ASUPRA APLICĂRII SIMULTANE A METODEI LUI NEWTON ȘI A METODEI PĂRȚILOR PROPORȚIONALE

DE

A. ȘAICHIN

1. Se știe că dacă derivata a doua păstrează un semn constant, atunci aplicarea simultană a metodei părților proporționale unui interval (a, b) și a metodei lui Newton la unul din capetele intervalului, ne dă două valori aproximative care *încadrează* valoarea exactă.

Ne propunem să vedem cum — folosind noul interval în care se află rădăcina — putem găsi o mai precisă valoare a ei. În această privință trebuie observat că operația cea mai laborioasă în aplicarea metodelor de aproximare este substituția variabilei în primul membru al ecuației, întrucît în această substituție trebuie operat cu un mare număr de cifre semnificative. Metoda expusă mai jos nu cere o nouă substituire în primul membru al ecuației.

2. Metoda părților proporționale, ca și metoda lui Newton, este liniară, în sensul că ambele țin seama numai de termenii de gradul întîi în $f(x)$ sau în h.

Anume, metoda lui Newton aplicată la extremitatea a a intervalului (a, b) dă

$$x_N = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \tag{1}$$

iar metoda părților proporționale constă în a lua

$$\frac{x_p - a}{b - a} = - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}, \tag{2}$$

de unde

$$x_p = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a). \tag{3}$$

Cele două valori coincid cu aproximația unor termeni de ordinul doi.

Să trecem la considerarea termenilor de ordinul doi. Vom lua drept valoare exactă a rădăcinii

$$x = a + h,$$

unde h este dat de relaţia

$$f(a)+h\,f'(a)+\frac{h^2}{2}\,f''(a)=0\,,$$

adică

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{f''(a)}{2f'(a)}\,h^2\,.$$

Aşadar,

$$x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{f''(a)}{2f'(a)}\,h^2. \tag{4}$$

Pe de altă parte, luînd în (3)

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}\,f''(a)$$

şi neglijînd termenii de ordinul trei şi superior, obţinem

$$x_p=a-\frac{f(a)}{f'(a)}+\frac{f''(a)f(a)}{2f'^2(a)}\,(b-a). \tag{5}$$

Din relaţiile (1), (4), (5) se deduce

$$x-x_N=-\frac{f''(a)}{2f'(a)}\,h^2,$$

$$x_p-x_N=\frac{f''(a)\,f(a)}{2f'^2(a)}\,(b-a),$$

de unde prin împărţire

$$\frac{x-x_N}{x_p-x_N}=-\frac{h^2f'(a)}{(b-a)f(a)}.$$

Înlocuind h şi $f'(a)$ prin

$$h=-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)\,,\qquad f'(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

înlocuire care nu introduce decît erori de ordinul trei şi superior, obţinem

$$\frac{x-x_N}{x_p-x_N}=-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)} \tag{6}$$

de unde

$$x=x_N-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}\,(x_p-x_N)\,. \tag{7}$$

3. În relaţia (7), x_N este valoarea dată de metoda lui Newton la capătul a al intervalului, valoare pe care o vom nota de acum încolo prin x_{N_a}.

Prin analogie, avem

$$x=x_{N_b}-\frac{f(b)}{f(a)-f(b)}\,(x_p-x_{N_b})\,. \tag{8a}$$

Relaţia (8) prezintă dezavantajul de a face să apară o fracţie nouă, anume

$$\frac{f(b)}{f(a)-f(b)}.$$

Avem însă

$$\frac{f(b)}{f(a)-f(b)}=-1-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}$$

şi relaţia (8a) devine

$$x=x_p-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}\,(x_{N_b}-x_p)\,. \tag{8b}$$

Comparînd (2) cu (6), se observă că putem scrie

$$\frac{x-x_N}{x_p-x_N}=\frac{x_p-a}{b-a} \tag{9}$$

şi deci putem formula

Regula 1: *Cu aproximaţia unor termeni de ordinul trei, valoarea exactă a rădăcinii împarte intervalul dintre valorile aproximative date de metoda lui Newton şi de cea a părţilor proporţionale, în acelaşi raport în care valoarea dată de metoda părţilor proporţionale împarte intervalul iniţial.*

4. Formulele (7) şi (8) sînt exacte, cu aproximaţia unor termeni de ordinul trei. Aceasta înseamnă că notînd x_{Q_a} valoarea dată de formula (7) şi x_0 valoarea exactă, vom avea

$$x_0=x_{Q_a}+R_a,$$

termenul complementar R fiind dat de forma

$$R_a=E\,(f',f'',f''')_{x=a}\cdot(b-a)^3.$$

Aici $E(f',f'',f''')$ este o expresie de primele trei derivate. Analog

$$x_0=x_{Q_b}+R_b,$$

unde

$$R_b=E(f',f'',f''')_{x=b}\cdot(a-b)^3.$$

În general, expresia E nu se anulează în intervalul (a,b) şi deci rezultă că R_a şi R_b sînt de semne contrarii. Aşadar, *dacă o anumită combinaţie a primelor trei derivate păstrează un semn constant în intervalul considerat, atunci valorile date de formulele* (7) *şi* (8) *încadrează valoarea exactă a rădăcinii.*

Pentru a da acestei propoziţiuni valoare şi formă de teoremă, trebuie calculate R_a şi R_b. În acest scop e nevoie de o expresie pentru valoarea exactă a rădăcinii, expresie care să conţină un termen complementar de ordinul trei.

Ecuaţia

$$y=f(x)$$

defineşte pe x ca o funcţie implicită de y. Fie $x=a$ valoarea apropiată a rădăcinii, $y=f(a)$ valoarea corespunzătoare a lui y.

Aplicînd lui x formula lui Taylor după puterile lui $y-f(a)$, cu termen complementar de ordinul trei, calculînd derivatele $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{d^3x}{dy^3}$ după teoria funcţiilor implicite şi făcînd în relaţia obţinută $y=0$, se obţine

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f''(a)}{2[f'(a)]^3} f^2(a) + E_1 f^3(a),$$

unde

$$E_1 = \frac{f'(c_1)f'''(c_1) - 3[f''(c_1)]^2}{6[f'(c_1)]^5}, \quad a<c_1<b. \tag{9}$$

Pe de altă parte, un calcul relativ simplu arată că se poate scrie

$$x_{Q_a} = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f''(a)}{2[f'(a)]^3} f^2(a) - E_2[f(b)-f(a)]f^2(a),$$

unde

$$E_2 = \frac{f'(a)f'''(c_2) - 3f''(a)f''(c_3) - \dfrac{3(b-a)[f''(c_2)]^2 f''(a)}{4f'(a)}}{6[f'(a)]^4 f'(c_4)\left[1+\dfrac{b-a}{2}\dfrac{f''(c_3)}{f'(a)}\right]^2} \tag{10}$$

$$a<c_2,\ c_3,\ c_4<b.$$

Rezultă de aici

$$x_0 - x_{Q_a} = \{E_1 f(a) + E_2[f(b)-f(a)]\} f^2(a) =$$
$$= \left[E_2 + (E_1-E_2)\frac{f(a)}{f(b)}\right] f^2(a) f(b).$$

La fel

$$x_0 - x_{Q_b} = \left[E_4 + (E_3-E_4)\frac{f(b)}{f(a)}\right] f^2(b)\, f(a),$$

unde E_3, E_4 sînt E_1, E_2, calculate pentru extremitatea b.

În general (nu întotdeauna) parantezele

$$E_2 + (E_1-E_2)\frac{f(a)}{f(b)} \quad \text{şi} \quad E_4 + (E_3-E_4)\frac{f(b)}{f(a)}$$

sînt de acelaşi semn; într-adevăr, neglijînd termenii de ordin superior avem

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \left.\frac{f'(x)f'''(x) - 3[f''(x)]^2}{6[f'(x)]^5}\right|_{x=c}$$

Pe de altă parte $f(a)$ şi $f(b)$ sînt totdeauna de semne contrarii. Constatăm deci că în general $x_0 - x_{Q_a}$ şi $x_0 - x_{Q_b}$ sînt de semne contrarii.

Enunţul precis este următorul:

TEOREMĂ. *Dacă avem inegalităţile*

$$\max|E_1 - E_2| < \min\left|E_2 \frac{f(b)}{f(a)}\right|$$

$$\max|E_3 - E_4| < \min\left|E_4 \frac{f(a)}{f(b)}\right|$$

atunci valorile date de formulele (7) *şi* (8) *încadrează valoarea exactă a rădăcinii.*

5. Neglijînd termenii de ordinul patru, putem lua

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E.$$

Putem deci scrie, cu aceeaşi aproximaţie,

$$x_0 - x_{Q_a} = E\, f^2(a)\, f(b)$$
$$x_0 - x_{Q_b} = E\, f^2(b)\, f(a),$$

de unde

$$\frac{x_0 - x_{Q_a}}{x_0 - x_{Q_b}} = \frac{f(a)}{f(b)},$$

ceea ce se mai pune sub forma

$$\frac{x_0 - x_{Q_a}}{x_{Q_b} - x_{Q_a}} = -\frac{f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x_p - a}{b-a}. \tag{11}$$

Aşadar, putem formula

Regula 2: *Cu aproximaţia unor termeni de ordinul patru, valoarea exactă a rădăcinii împarte intervalul dintre valorile date de formulele* (7) *şi* (8) *în acelaşi raport, în care valoarea dată de metoda părţilor proporţionale împarte intervalul iniţial.*

Putem rezuma astfel:

Fie un interval (a, b), ce conţine rădăcina.

Fie x_{N_a}, x_{N_b} valorile obţinute aplicînd metoda lui Newton la extremităţile a, b.

Fie:

$$\lambda = -\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}, \qquad \mu = 1 - \lambda.$$

Rădăcina, cu aproximaţia unor termeni de ordinul patru, este dată de succesiunea de formule:

Calcul manual	**Calcul cu maşina**	
$x_p = a + \lambda(b-a)$	$x_p = \mu a + \lambda b$	(3)
$x_{Q_a} = x_{N_a} + \lambda(x_p - x_{N_a})$	$x_{Q_a} = \mu x_{N_a} + \lambda x_p$	(7)
$x_{Q_b} = x_p + \lambda(x_{N_b} - x_p)$	$x_{Q_b} = \mu x_p + \lambda x_{N_b}$	(8)
$x = x_{Q_a} + \lambda(x_{Q_b} - x_{Q_a})$	$x = \mu x_{Q_a} + \lambda x_{Q_b}$.	(12)

6. *Exemple.* 1°. Fie ecuaţia

$$x^3 + 5x - 4 = 0,$$

ce are o rădăcină pozitivă în intervalul (0,7; 0,8).

Avem:

$$x_p = 0{,}723\,467\,9$$
$$x_{N_a} = 0{,}724\,265\,8$$
$$x_{N_b} = 0{,}726\,011\,6.$$

Formulele (7) şi (8) dau

$$x_{Q_a}=0{,}724\,078\,6$$
$$x_{Q_b}=0{,}724\,064\,8$$

Formula (12) dă

$$x=0{,}724\,075\,3$$

Valoarea exactă este

$$x=0{,}724\,075\,5$$

Aşadar, pornind de la valori ce au o zecimală exactă, am obţinut şase zecimale exacte.

2°. Fie aceeaşi ecuaţie

$$x^3+5x-4=0$$

ce are o rădăcină pozitivă în intervalul (0,72 ; 0,73).
Avem

$$x_p\ =0{,}724\,067\,569\,828$$
$$x_{N_a}=0{,}724\,081\,034\,904$$
$$x_{N_b}=0{,}724\,087\,168\,685$$

Formulele (7) şi (8) dau

$$x_{Q_a}=0{,}724\,075\,557\,890$$
$$x_{Q_b}=0{,}724\,075\,541\,800$$

Formula (12) dă

$$x=0{,}724\,075\,551\,345$$

Valoarea exactă este

$$x=0{,}724\,075\,551\,390$$

Aşadar, pornind de la valori ce au două zecimale exacte, am obţinut 10 zecimale exacte.

Institutul de căi ferate — Bucureşti
Catedra de matematică

Об одновременном применении метода Ньютона и метода пропорциональных частей

(Краткое содержание)

Известно, что метод Ньютона и метод пропорциональных частей дают два значения, которые с о д е р ж а т точное значение корня.
Устанавливаются следующие результаты:
Пусть (a, b) — интервал в котором находится корень, x_{N_a} и x_{N_b} значения полученных методом Ньютона, примененным в обоих концах интервала.

$$\lambda=-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)} \qquad \mu=1-\lambda.$$

Корень x дана, с точнотью до некоторых членов четвертого порядка посредством исследовательности формул.

Ручное вычисление:	Вычисление с машиной:
$x_p = a + \lambda(b-a)$	$x_p = \mu a+\lambda b$
$x_{Q_a}= x_{N_a}+ \lambda(x_p - x_{N_a})$	$x_{Q_a}=\mu x_{N_a}+\lambda x_p$
$x_{Q_a}= x_p + \lambda(x_{N_b} - x_p)$	$x_{Q_b}=\mu x_p+\lambda x_{N_b}$
$x = x_{Q_a}+\lambda(x_{Q_a} - x_{Q_a})$	$x = \mu x_{Q_a}+\lambda x_{Q_b}$

Sur l'application simultanée de la méthode de Newton et de la méthode des parties proportionnelles

(Résumé)

On sait que la méthode de Newton et la méthode des parties proportionnelles donnent deux valeurs qui *encadrent* la valeur exacte de la racine.
On établit les résultats suivants.
Soit (a, b) un intervalle dans lequel se trouve la racine, x_{N_a} et x_{N_b} les valeurs données par la méthode de Newton, appliquée aux deux extrémités de l'intervalle

$$\lambda=-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)} \qquad \mu=1-\lambda.$$

La racine x est donnée, avec l'approximation de quelques termes du quatrième ordre, par la succession de formules

Calcul manuel	Calcul à la machine
$x_p = a + \lambda(b-a)$	$x_p = \mu a + \lambda b$
$x_{Q_a}= x_{N_a}+ \lambda(x_p - x_{N_a})$	$x_{Q_a}=\mu x_{N_a}+\lambda x_p$
$x_{Q_b}= x_p + \lambda(x_{N_b} - x_p)$	$x_{Q_b}=\mu x_p+\lambda x_{N_b}$
$x = x_{Q_a}+\lambda(x_{Q_b} - x_{Q_a})$	$x = \mu x_{Q_a}+\lambda x_{Q_b}$