P doit être tangent à la courbe d'une famille de courbes donnée dans le plan π', qui passe par P (fig. 1).

Le contact du type c est général dans ce sens que, étant donnée une relation quelconque $b = \varphi(a,\alpha)$, on peut toujours déterminer le vecteur $\bar{v}$ et la famille de courbes, de manière que ce contact conduise justement à la relation donnée.

L'exemple de la fig. 3 montre que par l'emploi du contact du type c on peut résoudre nomographiquement certaines équations pour lesquelles on ne connaissait jusqu'à présent aucune représentation nomographique. En effet, le nomogramme de la fig. 3 résout une sous-classe des équations (10); mais si l'on remplace le contact fixe $P_0 \vdash\!\dashv C_1'$ par un contact du type c, alors n'importe quelle équation (10) devient représentable par le même nomogramme.

Le contact du type c peut être étendu aussi aux contacts variables.