

ASUPRA CRONOSECȚIUNII MAXIME

DE

L. NÉMÉTI

(Cluj)

Lucrare prezentată în ședința de comunicări a Institutului de calcul din 13 iulie 1961, Cluj.

1. Formularea fizică a problemei

La motoarele cu combustiune internă, se caută acea mișcare a supapei de admisie care să asigure un randament volumetric cît mai mare. Aici se consideră ca date dimensiunile și formele geometrice ale canalului de admisie, ale supapei și ale cilindrului.

Mișcarea supapei este comandată printr-un mecanism cu came, care în cazul considerat poate fi înlocuit, cu suficientă precizie, cu un mecanism cu camă, simplu, cu tachet (figura 1).

Să presupunem că această camă se rotește uniform; unghiul în interiorul căruia supapa este ridicată, este dat (θ_0); de asemenea este dată cursa maximă a supapei (H); în vederea asigurării închiderii sigure a ventilului, este dat un joc (δ) în mecanism; de asemenea mișcarea de ridicare începe cu o viteză inițială ε_A și închiderea se face cu o viteză finală ε_D , diferită de zero.

Diagrama mișcării supapei în funcție de unghiul de rotație este dată în figura 2.

Ridicarea supapei începe înaintea punctului mort superior ϑ_0 al pistonului; intervalul $(0, \vartheta_0)$ este folosit pentru egalarea presiunilor externe și interne.

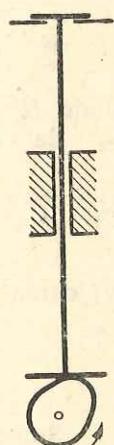


Fig. 1

Celelalte condiții fiind considerate ca neschimbate, randamentul volumetric este o funcție de cronosecțiunea utilă, adică de suprafața $AEBCDA$.

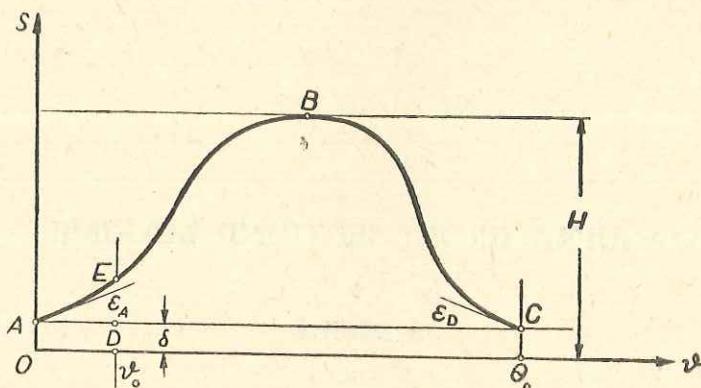


Fig. 2

Mai rămîne o condiție importantă de verificat, anume ca accelerarea supapei să rămînă cuprinsă între anumite limite date.

2. Formularea matematică a problemei

Fie $\{s(x)\}$ clasa de funcții definite pe intervalul $[0, \theta_0]$, nenegative și de două ori derivabile (pentru derivata a două se cere doar continuitatea pe porțiuni), satisfăcînd condițiile

$$\left. \begin{array}{l} \delta \leq s(x) \leq H, \\ s(0) = \delta > 0; s'(0) = \varepsilon_A, \\ s(\theta_0) = \delta; s'(\theta_0) = -\varepsilon_D, \\ -b \leq s''(x) \leq a, \end{array} \right\} \quad (1)$$

unde $H, \delta, \varepsilon_A, \varepsilon_D, a, b$ sunt constante pozitive date.

Se caută acea funcție $s(x)$ care face maximă integrala

$$C = \int_0^{\theta_0} [s(x) - \delta] dx. \quad (2)$$

Valoarea acestei integrale poartă denumirea de cronosecțiune.

3. Soluția problemei în formularea sa matematică

Soluția este realizată printr-o funcție $s(x)$ a cărei derivată a două atinge efectiv marginile presciise și care are, pe porțiuni, valori constante, a respectiv b . Demonstrația acestei afirmații se va da ulterior. Sunt

posibile două cazuri, în funcție de valorile constanțelor date $H, \theta_0, \delta, \varepsilon_A, \varepsilon_D, a$ și b .

Cazul 1. Diagrama accelerărilor și a vitezelor este reprezentată în figura 3.

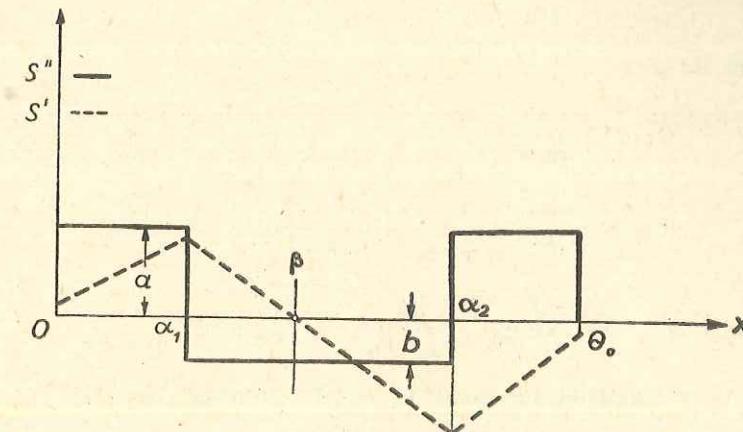


Fig. 3

Din această figură rezultă mărimea $s''(x)$ pentru diferitele subintervale precum urmează :

Pentru $x \in [0, \alpha_1]$ avem

$$\left. \begin{array}{l} s''(x) = a, s'(x) = ax + \varepsilon_A, \\ s(x) = \frac{a}{2} x^2 + \varepsilon_A x + \delta. \end{array} \right\} \quad (3')$$

Pentru $x \in [\alpha_1, \alpha_2]$ avem

$$\left. \begin{array}{l} s''(x) = -b, s'(x) = a\alpha_1 + \varepsilon_A - b(x - \alpha_1), \\ s(x) = \frac{a}{2} \alpha_1^2 + \varepsilon_A \alpha_1 + \delta + (a\alpha_1 + \varepsilon_A)(x - \alpha_1) - \\ - \frac{b}{2} (x - \alpha_1)^2. \end{array} \right\} \quad (3'')$$

Dacă $x = \beta = \frac{(a+b)\alpha_1 + \varepsilon_A}{b}$, atunci $s' = 0$ și $s = s_{max}$.

Pentru $x \in [\alpha_2, \theta_0]$ avem

$$\left. \begin{array}{l} s''(x) = a, s'(x) = a\alpha_1 + \varepsilon_A - b(\alpha_2 - \alpha_1) + a(x - \alpha_2), \\ s(x) = \frac{a}{2} \alpha_1^2 + \varepsilon_A \alpha_1 + \delta + (a\alpha_1 + \varepsilon_A)(\alpha_2 - \alpha_1) - \\ - \frac{b}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 + [a\alpha_1 + \varepsilon_A - b(\alpha_2 - \alpha_1)](x - \alpha_2) + \frac{a}{2} (x - \alpha_2)^2. \end{array} \right\} \quad (3''')$$

Constantele de integrare s-au stabilit astfel încât să fie asigurată continuitatea funcțiilor $s'(x)$ și $s(x)$.

Unghiurile α_1 și α_2 se calculează din relațiile (3'') cu ajutorul condițiilor

$$s(\theta_0) = \delta, \quad s'(\theta_0) = -\varepsilon_D.$$

Găsim de aici

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 &= \left(\frac{a\theta_0 + 2\varepsilon_D}{a\theta_0 + \varepsilon_A + \varepsilon_D} - \frac{a}{a+b} \right) \theta_0 - \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_D}{a+b}, \\ 2\alpha_2 &= \left(\frac{a\theta_0 + 2\varepsilon_D}{a\theta_0 + \varepsilon_A + \varepsilon_D} + \frac{a}{a+b} \right) \theta_0 + \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_D}{a+b}, \\ 2(\theta_0 - \alpha_2) &= \left(\frac{a\theta_0 + 2\varepsilon_A}{a\theta_0 + \varepsilon_A + \varepsilon_D} - \frac{a}{a+b} \right) \theta_0 - \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_D}{a+b}. \end{aligned} \quad (4)$$

Pentru a ne situa în cazul 1, scriem condiția din (1)

$$s_{\max} \leq H.$$

Făcând în formula (3'') înlocuirile $s = H$, $x = \beta$ și ținând seama de valoarea lui α_1 din (4), găsim după cîteva transformări, pentru condiția de valabilitate a cazului 1, inegalitatea

$$(a\theta_0 + \varepsilon_A + \varepsilon_D) \sqrt{\frac{b}{a+b}} \leq \sqrt{2a(H-\delta) + \varepsilon_A^2} + \sqrt{2a(H-\delta) + \varepsilon_D^2}. \quad (5)$$

Cazul 2. Diagrama accelerărilor este reprezentată în figura 4.

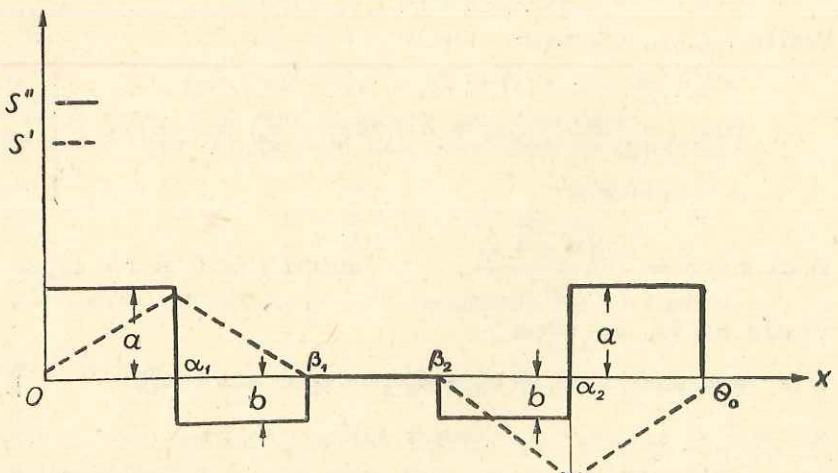


Fig. 4

Ținând seamă de această figură, se obține mărimea $s''(x)$ și în consecință mărimele $s'(x)$ și $s(x)$ pentru diferitele subintervale, precum urmează:

Pentru $x \in [0, \alpha_1]$, avem

$$\left. \begin{aligned} s''(x) &= a, & s'(x) &= ax + \varepsilon_A, \\ s(x) &= \frac{a}{2}x^2 + \varepsilon_Ax + \delta \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

Pentru $x \in [\alpha_1, \beta_1]$ avem

$$\left. \begin{aligned} s''(x) &= -b, & s'(x) &= a\alpha_1 + \varepsilon_A - b(x - \alpha_1), \\ s(x) &= \frac{\varepsilon}{2}\alpha_1^2 + \varepsilon_A\alpha_1 + \delta + (a\alpha_1 + \varepsilon_A)(x - \alpha_1) - \frac{b}{2}(x - \alpha_1)^2. \end{aligned} \right\} \quad (6'')$$

Pentru $x \in [\beta_1, \beta_2]$, avem

$$s''(x) = 0, \quad s'(x) = 0; \quad s(x) = H. \quad (6''')$$

Pentru $x \in [\beta_2, \alpha_2]$, avem

$$\left. \begin{aligned} s''(x) &= -b, & s'(x) &= -a(\theta_0 - \alpha_2) - \varepsilon_D + b(\alpha_2 - x), \\ s(x) &= \frac{a}{2}(\theta_0 - \alpha_2)^2 + \varepsilon_D(\theta_0 - \alpha_2) + \delta + \\ &+ [a(\theta_0 - \alpha_2) + \varepsilon_D](\alpha_2 - x) - \frac{b}{2}(\alpha_2 - x)^2. \end{aligned} \right\} \quad (6^{IV})$$

Pentru $x \in [\alpha_2, \theta_0]$, avem

$$\left. \begin{aligned} s''(x) &= a, & s'(x) &= -a(\theta_0 - x) - \varepsilon_D, \\ s(x) &= \frac{a}{2}(\theta_0 - x)^2 + \varepsilon_D(\theta_0 - x) + \delta. \end{aligned} \right\} \quad (6^V)$$

Unghiurile $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ se calculează din relația (6''), folosind condițiile

$$s(\beta_1) = H, \quad s'(\beta_1) = 0,$$

precum și din relația (6^{IV}), folosind condițiile

$$s(\beta_2) = H, \quad s'(\beta_2) = 0.$$

Găsim

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\frac{b}{a(a+b)} \left[2(H-\delta) + \frac{\varepsilon_A^2}{a} \right]} - \frac{\varepsilon_A}{a}, \\ \beta_1 &= \sqrt{\frac{a+b}{ab} \left[2(H-\delta) + \frac{\varepsilon_A^2}{a} \right]} - \frac{\varepsilon_A}{a} = \frac{a+b}{b} \alpha_1 + \frac{\varepsilon_A}{b}, \\ \theta_0 - \alpha_2 &= \sqrt{\frac{b}{a(a+b)} \left[2(H-\delta) + \frac{\varepsilon_D^2}{a} \right]} - \frac{\varepsilon_D}{a}, \\ \theta_0 - \beta_2 &= \sqrt{\frac{a+b}{ab} \left[2(H-\delta) + \frac{\varepsilon_D^2}{a} \right]} - \frac{\varepsilon_D}{a} = \frac{a+b}{b} (\theta_0 - \alpha_2) + \frac{\varepsilon_D}{b}, \end{aligned} \quad (7)$$

Pentru a ne situa în cazul 2, punem condiția $\beta_2 \geq \beta_1$ și, ținând seama de (7), obținem

$$(a\theta_0 + \varepsilon_A + \varepsilon_D) \sqrt{\frac{b}{a+b}} \geq \sqrt{2a(H-\delta)} + \varepsilon_A^2 + \sqrt{2a(H-\delta)} + \varepsilon_D^2 \quad (8)$$

Cu aceste precizări are loc următoarea teoremă :

TEOREMĂ Funcția $s(x)$ definită pentru cazul 1, respectiv cazul 2, realizează un maxim pentru integrala (2).

Demonstrație. Vom arăta că pentru orice altă funcție $\bar{s}(x) \equiv s(x)$, unde $\bar{s}(x) \in \{s(x)\}$, avem $\bar{s}(x) \leq s(x)$ pentru $x \in [0, \theta_0]$. Dacă această afirmație ar fi adevărată, atunci am avea

$$C - \bar{C} = \int_0^{\theta_0} [s(x) - \bar{s}(x)] dx \geq 0,$$

de unde ar rezulta afirmația teoremei.

Cazul 1. Considerăm intervalul $[0, \alpha_1]$. În acest interval avem

$$s''(x) = a; \quad \bar{s}''(x) \leq a,$$

$$s'(x) = s'(0) + \int_0^x s''(u) du = \varepsilon_A + \int_0^x s''(u) du,$$

$$\bar{s}'(x) = \varepsilon_A + \int_0^x \bar{s}''(u) du,$$

$$\bar{s}'(x) - s'(x) = \int_0^x [\bar{s}''(u) - s''(u)] du \geq 0,$$

$$s(x) = \delta + \int_0^x s'(u) du; \quad \bar{s}(x) = \delta + \int_0^x \bar{s}'(u) du,$$

$$\bar{s}(x) - s(x) = \int_0^x [\bar{s}'(u) - s'(u)] du \geq 0.$$

Rezumind, avem în intervalul $[0, \alpha_1]$ inegalitățile

$$s''(x) > \bar{s}''(x), \quad s'(x) \geq \bar{s}'(x), \quad s(x) \geq \bar{s}(x). \quad (9)$$

Considerăm acum intervalul $[\alpha_2, \theta_0]$. Procedind ca mai sus și pornind de la capătul drept al intervalului, obținem

$$s''(x) \geq \bar{s}''(x), \quad s'(x) \leq \bar{s}'(x), \quad s(x) \leq \bar{s}(x). \quad (10)$$

În intervalul $[\alpha_1, \alpha_2]$ avem

$$s''(x) = -b; \quad \bar{s}''(x) \geq -b, \quad \text{deci } s''(x) - \bar{s}''(x) \leq 0.$$

De aici, în baza celei de a doua relații din (9), se obține

$$s'(\alpha_1) \geq \bar{s}'(\alpha_1)$$

iar apoi din (10),

$$s'(\alpha_2) \leq \bar{s}'(\alpha_2).$$

Prin urmare, ecuația $s'(x) - \bar{s}'(x) = 0$ are în intervalul considerat cel puțin o rădăcină γ . Pe de altă parte se constată îndată că ea are cel mult o rădăcină în acest interval, întrucât avem inegalitatea $s''(x) - \bar{s}''(x) \leq 0$, ceea ce ne arată că funcția $s'(x) - \bar{s}'(x)$ este necrescătoare în intervalul $[\alpha_1, \alpha_2]$. Rezultă de aici că în intervalul $[\alpha_1, \gamma]$ are loc inegalitatea $s'(x) - \bar{s}'(x) \geq 0$, ea fiind deci valabilă în întreg intervalul $[0, \gamma]$.

Ținând seama că

$$s(x) = \delta + \int_0^x s'(u) du,$$

$$\bar{s}(x) = \delta + \int_0^x \bar{s}'(u) du,$$

va rezulta din inegalitatea precedentă relația

$$s(x) - \bar{s}(x) = \int_0^x [s'(u) - \bar{s}'(u)] du \geq 0. \quad (11)$$

În intervalul $[\gamma, \alpha_2]$ avem $s'(x) - \bar{s}'(x) \leq 0$, această inegalitate fiind deci valabilă în întreg intervalul $[\gamma, \theta_0]$. Ținând seama că

$$s(x) = \delta - \int_x^{\theta_0} s'(u) du,$$

$$\bar{s}(x) = \delta - \int_x^{\theta_0} \bar{s}'(u) du,$$

va rezulta din inegalitatea de mai sus relația

$$s(x) - \bar{s}(x) = \int_x^{\theta_0} [\bar{s}'(u) - s'(u)] du \geq 0. \quad (12)$$

Cu aceasta, teorema este demonstrată în cazul 1.

Cazul 2. În intervalul $[\beta_1, \beta_2]$ avem $s(x) = H$, deci $s(x) - \bar{s}(x) \geq 0$.

În intervalul $[0, \alpha_1]$ și $[\alpha_2, \theta_0]$ teorema se demonstrează exact la fel ca și în cazul 1.

În intervalul $[\alpha_1, \beta_1]$ avem de distins două subcazuri

- a) $\bar{s}'(\beta_1) \geq 0$,
- b) $\bar{s}'(\beta_1) < 0$.

Existența și unicitatea rădăcinii γ_1 a ecuației $s'(x) - \bar{s}'(x) = 0$ se demonstrează în cazul a) întocmai ca în cazul 1. Se arată (întocmai ca în cazul 1) că în subintervalul $[\alpha_0, \gamma_1]$ avem $s'(x) - \bar{s}'(x) \geq 0$ și deci

$$s(x) - \bar{s}(x) \geq 0, \quad (13)$$

iar în subintervalul $[\gamma_1, \beta_1]$ avem

$$s'(x) - \bar{s}'(x) \leq 0. \quad (14)$$

Tinând seama că

$$\begin{aligned} s(x) &= H - \int_x^{\beta_1} s'(u) du, \\ \bar{s}(x) &= \bar{s}(\beta_1) - \int_x^{\beta_1} \bar{s}'(u) du, \end{aligned}$$

din (14) rezultă

$$s(x) - \bar{s}(x) = [H - \bar{s}(\beta_1)] + \int_x^{\beta_1} [\bar{s}'(u) - s'(u)] du \geq 0, \quad (15)$$

ambii termeni fiind nenegativi.

În cazul b) avem $s'(\alpha_1) > \bar{s}'(\alpha_1)$ și $s'(\beta_1) > \bar{s}'(\beta_1)$.

Întrucât în intervalul $[\alpha_1, \beta_1]$, funcția $s'(x) - \bar{s}'(x)$ este necrescătoare, rezultă că ea nu are în acest interval nici o rădăcină. Rezultă de aici că au loc în întreg intervalul $[0, \beta_1]$ relațiile

$$s'(x) \geq \bar{s}'(x), \quad s(x) \geq \bar{s}(x). \quad (16)$$

Folosind un raționament analog cu cel de mai sus, se ajunge la o concluzie analoagă și în cazul intervalului $[\beta_2, \alpha_2]$.

Cu aceasta, teorema este demonstrată și în cazul 2.

4. O generalizare a problemei

Problema aflării cronosecțiunii maxime în sensul formulei (2) ne conduce la următoarea generalizare:

Numim *cronosecțiune generalizată* valoarea integralei

$$C^* = \int_0^{\theta_0} s(x) q(s, x) dx,$$

unde $q(s, x)$ este o funcție nenegativă, satisfăcînd inegalitatea $\frac{\partial q}{\partial s} \geq 0$ în intervalul de variație a variabilei s .

În cele ce urmează vom arăta că funcția $s(x)$ construită la punctul precedent realizează un maxim și pentru integrala C^* .

Într-adevăr, fie $\bar{s}(x)$ o altă funcție din clasa $\{s(x)\}$. Evident că $s(x) \geq \bar{s}(x) \geq 0$. Avem

$$\bar{C}^* = \int_0^{\theta_0} \bar{s}(x) q(\bar{s}, x) dx \leq \bar{C}^* = \int_0^{\theta_0} \bar{s}(x) q(s, x) dx,$$

$$C^* - \bar{C}^* = \int_0^{\theta_0} [s(x) - \bar{s}(x)] q(s, x) dx \geq 0,$$

deci $\bar{C}^* \leq C^*$.

Acest rezultat are următoarea interpretare importantă:
Volumul de amestec aspirat se exprimă prin formula

$$V = \int_0^{\theta_0} F[s(x)] v(x, s) dx,$$

unde mărimea $F(s)$ este proporțională cu s iar viteza v este funcție de depresiunea în cilindru (funcție de timpul x) și de coeficientul de contracție care depinde de s și care este o funcție crescătoare de acest parametru. Rezultă de aici că numărul C^* este proporțional cu V . Singurul efect de care nu s-a ținut seama este fenomenul de oscilație a coloanei de gaz, pentru care v , respectiv q , pot fi eventual negative.

5. Forma camei

Forma camei este reprezentată în figura 5.

În această figură s-au utilizat următoarele notații:

O : centrul de rotație,

C : centrul de curbură,

ϑ : unghiul de rotație,

$CP = \rho$ raza de curbură,

$OP = r$,

$NP = z$,

$ON = q$,

$CN = u$,

r_0 : raza cercului de bază (unde supapa este închisă). Cu aceste notări vom arăta că au loc următoarele relații:

$$s = z - r_0; \quad s' = q, \quad s'' = u. \quad (17)$$

Într-adevăr, ținând seama de figura 6, avem

$$\begin{aligned} CP &= \rho, \\ PR &= dS = \rho d\vartheta, \\ PQ &= rd\phi, \\ QR &= dr. \end{aligned}$$

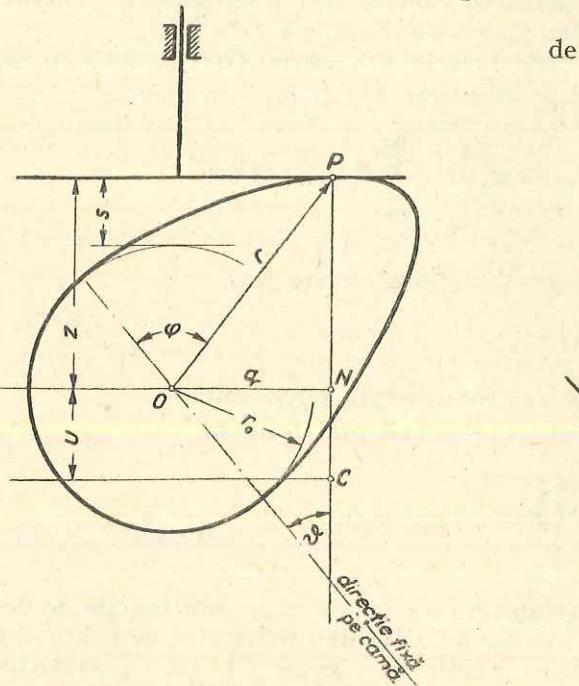


Fig. 5

Apoi

$$\varphi = \vartheta + \psi, \quad d\varphi = d\vartheta + d\psi,$$

$$\frac{rd\varphi}{dS} = \frac{r(d\vartheta + d\psi)}{\rho d\vartheta} = \cos \psi,$$

$$\frac{dr}{\rho d\vartheta} = \sin \psi.$$

De aici se obține

$$dr = \rho \sin \psi d\vartheta, \quad d\psi = \left(\frac{\rho}{r} \cos \varphi - 1 \right) d\vartheta.$$

Dar

$$z = r \cos \psi, \quad dz = dr \cos \psi - r d\psi \sin \psi = r \sin \psi d\vartheta.$$

Deci

$$z' = \frac{dz}{d\vartheta} = r \sin \psi = q,$$

$$dq = dr \sin \psi + r d\psi \cos \psi = (\rho - r \cos \psi) d\vartheta = (\rho - z) d\vartheta,$$

$$z'' = \frac{dq}{d\vartheta} = \rho - z = u.$$

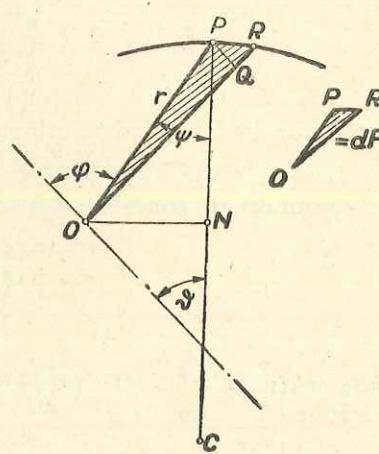


Fig. 6

Utilizăm notația

$$K = \int_0^{\theta_0} z d\vartheta.$$

Mărimea K putem să o numim cronosecțiunea raportată la axa de rotație și ea este legată de cronosecțiunea C prin relația

$$K = C + (r_0 + \delta) \theta_0.$$

Obținem

$$dK = zd\delta = r \cos \psi d\vartheta = \frac{r^2 d\varphi}{\rho} = \frac{2}{\rho} dF. \quad (18)$$

Profilul camei constă din mai multe arce de curbă, pentru fiecare din ele avînd loc o relație de forma $s'' = \text{const.}$

Ne propunem acum să aflăm curba care are proprietatea că $u = \text{const.}$ Evoluta acestei curbe va avea normala situată la o distanță constantă de centrul O . Această curbă este deci o evolventă de cerc. Profilul camei se compune deci din arce de curbă care sunt evolvente ale unor evolvente de cerc.

Dacă se prescrie ca pentru o porțiune să avem $s'' = a$ iar pentru alta $s'' = -b$, atunci cama va avea înfățișarea din figura 7.

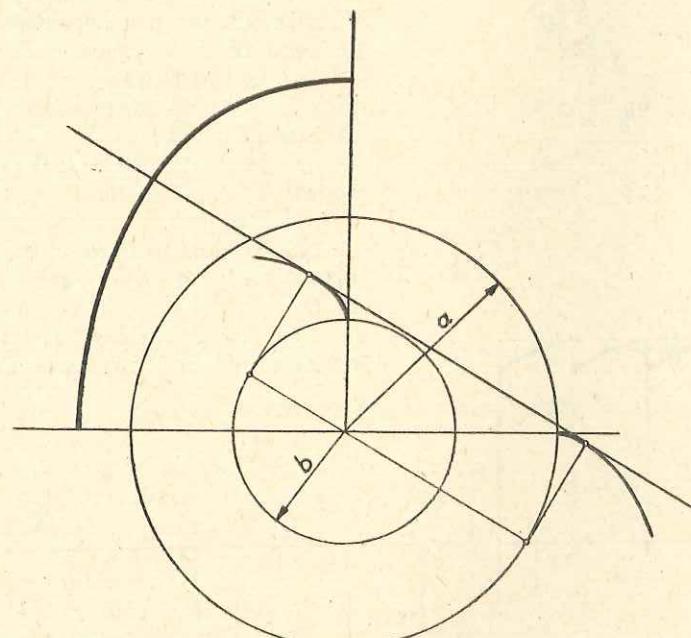


Fig. 7

6. Aproximare prin arce de cerc

Întrucât curba reprezentativă a profilului camei, stabilită la punctul precedent, este greu de realizat în practică, ea se aproximează cu arce de cerc. Dăm mai jos figura 8, care este analoagă figurii 6, cu deosebirea că pentru conturul camei s-a folosit un arc de cerc. Atunci centrul de curbură C este fix.

Aproximarea soluției găsite (cu arce de curbă pentru care $s'' = \text{const.}$ pe porțiuni) se face conform indicațiilor din figura 9. În această figură aproximarea profilului camei se face cu N arce de cerc.

Ramura ascendentă a profilului camei corespunde intervalului $\vartheta \in [0, \beta_1]$ și în acest interval, după cum se va arăta ulterior, $u(\vartheta)$ este o funcție descrescătoare; ramura descendenta a profilului camei corespunde intervalului $\vartheta \in [\beta_2, \theta_0]$ și în acest interval funcția $u(\vartheta)$ este crescătoare. Pentru a obține o aproximatie cît mai bună a soluției „ideale”, referitor la ramura ascendentă, arcele de cerc se aleg precum urmează:

a) în porțiunea $u > 0$ (accelerație pozitivă) astfel încât la început să avem $u = a$;

b) în porțiunea $u < 0$ (accelerație negativă) astfel încât la capăt să avem $u = -b$.

c) în porțiunea $u = 0$ (și $q = 0$), printr-un arc de cerc cu centru în O .

În mod analog se procedează referitor la ramura descendenta.

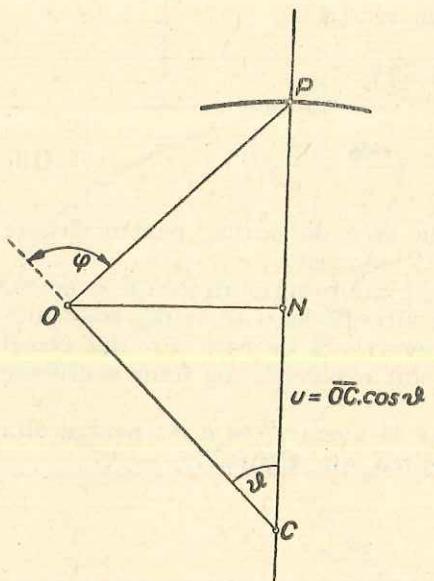


Fig. 8

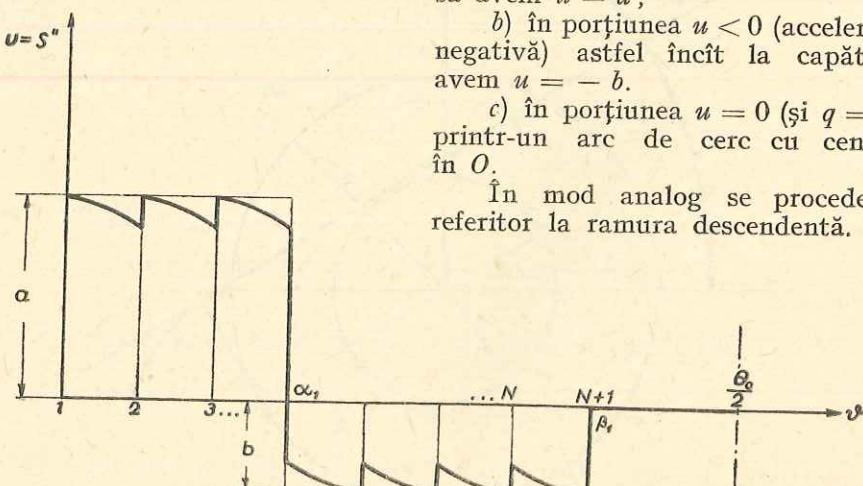


Fig. 9

7. Are de cerc cu accelerație pozitivă

Referitor la arcul de ordinul k , ne vom folosi de următoarele notații (fig. 10) :

$$N_k P_k = z_k,$$

$$N_{k+1} P_{k+1} = z_{k+1},$$

$$O N_k = q_k,$$

$$O N_{k+1} = q_{k+1},$$

$$C_k N_k = u_k = a,$$

$$C_k N_{k+1} = \bar{u}_k,$$

$$C_k P_k = C_k P_{k+1} = \rho_k.$$

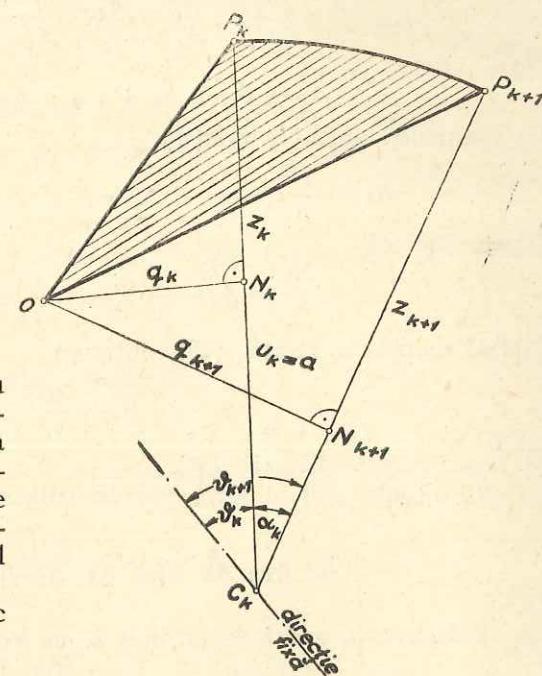


Fig. 10

Condițiile de raccordare cu arcul precedent determină valoările q_k și z_k . Apoi, condiția $u_k = a$ determină pe ρ_k . Mai rămâne un singur parametru pe care-l putea alege în mod arbitrar. Din considerații de calcul s-a ales acest parametru q_{k+1} .

Din figura 10 se stabilesc relațiile

$$\rho_k = z_k + a,$$

$$z_{k+1} = z_k + a - \sqrt{a^2 + q_k^2 - q_{k+1}^2},$$

$$\alpha_k = \arcsin \frac{q_{k+1}}{\sqrt{q_k^2 + a^2}} - \arcsin \frac{q_k}{\sqrt{q_k^2 + a^2}}, \quad (19)$$

$$u_k = \sqrt{a^2 + q_k^2 - q_{k+1}^2},$$

De asemenea avem

$$K_k = \int z d\delta = (z_k + a)\alpha_k + q_k - q_{k+1} = \rho_k \alpha_k + q_k - q_{k+1}. \quad (19')$$

Demonstrația acestei ultime relații se face astfel :

Notăm :

- | | |
|---|----------|
| aria sectorului de cerc $O P_k P_{k+1}$ | cu A_1 |
| aria segmentului de cerc $P_k P_{k+1}$ | cu A_2 |
| aria triunghiului $O P_k P_{k+1}$ | cu A_3 |
| aria patrulaterului $O C_k P_{k+1} P_k$ | cu A_4 |
| aria triunghiului $O P_k C_k$ | cu A_5 |
| aria triunghiului $C_k P_k P_{k+1}$ | cu A_6 |
| aria triunghiului $O P_{k+1} C_k$ | cu A_7 |
| aria sectorului de cerc $C_k P_k P_{k+1}$ | cu A_8 |

Aveam de calculat aria $F_k = A_1$. Înînd seama de figura 10, se obțin următoarele relații:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 + A_3, \\ A_8 &= A_2 + A_6, \\ A_4 &= A_5 + A_6 = A_3 + A_7, \end{aligned}$$

deci

$$A_1 = A_2 + A_5 + A_6 - A_7 = A_8 + A_5 - A_7.$$

De asemenea obținem relațiile

$$A_8 = \frac{1}{2} \rho_k^2 \alpha_k, \quad A_5 = \frac{1}{2} \rho_k q_k, \quad A_7 = \frac{1}{2} \rho_k q_{k+1}.$$

Găsim deci că

$$F_k = A_1 = \frac{1}{2} \rho_k^2 \alpha_k + \frac{1}{2} \rho_k q_k - \frac{1}{2} \rho_k q_{k+1}.$$

Înînd seama de relația (18), obținem

$$K_k = \frac{2}{\rho_k} F_k,$$

de unde rezultă îndată (19').

Formulele (19) și (19') vor fi utilizate în cele ce urmează.

8. Arc de cerc cu acceleratie negativă

Referitor la arcul de ordinul k , ne vom folosi de următoarele notații (fig. 11):

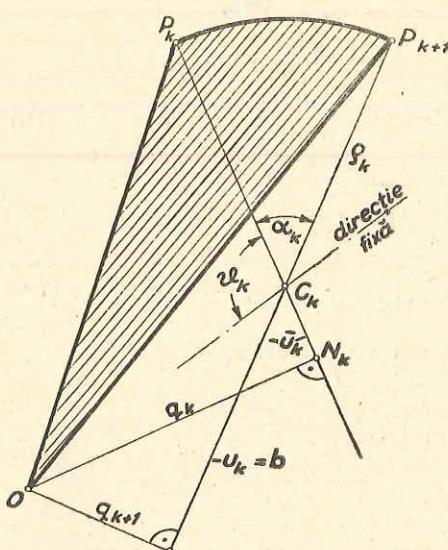


Fig. 11

După cum s-a văzut la punctul precedent, valorile q_k și z_k sunt determinate, iar q_{k+1} joacă rol de parametru.

Înînd seama de figura 11, obținem relațiile

$$\begin{aligned} \rho_k &= z_k - \sqrt{b^2 - q_k^2 + q_{k+1}^2}, \\ z_{k+1} &= z_k + b - \sqrt{b^2 - q_k^2 + q_{k+1}^2}, \\ \alpha_k &= \arcsin \frac{q_k}{\sqrt{b^2 + q_{k+1}^2}} - \arcsin \frac{q_{k+1}}{\sqrt{b^2 + q_{k+1}^2}}, \\ \bar{u}_k &= -\sqrt{b^2 - q_k^2 + q_{k+1}^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

De asemenea avem

$$K_k = (z_{k+1} - b) \alpha_k + q_k - q_{k+1} = \rho_k \alpha_k + q_k - q_{k+1}.$$

De aceste relații ne vom folosi în cele ce urmează.

9. Soluția generală

Pentru realizarea practică a profilului de aproximare, se va indica inițial numărul ϕ de arce de cerc cu accelerare pozitivă și numărul n de arce de cerc cu accelerare negativă (atât pentru ramura ascendentă, cît și pentru cea descendente).

Pentru primul arc de cerc avem

$$z_1 = r_0 + \delta, \quad (21)$$

$$q_1 = \epsilon_A \text{ respectiv } q_1 = \delta_D. \quad (22)$$

Folosind pentru fiecare ramură în parte câte $p + n = N$ arce de cerc, disponem în total de $2(N - 1)$ parametri,

$$q_{2A}, \dots, q_{NA},$$

$$q_{2D}, \dots, q_{ND},$$

aceasta deoarece

$$q_{N+1, A} = 0 \text{ și } q_{N+1, D} = 0. \quad (23)$$

Acești $2(N - 1)$ parametrii sunt legați între ei prin relațiile

$$\begin{aligned} z_{N, A} &= r_0 + H, \\ z_{N, D} &= r_0 + H. \end{aligned} \quad (24)$$

Dispunem în definitiv de $2(N - 2)$ variabile independente.

Se calculează α_i și K_i ($i = 1, 2, \dots, N$) și se formează sumele

$$\alpha_A = \sum_{i=1}^N \alpha_{i, A}, \quad K_A = \sum_{i=1}^N K_{i, A},$$

$$\alpha_D = \sum_{i=1}^N \alpha_{i, D}, \quad K_D = \sum_{i=1}^N K_{i, D}.$$

Obținem astfel pentru ramura ascendentă a profilului funcțiile α_A și K_A depinzând de $N - 2$ variabile independente, iar pentru ramura descendenta funcțiile α_D și K_D depinzând de alte $N - 2$ variabile independente.

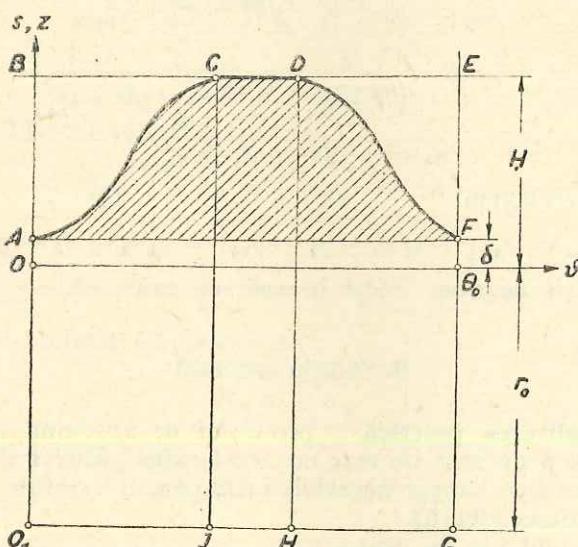


Fig. 12

$$\begin{aligned} C &= \text{Aria } (ACDF) & K_D &= \text{Aria } (HCG) \\ K &= \text{Aria } (O_1OACDF\theta_0G) & F_A &= \text{Ara. } (B\theta_0AF) \\ K_A &= \text{Ara. } (O_1OACJ) & F_D &= \text{Aria } (DFED) \end{aligned}$$

Să considerăm expresiile (fig. 12)

$$\begin{aligned} F_A &= (r_0 + H)\alpha_A - K_A, \\ F_D &= (r_0 + H)\alpha_D - K_D. \end{aligned} \quad (25)$$

Avem

$$C = \theta_0(H - \delta) - (F_A + F_D). \quad (26)$$

Cei $2(N - 2)$ parametri trebuie aleși astfel încât suma $F_A + F_D$ să fie minimă, cu respectarea inegalității

$$\alpha_A + \alpha_D \leq \theta_0. \quad (27)$$

10. Soluția cu trei arce de cerc

Vom alege pentru ramura ascendentă A cît și pentru ramura descendenta D cîte trei arce de cerc la care se mai adaugă eventual un arc cu $q = 0$, situat între cele două ramuri.

În această alegere primul arc de cerc va fi de accelerare pozitivă iar celelalte două de accelerare negativă. Sîntem conduși să procedăm

astfel ținînd seamă de anumite considerații de ordin practic. Avem atunci

$$z_1 = r_0 + \delta, \quad q_1 = \varepsilon. \quad (28)$$

În cele ce urmează vom introduce notațiile de prescurtare

$$\begin{aligned} q_2^2 &= x, \quad q_3^2 = y, \quad a^2 + \varepsilon^2 = A, \\ b^2 &= B, \quad a + 2b + \delta - H = C, \quad r_0 + \delta + a = D. \end{aligned}$$

Din condiția $z_1 = r_0 + H$, ținînd seamă de relațiile (20), obținem

$$\sqrt{A - x} + \sqrt{B - y} + \sqrt{B - x + y} = C. \quad (29)$$

În continuare, folosind relațiile (19), (19'), respectiv (20), avem

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{A}} - \arcsin \frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}, \\ \alpha_2 &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{B+y}} - \arcsin \sqrt{\frac{y}{B+y}}, \\ \alpha_3 &= \arcsin \sqrt{\frac{y}{B}}. \end{aligned} \quad (30)$$

și

$$K_1 = D\alpha_1 + \varepsilon - \sqrt{x}, \quad K_2 = \rho_2\alpha_2 + \sqrt{x} - \sqrt{y}, \quad K_3 = \rho_3\alpha_3 + \sqrt{y}, \quad (30')$$

unde

$$\rho_2 = D - \sqrt{A - x} - \sqrt{B - x + y},$$

$$\rho_3 = D + \sqrt{B} - \sqrt{A - x} - \sqrt{B - x + y} - \sqrt{B - y}.$$

De asemenea obținem

$$\begin{aligned} K &= D\alpha - (\alpha_2 + \alpha_3)(\sqrt{A - x} + \sqrt{B - x + y}) + \alpha_3(\sqrt{B} - \sqrt{B - y}) + \varepsilon, \\ \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \end{aligned} \quad (31)$$

Din relațiile (29), (30), (30') și (31) se constată că mărimele α_i , K_i , ρ_i vor fi reale și nenegative dacă x și y satisfac sistemul de inegalități, care determină de altfel domeniul lor de variație,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &\leq x \leq A, \\ y &\leq x, \quad y \leq B, \quad y \geq x - B, \end{aligned} \quad (32)$$

$$D\alpha_1 + \varepsilon \geq \sqrt{x}, \quad (33)$$

$$D + \sqrt{B - y} \geq C. \quad (34)$$

Dacă $D^2 \geq A$, atunci relația (33) este verificată în mod evident. Dacă $C \geq D$, în locul condiției (34) se poate scrie condiția

$$y \leq B - (C - D)^2, \quad (35)$$

care înlocuiește și cea de a treia relație din (32). Dacă $C < D$, atunci relația (34) este satisfăcută de la sine.

Soluția ecuației (29) este

$$x(y) = A - \left[\frac{(C - \sqrt{B - y})^2 + A - B - y}{2(C - \sqrt{B - y})} \right]^2. \quad (36)$$

Intervalul de variație a variabilei y este $[0, y_L]$, unde

$$y_L = A - \left[\frac{(C - \sqrt{B})^2 + A - B}{2(C - \sqrt{B})} \right]^2. \quad (37)$$

Avem

$$x(y)_L = y_L, \quad x(0) = y_L \quad și \quad x \in [y_L, x_{\max}].$$

În cazul concret, se va cerceta deci dacă mărările y , respectiv $x(y)$, din (36) satisfac condițiile (32), ..., (35),

$$x \geq \varepsilon^2,$$

$$y \leq B, \text{ respectiv } y \leq B - (C - D)^2,$$

$$y \geq x - B \text{ etc.}$$

Dacă aceste relații nu sunt verificate, se consideră pentru y un interval de variație mai mic.

În vederea obținerii soluției optime a problemei se procedează astfel: Se observă întâi că numerile K și α din relația (31) sunt funcții de x și y iar x este funcie de y (din relația (36)). Deci K și α sunt funcții de y . Întrucât există două mărările diferențe ε_A și ε_D , există cîte o funcție K_A , α_A (funcții de y_A) și cîte o funcție K_D , α_D (funcții de y_D). Înțind seama de această observație, se vor stabili (prin calculul tabelar al acestor funcții cu ajutorul unui calculator electronic) acele valori ale lui y_A , y_D , care realizează valori maxime pentru K_A și K_D *, cu condiția ca $\alpha_A + \alpha_D \leq \theta_0$.

Aceste valori y_A și y_D (unde bineînțeles trebuie respectate condițiile (32), ..., (35)) determină datele camei căutate.

10. Calculul cronosecțiunii

Pentru orice camă dată, dacă ea acționează un tachet legat direct de supapă, cronosecțiunea se poate calcula în mod rapid după cum urmează:

Fie

r_b : raza cercului de bază a camei inclusiv jocul δ ,

θ_0 : unghiul central corespunzător acționării tachetului,

q_A : distanța dintre centrul O și normala profilului camei dusă în punctul care corespunde vitezei finale ε_D (punctul final).

S : lungimea arcului profilului între punctul initial și punctul final.

* Mai precis, așa cum s-a văzut din formulele (25) și (26), mărările F_A și F_D trebuie să fie minime.

Cu aceste notări cronosecțiunea C se exprimă prin formula

$$C = S - r_b \theta_0 + q_A + q_D \quad (38)$$

Într-adevăr, înțind seama de figura 13, avem:

$$\begin{aligned} CP &= \rho, \\ NP &= z = s + r_b, \\ ON &= q, \\ PP' &= dS, \\ NN' &= dq. \end{aligned}$$

Apoi

$$\begin{aligned} dS &= \rho d\vartheta, \\ dq &= \frac{\rho - z}{\rho} dS = (\rho - z) d\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zd\vartheta &= \rho d\vartheta - dq = dS - dq, \\ d\vartheta &= dS - r_b d\vartheta - dq, \end{aligned}$$

$$C = \int_0^{\theta_0} s d\vartheta = S - r_b \theta_0 - q(\theta_0) + q(0).$$

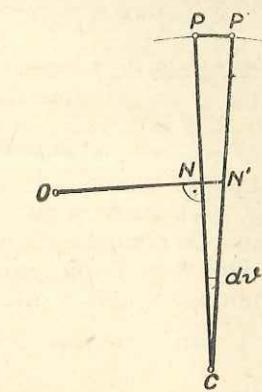


Fig. 13

Într-un punct al conturului, situat între punctul initial și punctul final, normala la conturul camei trece prin centru, deci q își schimbă semnul:

$$q(0) = q_A > 0, \quad q(\theta_0) = -q_D < 0.$$

Obținem în sfîrșit

$$C = S - r_b \theta_0 + q_A + q_D.$$

Primit la 10. VII. 1951.

О МАКСИМАЛЬНОМ КРОНОСЕЧЕНИИ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается улучшение кроносечения в моторах с внутренним сгоранием. Кроносечение C определяется как интеграл пути впускного клапана s по углу вращения ϑ управляющего кулачка.

Определяется функция, представляющая путь клапана и обеспечивающая максимальное кроносечение. Устанавливается профиль управляющего кулачка, соответствующий этому оптимальному решению. Изучаются величины, характеризующие движение клапана для случая, когда кулачок состоит из отрезков окружности и, наконец, вырабатывается метод расчета для случая приближения данного ранее оптимального решения отрезками окружностей.

SUR LA CHRONOSECTION MAXIMUM

RÉSUMÉ

L'auteur s'occupe de l'amélioration de la chronosection des moteurs à combustion interne, la chronosection C étant définie comme étant l'intégrale de la course de la soupape d'admission s , selon l'angle de rotation θ de la came de commande.

On détermine la fonction — représentant la course de la soupape — qui réalise une chronosection maximum et on établit le contour de la came de commande qui correspond à cette solution optimum. On étudie les grandeurs caractéristiques du mouvement de la soupape lorsque la came se compose d'arcs de cercle. Finalement, on élabore une méthode de calcul pour l'approximation par des arcs de cercle de la solution optimum indiquée auparavant.

THE BOSTON CHAUCERIAN SOCIETY
196
MEMORIAL VOLUME
1960

从上到下：从左到右：从右到左：

B. Stocuri reziduale din bariile vechi ale a genunchi și articulației de spate
Este obiceiul să urmărești înainte de următorul singurătate să te întrebi dacă există răni.

These same as above, *Scutellaria galericulata* are sulphur-yellowish blue *Scutellaria galericulata*. The greater species of *Scutellaria* always have *Scutellaria galericulata* at *Scutellaria galericulata* like the sulphur-yellowish *Scutellaria galericulata*, & *Scutellaria galericulata* are associated like small clusters of *Scutellaria galericulata* are associated with *Scutellaria galericulata*.

A those positively identified as related to environmental hazards, the study participants felt a strong or intense environmental problem because many thought problems did not fit into their category. However, participants' responses were often mixed. Examples included the following:

Ultimul pozitivă obiectivă în modul studiu este înțelegerile cu privire la cunoașterea guvernării menținute de către altă autoritate. Acestea pot fi realizate în cadrul conferințelor sălelor de școală și în cadrul cunoașterii de către elevi a cunoașterii sociale. Acestea sunt deosebite de cunoașterea socială și de cunoașterea cunoașterii sociale. Acestea sunt deosebite de cunoașterea cunoașterii sociale și de cunoașterea cunoașterii sociale.