INTEGRAREA NUMERICĂ

DE

D. V. IONESCU

(Cluj)

În analiza numerică, integrarea numerică ocupă un loc de seamă. În această ramură s-au efectuat lucrări importante la Institutul de calcul a Academiei R.P.R. în următoarele direcţii :

1) Unele formule liniare de aproximare ale analizei şi studiul restului lor.

2) Formule de cvadratură.

3) Integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale ordinare.

4) Formule de cubatură.

5) Ecuaţii cu derivate parţiale şi integrarea lor numerică.

Vom arăta în cele ce urmează cîteva din rezultatele cele mai importante obţinute la Institutul de calcul în cercetările care s-au făcut în acest direcţii.

§ 1. Unele formule liniare de aproximare ale analizei şi studiul restului lor

1. Formulele de aproximare uzuale ale analizei sînt în general de forma

$$A[f] = B[f] + R[f], \tag{1}$$

unde $A[f]$ şi $B[f]$ sînt funcţionale liniare definite pe un spaţiu vectorial de funcţii, reale şi continue de o variabilă reală. Funcţiile f sînt definite şi continue pe un interval I ; ele pot avea şi derivate de ordinele care figurează în formula (1), cel puţin pe punctele pe care aceste derivate intervin în formula (1).

Funcţionala $B[f]$ exprimă aproximativ pe $A[f]$.

$R[f]$, *restul formulei de aproximare* (1), este tot o funcţională liniară.

În categoria formulelor (1) intră de exemplu : formulele de cvadratură şi formulele de derivare numerică.

Pentru aplicaţii, este foarte important să se studieze restul $R[f]$. căutîndu-se o evaluare a valorii lui absolute. Problema restului a fost cercetată de mulţi matematicieni, între care citâm pe A. A. Markov [55], G. D. Birkhoff [4], G. Kowalewski [52], R. v. Mises, [57], J. Radon [71], E. Ya. Remez [73], A Sard [76].

T. Popoviciu a studiat restul $R[f]$ în mai multe lucrări [66] [67]. [68], [69], [70], legînd aceste cercetări de cercetările sale anterioare asupra funcţiilor convexe [62], [63], [64] [65], şi a obţinut rezultate de mare importanţă.

În cazul cînd aproximarea are caracterul unei aproximări polinomiale, *gradul de exactitate* n al formulei (1) este determinat de condiţiile

$$R[x^i] = 0, \quad R[x^{n+1}] \neq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n). \tag{2}$$

T. Popoviciu [66] a demonstrat că dacă formula (1) are gradul de exactitate n, atunci restul $R[f]$ este de forma

$$R[f] = A[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f] + B[\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+2}; f], \tag{3}$$

unde A, B sînt constante independente de funcţia f, iar $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f]$, $[\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+2}; f]$ sînt diferenţele divizate ale funcţiei f, pe nodurile $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}$ şi $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+2}$ distincte, ele depinzînd în general de funcţia f.

T. Popoviciu *a demonstrat că dacă restul* $R[f]$ *nu se anulează cînd* f *este o funcţie continuă şi convexă oarecare, de ordinul* n, *atunci el are forma*

$$R[f] = R[x^{n+1}]\,[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f] \tag{4}$$

şi, în acest caz, restul $R[f]$ este de *formă simplă*.

La această teoremă de bază se mai adaugă şi criterii practice care permit să se recunoască dacă o funcţională liniară $R[f]$ este sau nu de formă simplă.

2. T. Popoviciu [67] a studiat amănunţit formulele de derivare numerică de forma (1), unde

$$A[f] = f^{(m+r)}(x_0), \quad B[f] = \sum_{j=0}^{r-1} a_j f^{(j)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} a_{i,j} f^{(j)}(x_i) \tag{5}$$

care permit evaluarea aproximativă a derivatei $f^{(m+r)}(x_0)$ de ordinul $m+r$ pe nodul x_0, prin combinaţia liniară $B[f]$ a valorii funcţiei f şi ale derivatelor ei succesive pe nodurile $x_0, x_1, \dots, x_s$, presupuse distincte, însă multiple de ordinele $r, r_1, \dots, r_s$. Numărul m se numeşte *indicele de derivare* al formulei (1).

Se notează cu $p + 1 = r_1 + r_2 + \dots + r_s$ *numărul total al nodurilor*.

Se notează cu $r'_i - 1$ ordinul cel mai înalt de derivare care intervine efectiv în nodul x_i, unde $i = 1, 2, \dots, s$. Vom avea $x'_i = 0$ dacă toţi coeficienţii a_{ij}, unde $j = 0, 1, \dots, r_i - 1$, sînt nuli. De asemenea, se notează cu $r' - 1$ ordinul cel mai înalt de derivare care intervine efectiv în punctul x_0 în $B[f]$ şi vom avea $r' = 0$, dacă $r = 0$ sau dacă $a_j = 0$ pentru j $= 0, 1, \dots, r - 1$. Se deduce că $0 \leqslant r' \leqslant r$, $0 \leqslant r'_i \leqslant r_i$ pentru $i = 1, 2, \dots s$.

Suma $r' + r'_1 + r'_2 + \dots + r'_s$ se numeşte *ordinul formulei de derivare numerică* (1); el este cel mult egal cu $p + r + 1$.

Gradul de exactitate n al formulei de derivare numerică (1) se defineşte prin condiţiile (2). Se arată că $n \leqslant p + r + m$.

Să păstrăm fixe nodurile $x_1, x_2, \dots, x_s$ cu ordinile lor de multiplicitate, punctul de derivare x_0 cu ordinul lui de multiplicitate şi indicile de derivare însă să dăm constantelor a_j, $a_{i,j}$, din fomula (1) toate valorile posibile. Obţinem atunci o mulţime de formule de derivare numerică (1) pe care o notăm cu $\mathcal{M}$.

Iată un exemplu de formulă de derivare numerică din mulţimea $\mathcal{M}$.

Să scriem din nou nodurile $x_1, x_2, \dots, x_s$ sub forma

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1},$$

fiecare nod x fiind repetat de atîtea ori cît este ordinul lui de multiplicişi să formăm polinomul de interpolare al lui Lagrange-Hermite.

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r}, x'_1, \dots, x'_{p+1}; f\,|\,x), \tag{6}$$

relativ la funcţia $f(x)$. Derivînd acest polinom de $m + r$ ori formula

$$f^{(m+r)}(x_0) = L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r}, x'_1, \dots, x'_{p+1}; f\,|\,x_0) + R[f]$$

reprezintă o formulă de derivare numerică din mulţimea $\mathcal{M}$ pe care o vom nota cu (E).

T. Popoviciu a arătat că *în mulţimea* $\mathcal{M}$ *a formulelor de derivare numerică* (1) *există o formulă şi numai una singură de grad de exactitate maxim şi aceasta formulă este formula* (E).

De asemenea a demonstrat că *dacă* $m \leqslant p$, *gradul de exactitate al formulei* (E) *este cel mult egal cu ordinul său. Gradul de exactitate şi ordinul sînt egale dacă şi numai dacă* x_0 *este o rădăcină diferită de noduri, a unuia din polinoamele*

$$l^{(m)}(x),\ l^{(m+1)}(x), \left[\frac{l(x)}{x - x_i}\right]^{(m)}, \ i = 1, 2, \dots, s, \tag{7}$$

unde

$$l(x) = (x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2}\dots(x - x_s)^{r_s} \tag{8}$$

Conform definiţiei date la punctul 1, restul $R[f]$ şi formula de derivare numerică (1) este de formă simplă, dacă el poate fi pus sub forma (4). T. Popoviciu în [66] a arătat că *condiţia necesară şi suficientă pentru ca restul* $R[f]$ *să fie de formă simplă este ca* $R[f] = 0$, *pentru orice funcţie* $f(x)$ *convexă, de ordinul* n.

T. Popoviciu a făcut o discuţie amănunţită a cazurilor în care se poate afirma că restul formulei de derivare numerică (E) este de formă simplă. Rezultatele esenţiale ale acestei discuţii sînt următoarele:

1°. *Dacă punctul de derivare* x_0 *este în afara celui mai mic interval care conţine nodurile* $x_1, x_2, \dots, x_s$, *restul* $R[f]$ *al formulei* (E) *este de formă simplă.*

2°. *Dacă nodurile* $x_1, x_2, \dots, x_s$ *sînt distribuite în mod simetric faţă de nodul* x_0, *restul* $R[f]$ *al formulei* (E) *este de formă simplă.*

În lucrarea [66] s-au dat numeroase exemple de formule de derivare numerică de grad de exactitate ≤ 5, care sînt de mare importanță. Ele pot servi la integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale ordinare cu condiții la limită în două puncte, cînd se aplică metoda rețelelor, după cum au arătat mai mulți autori, între care cităm pe L. V. Kantorovici și V. I. Krîlov [51], precum și pe L. Collatz [9].

3. T. Popoviciu [68] a studiat de asemenea formule de aproximare de forma (1), unde $A[f]$ este o funcțională liniară definită pe un spațiu vectorial S de funcții f reale de variabila reală x, definite și continue pe un interval I care conține toate polinoamele, funcțiile f fiind derivabile de un număr suficient de ori. Funcționala $B[f]$ este definită de

$$B[f] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{r_i-1} a_{i,j}\, f^{(j)}(x_i) \tag{9}$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt noduri din intervalul I, cu ordinele de multiplicitate $r_1, r_2, \ldots, r_n$; a_{ij} sînt coeficienți constanți în formula (9) și *caracterizează* formula de aproximare (1).

Este natural să se ia ca funcțională $B[f]$, funcționala $A[\varphi]$, unde φ este polinomul de interpolare al lui Lagrange-Hermite.

$$\varphi(x) = L(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1}, \ldots, \underbrace{x_n, x_n, \ldots, x_n}_{r_n}; f|x) \tag{10}$$

de gradul

$$p = r_1 + r_2 + \ldots + r_n - 1.$$

Polinomul $\varphi(x)$ se poate scrie sub forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{r_j-1} l_{i,j}(x)\, f^{(j)}(x_i) \tag{11}$$

iar formula de aproximare (1) se poate scrie sub forma

$$A[f] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{i,j}\, f^{(j)}(x_i) + R[f], \tag{12}$$

unde

$$C_{i,j} = A[l_{i,j}] \qquad (j = 0, 1, \ldots, r_i - 1;\ i = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

T. Popoviciu a demonstrat că *dacă formula de aproximare* (1) *are gradul de exactitate* $m \geq p$, *atunci ea coincide în mod necesar cu formula* (12).

Astfel formula de aproximare (12) apare în mulțimea formulelor de forma (1), care se obține dînd coeficienților $a_{i,j}$ din formula (9) toate valorile posibile, ca o *formulă de gradul maxim* p. Însă în cazuri particulare, formula (12) poate să aibă gradul de exactitate mai mare decît p.

T. Popoviciu arată că *formula* (12) *este de tip Gauss dacă gradul ei de exactitate este* $p + n$.

Introducînd numirea de *funcții ortogonale* f, g *față de funcționala* $A[f]$, dacă este satisfăcută egalitatea

$$A[f, g] = 0, \tag{14}$$

a demonstrat că *condiția necesară și suficientă ca formula* (12) *să fie de tip Gauss este ca polinomul*

$$l(x) = (x - x_1)^{r_1} (x - x_2)^{r_2} \ldots (x - x_n)^{r_n}$$

să fie ortogonal cu orice polinom $Q(x)$ *de gradul* $n - 1$ *față de funcționala* $A[f]$, adică să avem

$$A[l, Q] = 0. \tag{15}$$

Presupunînd funcționala $A[f]$ dată, numărul natural n și ordinele de multiplicitate $r_1, r_2, \ldots, r_n$ al nodurilor, ca date, teorema precedentă permite să se formeze un sistem de ecuații în care necunoscutele sînt $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Orice soluție a acestui sistem, în care $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt distincte, dă o formulă de tip Gauss. Pentru o funcțională liniară dată $A[f]$ și pentru un sistem dat de ordine de multiplicitate nu există totdeauna o formulă de tip Gauss.

Se spune că o funcțională $A[f]$ este de *ordin de pozitivitate* K, dacă $A[Q^2] > 0$, pentru orice polinom $Q[x]$ de gradul $K - 1$, neidentic nul.

T. Popoviciu a demonstrat că *pentru o funcțională liniară* $A[f]$, *dată, de ordinul de pozitivitate* K *și pentru orice sistem de ordine de multiplicitate* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *date, numere impare, există cel puțin o formulă de tip Gauss, dacă* $K \geqq \frac{1}{2}(p + n - 1)$.

De asemenea, se poate afirma că pentru o funcțională dată $A[f]$ de ordin de pozitivitate $K \geqq \frac{1}{2}(p + n + 2)$, printre ordinele de multiplicitate $r_1, r_2, \ldots, r$ găsindu-se cel puțin unul care să fie par, atunci nu există nici o formulă de tip Gauss.

T. Popoviciu a arătat cum se pot determina în mod efectiv formule de tip Gauss. Pe exemple a arătat, de asemenea că, la un sistem de ordine de multiplicitate date, pot exista mai multe formule de tip Gauss.

Pentru cazul cînd toate ordinele de multiplicitate sînt egale între ele, T. Popoviciu a regăsit următoarea teoremă datorită lui P. Turan [97].

Pentru orice funcțională liniară $A[f]$, *care are ordinul de pozitivitate* K, *relativ la orice număr natural* n *și la orice sistem de* n *ordine de multiplicitate toate egale cu un același număr impar* r, *astfel ca să avem* $K \geqslant \frac{1}{2} n\,(r+1)$ *există o formulă* (12) *de tip Gauss și una singură.*

4. În formula de aproximare (1), caracterul de aproximare este polinomial, ceea ce înseamnă că funcțiile

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots \tag{16}$$

jucau un rol important atît în determinarea gradului de exactitate al formulei de aproximare, cît și în determinarea restului formulei.

T. Popoviciu [69], [70] a dat o generalizare importantă procedeelor sale de studiere a formulelor de aproximare ale analizei în modul următor.

Șirul (16) se înlocuiește cu șirul de funcții

$$f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}, \tag{17}$$

definite pe o mulțime E și formînd un *sistem interpolator sau sistem* (I) pe E, ceea ce înseamnă că determinantul

$$V\begin{pmatrix} f_0, & f_1, \ldots, & f_{n+1} \\ x_1, & x_2, \ldots, & x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_1(x_1) \ldots & f_{n+1}(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) \ldots & f_{n+1}(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_0(x_{n+2}) & f_1(x_{n+2}) \ldots & f_{n+1}(x_{n+2}) \end{vmatrix} \tag{18}$$

este *diferit de zero* pentru orice sistem de noduri distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ din E.

T. Popoviciu a definit funcția *convexă*, respectiv *concavă*, în raport cu șirul

$$f_0, f_1, \ldots f_n, \tag{19}$$

dacă

$$V\begin{pmatrix} f_0, & f_1, \ldots, & f_n, & f \\ x_1, & x_2, \ldots, & x_{n+1}, & x_{n+2} \end{pmatrix} > 0, \text{ respectiv } < 0$$

pentru orice sistem $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ de $n+2$ puncte din E.

Introducînd *diferența divizată* (generalizînd noțiunea clasică de diferență divizată) prin formula

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = \frac{V\begin{pmatrix} f_0, & f_1, \ldots, & f_n, & f \\ x_1, & x_2, \ldots, & x_{n+1}, & x_{n+2} \end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} f_0, & f_1, \ldots, & f_n, & f_{n+1} \\ x_1, & x_2, \ldots, & x_{n+1} & x_{n+2} \end{pmatrix}} \tag{20}$$

definiția precedentă a convexității, respectiv concavității unei funcții în raport cu șirul (19) se poate înlocui cu următoarea:

Funcția f este convexă, neconcavă, neconvexă, respectiv concavă, în raport cu funcțiile (19), dacă

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] > 0, \geqslant 0, \leqslant 0, \text{ respectiv } < 0, \tag{21}$$

oricare ar fi punctele distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ din E.

Cînd șirul (19) se reduce la șirul (16), definiția de mai sus coincide cu definiția obișnuită a convexității, respectiv concavității unei funcții, dată tot de T. Popoviciu.

Cu această definiție, o funcțională liniară $R[f]$, definită pe un spațiu vectorial $\mathcal{F}$, format din funcții continue pe un interval E, este de *formă simplă*, dacă, pentru orice $f \in \mathcal{F}$, ea este de forma

$$R[f] = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f] \tag{22}$$

unde K este un număr diferit de zero și independent de funcția f, iar ξ_i, sînt puncte distincte din E (care în general pot depinde de f).

T. Popoviciu a arătat că *condiția necesară și suficientă pentru ca funcționala $R[f]$ să fie de formă simplă este ca să avem $R[f] \neq 0$ pentru orice funcție $f \in \mathcal{F}$ convexă în raport cu funcțiile* (19) și a dat criterii simple care permit să se decidă dacă o funcțională $R[f]$ este sau nu de formă simplă.

T. Popoviciu a examinat de asemenea și cazul cînd $R[f]$ nu este de formă simplă. Pentru aceasta a introdus următoarea definiție: O funcțională liniară $R_1[f]$ este o *majorantă simplă* a funcționalei $R[f]$, dacă ea este de formă simplă și dacă $R_1[f] > R[f]$ pentru orice funcție $f \in \mathcal{F}$, convexă.

Cu aceasta T. Popoviciu a demonstrat că dacă funcționala $R[f]$ definită pe $\mathcal{F}$ admite o majorantă simplă, ea poate fi scrisă sub forma

$$R[f] = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f] - K'[\xi', \xi_2', \ldots, \xi_{n+2}'; f], \tag{23}$$

unde K și K' sînt numere diferite de zero și independente de funcția f, iar punctele ξ_i precum și punctele ξ_i' sînt luate din E și sînt distincte, putînd în general să depindă de f.

T. Popoviciu a considerat și cazul cînd

$$f_i = x^i \quad (i = 0, 1, \ldots, n+1) \tag{24}$$

iar $R[f]$ este o funcțională liniară și de gradul n de exactitate pe $\mathcal{F}$. Dacă se consideră descompunerea

$$R[f] = R_1[f] + R_2[f], \tag{25}$$

unde $R_1[f]$ este o funcțională liniară definită pe $\mathcal{F}$ și unde $R_2[f]$ are gradul de exactitate $n + p > n$ atunci dacă $R_1[f]$ și $R_2[f]$ sînt de formă simpă avem

$$R[f] = R[x^{n+1}][\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f] + K[\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_{n+p+2}'; f] \tag{26}$$

unde $K \neq 0$ este independent de funcția f, iar ξ_i, ξ_i' sînt grupe de $n+2$, respectiv $n+p+2$, puncte distincte din E.

T. Popoviciu a făcut două aplicații importante ale acestei observări, la restul formulelor clasice de cvadratură ale lui Weddle și Hardy.

§ 2. Formule de cvadratură

5. Formulele de cvadratură fac parte din formulele de aproximare ale analizei; ele se obțin luînd

$$A[f] = \int_a^b f(x)dx,$$

sau mai general

$$A[f] = \int_a^b p(x)\, f(x) dx,$$

unde $p(x)$ este o funcţie dată, pozitivă în (a, b), putînd să se anuleze în a şi b şi

$$B[f] = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

sau mai general

$$B[f] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{j_k-1} A_{k,j}\, f^{(j)}(x_k)$$

Prin urmare, o formulă de cvadratură este de forma

$$\int p(x)\, f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R, \tag{1}$$

cînd nodurile $x_1, x_2, \ldots, x$ sînt *simple*, sau de forma

$$\int p(x)\, f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{j_k-i} A_{k,j} f^{(j)}(x_k) + R, \tag{2}$$

cînd nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt *multiple* de ordinele $j_1, j_2, \ldots, j_n$.

Constantele A_k din formula de cvadratură (1) sau A_{kj} din formula de cvadratură (2) sînt *coeficienţii* formulei de cvadratură.

Două probleme importante se pun la o formulă de cvadratură: 1° determinarea coeficienţilor ei şi 2° studiul restului R astfel ca formula să aibă *gradul de exactitate* p dat.

J. Radon [71] a dat o metodă pentru obţinerea formulelor de cvadratură, prin care se determină atît coeficienţii formulei, cît şi *restul ei pus sub formă de integrală definită*. Se presupune că funcţia $f(x)$ are derivate succesive continue într-un interval I care conţine intervalul $[a, b]$, pînă la un ordin suficient de mare.

6. D. V. Ionescu [33] a reluat metoda lui J. Radon şi a aprofundat-o. Aplicînd-o în mod sistematic, a scris o monografie asupra formulelor de cvadratură în care sînt regăsite multe din formulele de cvadratură cunoscute şi a obţinut chiar altele noi. În toate cazurile s-a aprofundat studiul restului fiecărei formule.

Iată în ce constă această metodă de cercetare.

Să presupunem că este vorba de integrala

$$\int_a^b p(x)\, f(x) dx \tag{3}$$

şi pentru a preciza, să presupunem că nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt astfel alese ca $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ şi că funcţia $f(x)$ este de clasa C^{n+1} pe intervalul $[a, b]$, adică este continuă împreună cu derivatele ei succesive pe intervalul $[a, b]$ pînă la ordinul $n + 1$.

La intervalele $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_n, b]$ să ataşăm funcţiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$, integrale ale ecuaţiilor diferenţiale

$$\varphi_1^{(n+1)}(x) = p(x),\ \varphi_2^{(n+1)}(x) = p(x),\ \ldots,\ \varphi_{n+1}^{(n+1)}(x) = p(x). \tag{4}$$

Scriind integrala (3) sub forma

$$\int_a^b p(x)\, f(x) dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x)\, f(x) dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k^{(n+1)} f(x) dx, \tag{5}$$

unde $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$ se aplică formula de integrare prin părţi generalizată la fiecare integrală din membrul al doilea. Să introducem condiţii la limită în nodurile $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$, astfel ca în membrul al doilea al formulei precedente să rămînă în partea integrată numai valorile funcţiei $f(x)$ pe noduri; vom nota aceste condiţii cu (A). Atunci formula (5) se reduce la

$$\int_a^b p(x)\, f(x) dx = \sum_{k+1}^{n} A_k\, f(x_k) + \int_a^b \varphi(x) f^{(n+1)}(x) dx, \tag{6}$$

unde funcţia $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n+1}, b]$ cu funcţiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$ şi unde

$$A_k = \varphi_k^{(n)}(x_k) - \varphi_{k+1}^{(n)}(x_k) = \varphi^{(n)}(x_k - 0) - \varphi^{(n)}(x_k + 0) \tag{7}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

S-a obţinut astfel formula de cvadratură (6) în care *coeficienţii şi restul sînt daţi de funcţia* $\varphi(x)$. Coeficienţii sînt daţi de formulele (7), iar restul de formula

$$R = \int_a^b \varphi(x) f^{(n+1)}(x) dx. \tag{8}$$

Dacă numărul

$$K = \int_a^b \varphi(x) dx \tag{9}$$

este diferit de zero, formula de cvadratură are *gradul de exactitate* n.

Existenţa şi construirea formulei de cvadraturi (6), *împreună cu restul ei, s-a redus la existenţa şi determinarea integralei sistemului de ecuaţii diferenţiale* (4) *cu condiţiile* (A).

Sînt cazuri în care funcţia $\varphi(x)$ păstrează un semn constant pe intervalul (a, b), dar sînt şi cazuri cînd $\varphi(x)$ îşi schimbă semnul pe acest interval. Un mare rol joacă numărul

$$K^* = \int_a^b |\varphi(x)|\, dx. \tag{10}$$

Se arată că dacă M_{n+1} este o margine superioară a lui $|f(x)^{(n+1)}|$ pe intervalul $[a, b]$, *avem evaluarea*

$$|R| \leqslant K^* M_{n+1}. \tag{11}$$

Este evident că formula de cvadratură (6) este cu atît mai bună pentru aplicații, cu cît numărul K^* este mai mic.

7. D. V. Ionescu a arătat că dacă se consideră două formule de cvadratură de același grad de exactitate, însă cu noduri diferite, pentru care numerele (10) sînt K'^* și K''^*, se va socoti ca *preferabilă* formula de cvadratură pentru care numărul K^* este mai mic.

De exemplu, în formula de cvadratură a lui Newton

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}\,[f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)] + \int_a^b \varphi_N(x) f^{(4)}(x)dx,$$

nodurile x_1, x_2 împărțind în trei părți egale intervalul (a, b), și în formula lui Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + \int_a^b \varphi_S(x) f^{(4)}(x)dx$$

funcțiile $\varphi_N(x)$ și $\varphi_S(x)$ sînt negative în intervalul (a, b) și avem

$$K_N^* = \frac{(b-a)^5}{2880}, \qquad K_S = \frac{(b-a)^5}{6480} = \frac{4}{9}\,K_S^*.$$

Rezultă că *formula lui Newton este preferabilă formulei lui Simpson* [28].

8. D. V. Ionescu [24] a generalizat formula de cvadratură a lui N. Obreschkoff [60].

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{C_k^1}{C_{i+k}^1}\frac{b-a}{1\,!}f(b) - \frac{C_k^2}{C_{i+k}^2}\frac{(b-a)^2}{2\,!}f'(b) + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{C_k^k}{C_{i+k}^k}\frac{(b-a)^k}{k\,!}f^{(k-1)}(b) +$$

$$+ \frac{C_i^1}{C_{i+k}^1}\frac{b-a}{1\,!}f(a) + \frac{C_i^2}{C_{i+k}^2}\frac{(b-a)^2}{2\,!}f'(a) + \ldots + \frac{C_i^i}{C_{i+k}^i}\frac{(b-a)^i}{i\,!}f^{(i-1)}(a) +$$

$$+ (-1)^k \frac{1}{(i+k)\,!}\int_a^b (x-a)^k (b-x)^i f^{(i+k)}(x)dx, \tag{12}$$

obținînd formula

$$\int_a^b J_n(x) f(x)dx = \frac{1}{C_{n+p}^p}\left[\frac{C_{n+p}^{n+1}}{C_{n+p+q}^1}\frac{b-a}{1\,!}f(b) - \frac{C_{n+p}^{n+2}}{C_{n+p+q}^2}\frac{(b-a)^2}{2\,!}f'(b) + \ldots\right.$$

$$\left. + (-1)^{q-1}\cdot\frac{C_{n+q}^{n+q}}{C_{n+p+q}^p}\frac{(b-a)^q}{q\,!}f^{(p-1)}(b)\right] +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{C_{n+p}^p}\left[\frac{C_{n+p}^{n+1}}{C_{n+p+q}^1}\frac{b-a}{1\,!}f(a) + \frac{C_{n+p}^{n+2}}{C_{n+p+p}^2}\frac{(b-a)^2}{2\,!}f'(a) + \ldots +\right.$$

$$\left. + \frac{C_{n+p}^{n+p}}{C_{n+p+p}^p}\frac{(b-a)^p}{p\,!}f^{(p-1)}(a)\right] +$$

$$+ \frac{(-1)^q}{C_{n+p}^p\,(n+p+q)!\,(b-a)^n}\int_a^b (x-a)^{n+q}(b-x)^{n+p} f^{(n+p+q)}(x)dx, \tag{13}$$

unde $J_n(x)$ este *polinomul lui Jacobi*, definit de formula

$$J_n(x) = J_n(p+q+1,\ p+1;\ x) =$$

$$= \frac{(-1)^n p\,!}{(n-p)\,!\,(b-a)^n\,(x-a)^p\,(b-x)^q}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^{n+p}(b-x)^{n+q}]$$

Pentru $n = 0$, $p = i$ și $q = k$ formula (13) se reduce la formula lui Obreschkoff (12).

9. D. V. Ionescu a studiat formula de cvadratură cu două noduri

$$x_1 = x_0 - uh,\ x_2 = x_0 + uh \qquad \left(x_0 = \frac{a+b}{2},\quad h = \frac{b-a}{2}\right).$$

simetrice față de mijlocul intervalului (a, b) și a demonstrat că cea mai preferată formulă de cvadratură din această categorie este formula

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\,[f(x_1) + f(x_2)] + \int_a^b \varphi(x) f''(x)dx, \tag{14}$$

care corespunde la $u = 2(2-\sqrt{3})$, deoarece în acest caz avem

$$|R| \leqslant K^* M_2, \qquad K^* = 0{,}0718\,h^3.$$

Reamintim că pentru formula trapezului cu nodurile a, b și pentru formula trapezului cu nodul x_0 dublu, atît de des întrebuințate, avem

$$|R'^*| \leqslant K'^* M_2, \qquad K'^* = \frac{2}{3}\,h^3,$$

$$|R''^*| \leqslant K''^* M_2, \qquad K''^* = \frac{1}{3}\,h^3.$$

Comparînd pe K^* cu K'^* şi K''^*, deducem că formula (14) este preferabilă formulelor de cvadratură ale trapezului şi o recomandăm pentru aplicaţii.

10. D. V. Ionescu a studiat formule de cvadratură cu nodul dublu $x_2 = \frac{a+b}{2}$ şi două noduri x_1, x_3, unde

$$x_1 = x_2 - uh, \quad x_3 = x_2 + uh \qquad \left(h = \frac{b-a}{2}\right),$$

şi a ajuns la următoarele concluzii :

1°. În formula de cvadratură

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{27}[8f(x_1) + 11f(x_2) + 8f(x_3)] + \int_a^b \varphi(x)f^{(4)}(x)dx \quad (15)$$

corespunzînd la $u = \frac{3}{4}$, funcţia $\varphi(x)$ este pozitivă în intervalele (a, x_0), (x_0, b) şi nulă în x_0. Pentru această formulă avem

$$|R| \leqslant K^* M_4,$$

unde

$$K^* = \frac{3}{32} \cdot \frac{(b-a)^5}{2880} = 0{,}0938\,\frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Reamintim că pentru formula lui Simpson, numărul corespunzător K'^* este

$$K'^* = \frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Formula de cvadratură (15) este cea mai preferată dintre formulele cu nodul x_2 dublu şi nodurile x_1, x_3 simetrice faţă de nodul x_2 şi pentru care funcţia $\varphi(x)$ este pozitivă în intervalul (a, b). Ea este preferabilă faţă de formula lui Simpson atît de des întrebuinţată, deoarece avem $K^* = \frac{3}{32} K'^*$.

2°. În formula de cvadratură

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2166}[625f(x_1) + 916f(x_2) + 625f(x_3)] + \int_a^b \varphi(x)f^{(4)}(x)dx \quad (16)$$

corespunzînd lui $u = \frac{19}{25}$, funcţia $\varphi(x)$ îşi schimbă semnul în intervalul (a, b). Avem

$$|R| \leqslant K^* M_4, \qquad K^* = 0{,}07679\,\frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Ea este cea mai preferată dintre formulele cu nodul x_2 dublu şi cu nodurile x_1, x_3 simetrice faţă de x_2 şi este preferabilă atît faţă de formula lui Simpson, cît şi faţă de formula (15).

Pentru aplicaţii, cele mai indicate sînt formulele de cvadratură (15) şi (16).

A. Coţiu [10], [12] a studiat formule de cvadratură cu nodurile a, b şi două noduri x_1, x_2,

$$x_1 = x_0 - uh, \quad x_2 = x_0 + uh \qquad \left(x_0 = \frac{a+b}{2}, \quad h = \frac{b-a}{2}\right),$$

simetrice faţă de mijlocul x_0 al intervalului (a, b), şi a ajuns la concluzia că formula de cvadratură

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{1512}[131f(a) + 625f(x_1) + 625f(x_2) + 131f(b)] + \\ + \int_a^b \varphi(x)f^{(4)}(x)dx, \quad (17)$$

corespunzînd lui $u = \frac{11}{25}$, este cea mai preferată dintre formulele din această categorie, deoarece pentru această formulă avem

$$|R| \leqslant K^* M_4, \quad K^* = 0{,}0948\,\frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Deşi formula de cvadratură a lui Simpson este foarte simplă, şi atît de des întrebuinţată, totuşi exemplele arătate mai sus (formulele (15), (16) şi (17)) arată că este preferabil să se întrebuinţeze aceste formule, deoarece, în evaluarea restului, factorul K este mai mic decît factorul corespunzător din formula lui Simpson.

A. Coţiu [11] a mai studiat restul în formula lui Hardy

$$\int_{a-3h}^{a+3h} f(x)dx = h\{2{,}2f(a) + 1{,}62[f(a-2h) + f(a+2h)] + \\ + 0{,}28[f(a-3h) + f(a+3h)]\} + R,$$

la care a pus restul sub formă de integrală definită

$$R = \int_{a-3h}^{+} \varphi(x)f^{(6)}(x)dx$$

şi a dat o evaluare pentru valoarea absolută a restului,

$$|R| \leqslant \frac{M_6}{200} h^7,$$

unde M_6 este o margine superioară a valorii absolute a lui $|f^{(6)}(x)|$ pe intervalul $[a-3h, a+3h]$.

11. Se știe cît de importante sînt diferențele divizate ale unei funcții în calculul numeric. D. V. Ionescu a reprezentat diferența divizată a formulei $f(x)$ pe nodurile $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$ printr-o integrală definită

$$[a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b] = \int_a^b \varphi(x) f^{(n+1)}(x)dx, \tag{18}$$

studiind funcția $\varphi(x)$ din această formulă. S-a arătat că pe intervalele $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x, b]$ funcția $\varphi(x)$ coincide cu funcțiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$, care se definesc în modul următor:

Se consideră dezvoltarea în funcții raționale simple

$$\frac{1}{(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_n)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n} + \frac{B}{x-b}$$

și se notează

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (-1)^{n+1} A \\ \alpha_2 &= (-1)^n (A + A_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n+1} &= (-1)(A + A_1 + \ldots + A_n); \end{aligned}$$

$\varphi_1(x)$ este integrala ecuației diferențiale

$$\varphi_1^{(n)}(x) = \alpha_1, \tag{19}$$

care satisface la condițiile

$$\varphi_1^{(j)}(a) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{20}$$

iar $\varphi_i(x)$ este integrala ecuației diferențiale

$$\varphi_i^{(n)}(x) = (-1)^{i-1}\alpha_i, \quad (i = 2, 3, \ldots, n+1) \tag{19'}$$

care satisface la condițiile

$$\varphi_i^{(j)}(x_{i-1}) = \varphi_{i-1}^{(j)}(x_{i-1}) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{20'}$$

S-a demonstrat că funcția $\varphi(x)$ astfel construită este pozitivă în intervalul (a, b).

S-a făcut reprezentarea diferenței divizate (18) sub forma unei integrale definite și în cazul cînd nodurile $a, x_1, x_2, \ldots, x, b$ sînt multiple.

S-au făcut aplicații ale acestei reprezentări la determinarea restului în formula de interpolare a lui Lagrange, și la formula de interpolare a lui Lagrange-Hermite.

De asemenea, s-a făcut aplicații ale acestei reprezentări la integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.

12. D. V. Ionescu a tratat cazul formulelor de cvadratură cu noduri simple sau multiple, punînd restul lor sub formă de integrală definită.

13. D. V. Ionescu a obținut formula de cvadratură de tip Gauss în următorul mod.

La integrala

$$\int_a^b p(x)f(x)dx$$

și la nodurile interioare $x_1, x_2, \ldots, x_n$ date, a atașat, conform metodei de lucru arătate mai sus, funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$, integrale ale ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_1^{(2n)}(x) = p(x), \quad \varphi_2^{(2n)}(x) = p(x), \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1}^{(2n)}(x) = p(x)$$

și condiții (A), astfel ca să se obțină formula generală de cvadratură de forma

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)f(x)dx &= C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) + \\ &+ \varphi_{n+1}^{(2n-1)}(b)f(b) - \varphi_{n+1}^{(2n-2)}(b)f'(b) + \ldots + (-1)^{n-1}\varphi_{n+1}^{(n)}(b)f^{(n-1)}(b) + \\ &+ \int_a^b \varphi(x)f^{(2n)}(x)dx. \end{aligned} \tag{21}$$

Dacă nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt necunoscute și la condițiile (A) se adaugă condițiile

$$\varphi_{n+1}^{(n)}(b) = 0, \quad \varphi_{n+1}^{(n+1)}(b) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1}^{(2n-1)}(b) = 0, \tag{22}$$

atunci nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se determină; ele sînt reale, distincte și cuprinse între a și b și se ajunge la formula de cvadratură de tip Gauss

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = C_1' f(x_1') + C_2' f(x_2') + \ldots + C_n' f(x_n') + \int_a^b \varphi(x)f^{(2n)}(x)dx,$$

cu restul ei. S-a demonstrat că în această formulă funcția $\varphi(x)$ este pozitivă.

Din formula generală de cvadratură, D. V. Ionescu a dedus următoarea concluzie practică relativ la aplicarea formulei de cvadratură de tip Gauss (23).

În general $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile reale, distincte și cuprinse între a și b ale unei ecuații algebrice. Ele sînt aproximate cu numere zecimale $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ cu un număr finit de zecimale. Atunci, pentru calculul integralei considerate, se poate folosi formula de cvadratură de tip Gauss (23), înlocuind pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, însă calculîndu-se erorile care se fac cînd în locul lui $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ se iau valorile aproximative $f(x_1'), f(x_2'), \ldots, f(x_n')$. Acest calcul poate să fie anevoios. De aceea, se recomandă folosirea formulei generale de cvadratură (21), înlocuind pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, adică formula

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = C_1'f(x_1') + C_2'f(x_2') + \ldots + C'f(x_n') + \tag{24}$$

$$+ \varepsilon + \int_a \varphi(x)f^{(2n)}(x)dx,$$

unde termenul ε are rolul unei *corecții*, egale cu

$$\varepsilon = \varphi_{n+1}^{(2n-1)}(b)f(b) - \varphi_{n+1}^{(2n-2)}(b)f'(b) + \ldots + (-1)^{n-1}\varphi_{n+1}^{(n)}(b)f^{(n-1)}(b). \tag{25}$$

De exemplu, pentru $p(x) = 1$ și $n = 2$, formula de cvadratură a lui Gauss este

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,[f(x_1) + f(x_2)] + \int_a^b \varphi(x)f^{(4)}(x)dx,$$

unde nodurile sînt

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\xi_1, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_1, \quad \xi_1 = 0{,}57735027\ldots$$

Dacă în aproximarea lui ξ_1 ne limităm la numărul $\xi_1 = 0{,}577$ cu trei zecimale exacte, atunci formula (24) devine

$$\int_a^b f(x)dx = C_1'f(x_1') + C_2'f(x_2') + \varepsilon + \int_a^b \varphi(x)f^{(4)}(x)dx, \tag{26}$$

unde *corecția* ε este dată de formula

$$\varepsilon = 0{,}002422(b-a)f(b) - 0{,}0006061\,\frac{(b-a)^2}{2!}\,f'(b), \tag{27}$$

și se vede bine că dacă se aplică formula (26) la o funcție $f(x)$ pentru care $f(b)$, $f'(b)$ sînt destul de mari, *corecția* ε *este apreciabilă.*

D. V. Ionescu [22], [23] a dat și o nouă formulă de cvadrăratu de tip Gauss, cu nodurile a și b multiple de forma

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)f(x)dx = {} & C_1f(x_1) + C_2f(x_2) + \ldots + C_nf(x_n) + \\ & + A_0f(a) + A_1f'(a) + \ldots + A_{i-1}f^{(i-1)}(a) + \\ & + B_0f(b) + B_1f'(b) + \ldots + B_{k-1}f^{(k-1)}(b) + \\ & + \int_a^b \varphi(x)f^{(2n+i+k)}(x)dx,\end{aligned} \tag{28}$$

care conține ca un caz particular și formula lui N. Obreschkoff, pentru $n = 0$.

S-a demonstrat că, în formula (28), funcția $\varphi(x)$ este pozitivă în intervalul (a, b).

S-a arătat că observația cu privire la calculul practic al integralei $\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x$, făcută la formula de cvadratură (23), este aplicabilă și la formula (28), utilizînd în acest scop o formulă generală de cvadratură analoagă cu formula (24), avînd un termen important *corecția* ε.

14. În legătură cu un procedeu al lui V. I. Krîlov [53] de îmbunătățire a gradului de exactitate a formulelor de cvadratură, D. V. Ionescu a dat de asemenea un procedeu bazat pe studiul restului formulelor de cvadratură [20]. În legătură cu aceasta, amintim și lucrările sale asupra *formulei lui Boulle* [34] și asupra unei *formule a lui Abel* [31].

15. Se știe cît de mult sînt aplicate formulele de cvadratură cu noduri exterioare. Este suficient să amintim formulele de cvadratură care provin din formulele de interpolare ale lui Newton cu noduri în progresie aritmetică la stînga, ale lui Bessel și ale lui Stirling. Aceste formule sînt aplicate și în integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale, de exemplu la obținerea formulei de integrare numerică a lui Adams. Utilizarea pe scară mare a acestor formule a făcut pe D. V. Ionescu să le studieze amănunțit, mai ales în ceea ce privește restul lor.

D. V. Ionescu [32], [35], [40] a arătat cum trebuie modificată metoda sa de cercetare pentru a obține formula de cvadratură cu noduri exterioare, obținînd și restul pe care l-a pus sub formă de integrală definită.

Astfel, dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt noduri la stînga lui a în ordine descrescătoare și $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ sînt noduri la dreapta lui b în ordine crescătoare, s-a obținut formula de cvadratură de forma

$$\int_a^b p(x)\,f(x)dx = \sum_{i=1}^n A_if(x_i) + \sum_{k=1}^m A_k'f(x_k') + \int_{x_n'}^{x_m'} \varphi(x)f^{(m+n)}(x)dx, \tag{29}$$

unde $p(x)$ este o funcţie continuă pozitivă în intervalul (a, b), putîndu-se anula în a şi b, iar $f(x)$ o funcţie de clasa C^{n+m}, pe intervalul $[x_n, x'_m]$. S-a demonstrat că în formula (29) funcţia $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_n, x'_m).

Un exemplu simplu atrage atenţia asupra interesului acestui studiu. Dacă se aleg nodurile $x_0 - 2h$, $x_0 - 3h$, $x_0 + 2h$, $x_0 + 3h$ exterioare intervalului $[x_0 - h, x - h]$, se obţine formula de cvadratură

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{h}{15}\{26[f(x_0-2h)+f(x_0+2h)] - 11[f(x_0-3h)+f(x_0+3h)]\} +$$

$$+ \int_{x_0-3h}^{x_0+3h} \varphi(x)f^{(4)}(x)dx.$$

Restul în această formulă are următoarea evaluare :

$$|R| \leqslant K^* M_4,$$

unde M_4 este o margine superioară a lui $|f^{(4)}(x)|$ pe intervalul $[x_0 - 3h, x_0 + 3h]$, iar

$$K^* = 239\,\frac{(2h)^5}{2880}.$$

Dacă comparăm formula de cvadratură (30) cu formula de cvadratură (16) cu noduri interioare şi de acelaşi grad de exactitate, găsim pentru formula (16)

$$|R'| \leqslant K'^* M'_4$$

unde M_4 este o margine superioară a lui $|f^{(4)}(x)|$ pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$; avem $M_4^0 \leqslant M_4$, iar

$$K'^* = 0{,}07679\,\frac{(2h)^5}{2880}.$$

Comparînd pe K^* cu K'^* rezultă

$$\frac{K^*}{K'^*} = \frac{239}{0{,}07679} > 3112,$$

de unde reiese că formula (16) cu noduri interioare este cu mult mai preferabilă decît formula (30) cu noduri exterioare.

D. V. Ionescu a stabilit direct, aplicînd metoda sa de cercetare, formulele de cvadratură care de obicei se obţin din formulele de interpolare, ale lui Newton cu noduri în prograsie aritmetică la stînga, a lui Bessei şi a lui Stirling. A comparat numerele K^* ale acestor formule cu numerele K'^* ale formulelor de cvadratură ale lui Gauss cu noduri interioare şi de acelaşi grad de exactitate şi a dedus că formulele de cvadratură ale lui Gauss sînt cu mult preferabile formulelor de cvadratură cu noduri exterioare.

Astfel, pentru formula de cvadratură care provine din formula de interpolare a lui Newton cu noduri în progresie aritmetică la stînga, în care $n = 10$, şi pentru formula de cvadratură a lui Gauss de acelaşi grad de exactitate, avem

$$\frac{K^*}{K'^*} \geqslant 710\,246\,014\,380.$$

P a r a s c h i v a M u n t e a n u [58], aplicînd aceeaşi metodă de cercetare, a stabilit formula de cvadratură

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \int_a^{x_n} \varphi(x) f^{(n)}(x)dx,$$

unde nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt în progresie aritmetică şi $x_1 = a, x_3 = b$. Ea a demonstrat că funcţia $\varphi(x)$ păstrează un semn constant pe intervalul (a, x_n) şi a dedus concluzii importante în evaluarea restului şi în compararea cu alte formule de cvadratură.

16. Formulele de interpolare sînt deosebit de importante în teoria formulelor de cvadratură. Integrînd ambii membri ai unei formule de interpolare, se obţine o formulă de cvadratură. Astfel de cercetări în teoria formulelor de cvadratură au fost făcută în mod sistematic de D. D. Stancu, perfecţionînd unele formule de interpolare şi construind formule de cvadraturi deosebit de interesante.

D. D. S a n c u [83] a considerat polinoamele de interpolare ale lui Hermite

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{p-1} l_{i,k}(x) f^{(k)}(x_i), \tag{34}$$

relativ la nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_s$ cu ordinele de multipltcitate $r_1, r_2, \ldots r_s$, $f(x)$ fiind o funcţie care are derivate cel puţin pe nodurile care inervin în formulă şi a dat următoarele formule pentru polinoamele fundamentale de interpolare :

$$l_{i,k}(x) = \sum_{r=0}^{r_i-k-1} \frac{(x-x_i)^k}{k!}\left[\frac{(x-x_i)^r}{r!}\left(\frac{1}{g_i(x)}\right)^{(r)}_{x_i}\right] g_i(x), \tag{35}$$

unde

$$g_i(x) = \frac{l(x)}{(x-x_i)^{r_i}}, \tag{36}$$

$$l(x) = (x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2} \ldots (x - x_s)^{r_s}.$$

D. D. Stancu a utilizat polinomul de interpolare care corespunde la $s = 2$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $r_1 = m$, $r_2 = n$ la obţinerea formulei de cvadratură a lui Hermite-Obreschkoff [60] şi la obţinerea formulei de derivare numerică

$$f^{(m+n)}(a) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k f^{(k)}(a) + \sum_{r=0}^{n-1} B_r f^{(r)}(b) + R[f], \tag{37}$$

pentru care a dat expresia coeficienților A_k, B_r și a arătat că restul $R[f]$ este de forma

$$R[f] = \frac{(m+p)!}{(m+n)!}\binom{n}{p}(a-b)^{n-p}f^{(n+m)}(\xi), \tag{38}$$

unde $\xi \in (a, b)$. Cu această ocazie a dat și formule găsite anterior de T. Popoviciu [67].

17. D. D. Stancu a arătat că dacă în formula de cvadratură [84].

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{p} B_j f(\lambda_j) + R[f] \tag{39}$$

de grad de exactitate $n + p - 1$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului lui Lagrange, atunci $B_1 = B_2 = \ldots = B_p = 0$.

Acest rezultat este valabil și dacă $p = n$, iar nodurile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se confundă cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se regăsește astfel un rezultat dat de A. A. Markov [55].

18. D. D. Stancu [82] a dat o generalizare formulei de cvadratură a lui Christoffel [7], construind formula

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(x_\nu) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} C_{i,j} f^{(j)}(a_i) + R[f], \tag{40}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_s$ sînt noduri date, multiple de ordinele $r_1, r_2, \ldots, r_s$, astfel ca polinomul

$$W(x) = (x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\ldots(x-a_s)^{r_s}$$

să fie nenegativ pe intervalul $[-1, +1]$.

Generalizarea constă în determinarea nodurilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, astfel ca formula (40) să aibă gradul de exactitate maxim. Nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile unui polinom ortogonal pe intervalul $[-1, +1]$ relativ la ponderea $W(x)$, cu orice polinom de gradul $n - 1$. Se determină și restul $R[f]$ al acestor formule.

Ca exemple de acest fel de formule se citează formulele

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \frac{1}{6}\left[f(-1) + 5f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 5f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + f(1)\right] - \frac{2}{23625}f^{(6)}(\xi) \tag{41}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{105}\left[19f(-1) + f'(-1) + 54f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 64f(0) + 54f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \right.$$

$$\left. + f'(+1) + 19f(+1)\right] + \frac{1}{589396500}f^{(10)}(\xi) \tag{42}$$

de gradele de exactitate 5 și 9.

18. D. D. Stancu [88] a considerat formula de cvadratură de forma

$$\int_a^b p(t)f(t)dt = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{r_i-1} A_{i,k} f^{(k)}(t_i) + R[f] \tag{43}$$

și a numit *formulă generalizată de tip Gauss*, cu gradul de exactitate $2N - 1$, orice formulă de tipul precedent, în care N este numărul coeficienților $A_{i,k}$ diferiți de zero. În această categorie de formule intră formula clasică a lui Gauss, precum și formula

$$\int_{-a}^{+a} p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{2n} A_i f(x_i) + \sum_{k=0}^{s-1} C_{2k} f^{(2k)}(0) + R[f],$$

în care nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ sînt rădăcinile polinomului $D_{2n,2s}(x)$, ortogonal pe intervalul $(-a, +a)$ 2 finit sau infinit — față de ponderea $q(x) = p(x)x^{2s}$, unde $p(x)$ este o funcție pară, cu orice polinom de gradul $2n - 1$. Clasa de polinoame $D_{2n,2s}(x)$ a fost studiată tot de D. D. Stancu.

Ca exemple se dau formulele

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \frac{1}{514500}[440832f(0) + 8960f''(0) +$$

$$27(5446 - 537\sqrt{14})(f(x_1) + f(x_4)) + 27(5446 + 537\sqrt{14})(f(x_2) + f(x_3))] +$$

$$+ \frac{1}{476804928600}f^{(12)}(\xi), \tag{44}$$

unde

$$x_4 = -x_1 = \sqrt{\frac{21 + 2\sqrt{14}}{33}}, \quad x_3 = -x_2 = \sqrt{\frac{21 - 2\sqrt{14}}{33}}$$

și

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}f(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4900}[3808f(0) + 280f''(0) +$$

$$+ 3(91 - 23\sqrt{14})(f(x_1) + f(x_3)) + 3(91 + 23\sqrt{14})(f(x_2) + f(x_4))] +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{36495360}f^{(12)}(\xi). \tag{45}$$

19. D. D. Stancu [89] a arătat cum se pot construi formulele de cvadratură de tip Gauss-Christoffel avînd forma

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(x_\nu) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} C_{i,j} f^{(j)}(a_i) + R[f]. \tag{46}$$

în care funcţia $p(x)$ este negativă şi integrabilă R pe intervalul (a, b) — finit sau infinit — şi pentru care există momentele

$$C_n = \int_a^b p(x)x^n dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),\ C_0 > 0.$$

Nodurile $a_1, a_2, \ldots a_s$ sînt astfel alese ca polinomul

$$\omega(x) = \pi \prod_{i=1}^{s} (x - a)^{r_i}$$

să păstreze un semn constant pe (a, b).

Nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile unui polinom $h(x)$ ortogonal pe (a, b), faţă de ponderea $p(x)\omega(x)$, cu orice polinom de gradul $n - 1$. Formula (46) are astfel gradul maxim de exactitate.

Ca exemplu se dă formula

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2}\, f(x)dx = \frac{\pi}{1568}[392 f(0) + 7f''(0) +$$
$$+ 2(49 - 10\sqrt{7})(f(x_1) + f(x_3)) + 2(49 + 10\sqrt{7})(f(x_2) + f(x_4))] +$$
$$+ \frac{\pi}{2.942\,985\,830\,400} f^{(12)}(\xi),$$

unde

$$x_3 = -x_1 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{7}}{12}}, \quad x_4 = -x_2 = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{7}}{12}}, \quad \xi \in (-1, +1)$$

20. D. D. S t a n c u [90] a considerat funcţionala liniară

$$U[f] = \int_a^b f(x)d\psi(x), \tag{48}$$

n care funcţia $\psi(x)$ este mărginită, nedescrescătoare şi cu o infinitate de puncte de creştere pe intervalul (a, b) — finit sau infinit — şi pentru care există momentele $C_n = U[x^n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, integrala fiind luată în sensul lui Stieltjes.

$$U[f] = \varphi\,[f] + R, \tag{51}$$

unde

$$\varphi\,[f] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{r_i - 1} A_{i,j} f^{(j)}(x_i) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\mu=0}^{\alpha_\mu - 1} B_{\nu,\mu} f^{(\mu)}(a_\nu)$$

nodurile $a_1, a_2, \ldots, a_s$ îndeplinind condiţia ca $\omega(x) = \prod_{\nu=1}^{s} (x - a_\nu)^{\alpha_\nu} \neq 0$ pe intervalul (a, b).

Se determină nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ multiple de ordinele $r_1, r_2, \ldots r_m$ astfel ca formula de cvadratură (49) să aibă gradul de exactitate maxim $N = n_1 + n_2 + m - 1$ unde

$$n_1 = r_1 + r_2 + \ldots + r_m, \quad m_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s.$$

Ecuaţiile care determină pe $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt

$$U\,[\omega\, l x^i] = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m - 1),$$

unde

$$l(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)^{r_i}$$

S-a arătat că sistemul de ecuaţii (51) are totdeauna cel puţin o soluţie reală în $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Pentru $s = 0$, se obţine formula de cvadratură de tip Gauss generalizată a lui T. P o p o v i c i u [68].

Pentru $s = 0$, $r_1 = r_2 = \ldots, = r_m = r$, unde r este un număr impar, se obţine formula de cvadratură generalizată a lui P. Turan [97].

Pentru $s = 0$, $r_1 = r_2 = \ldots = r_m = 1$, se obţine formula clasică de tip *Gauss*.

21. D. D. S t a n c u [91] a dat formule pentru calculul coeficienţilor formulei de cvadratură

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{r_i - 1} A_{i,k} f^{(k)}(x_i) + R[f], \tag{52}$$

pe care le-a extins şi la formule de cubatură care folosesc reţele dreptunghiulare de noduri, servindu-se de anumite funcţii auxiliare.

D. D. S t a n c u [95] a făcut şi un studiu unitar al formulelor de cvadratură de tip Gauss şi de asemenea a arătat [92] cum se pot calcula coeficienţii unei formule de cvadratură de tip Gauss-Christoffel, utilizînd funcţii auxiliare.

§ 3. Integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale ordinare

22. Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

variabilele x şi y fiind reale. Presupunem că funcţia $f(x, y)$ se dezvoltă în serie întreagă după puterile lui $x - x_0$, $y - y_0$ absolut convergentă cînd $|x - x_0| < r$, $|y - y_0| < R$. În acest caz, ecuaţia diferenţială (1) are o integrală unică, ce satisface la condiţia $y(x_0) = y_0$, care se dezvoltă în serie întreagă după puterile lui $x - x_0$, absolut convergentă cînd $|x - x_0| \leqslant r_1 < r$.

Scriind x în loc de x_0 şi y în loc de y_0, diferenţa $y(x+h)-y(x)$, unde $|h| \leqslant r_1$, se dezvoltă după puterile lui h;

$$y(x+h)-y(x)=\frac{h}{1!}y'(x)+\frac{h^2}{2!}y''(x)+\ldots \tag{2}$$

R u n g e [75] a arătat că dacă se calculează

$$\begin{aligned} m_1 &= hf(x,y), \\ m_2 &= hf\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{m_1}{2}\right), \\ m_3 &= hf(x+h, y+m_1), \\ m_4 &= hf(x+h, y+m_3), \end{aligned} \tag{3}$$

atunci funcţia de h

$$K(h)=\frac{m_1+4m_2+m_4}{6},$$

dezvoltată în serie după puterile lui h, are primii trei termeni identici cu primii trei termeni din dezvoltarea (2).

K u t t a [54] a arătat că dacă se calculează

$$\begin{aligned} n_1 &= hf(x,y), \\ n_2 &= hf\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{n_1}{2}\right) \\ n_3 &= hf\left((x+\frac{h}{2}, y+\frac{n_2}{2}\right), \\ n_4 &= hf(x+h, y+n_3), \end{aligned} \tag{4}$$

atunci funcţia de h

$$K(h)=\frac{n_1+2n_2+2n_3+n_4}{6}, \tag{4'}$$

dezvoltată în serie după puterile lui h, are primii patru termeni identici cu primii patru termeni din dezvoltarea (2).

D. V. I o n e s c u [26] a dat o generalizare a proprietăţilor puse în evidenţă de Runge şi Kutta, indicînd un procedeu regulat pentru construirea unei funcţii $K(h)$ analoagă cu funcţiile date de formulele (3′), (4′), care, dezvoltată după puterile lui h, să aibă primii p termeni, unde p este un număr natural dat, identici cu primii p termeni ai dezvoltării (2).

Procedeul lui D. V. I o n e s c u este următorul;

Se consideră nodurile $x+\lambda_i h$, unde $i=1, 2, \ldots, n$ şi o formulă de cvadratură

$$\int_x^{x+h} \varphi(s)ds = \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi(x+\lambda_i h)+R[\varphi], \tag{5}$$

avînd gradul de exactitate $m \geqq n-1$.

Dacă printr-un mijloc oarecare s-au putut calcula diferenţele

$$K_i(h)=y(x+\lambda_i h)-y(x)$$

cu ajutorul funcţiei $f(x, y)$, astfel ca dezvoltînd pe $K_i(h)$ după puterile lui $\lambda_i h$ să avem

$$K_i(h)=\frac{\lambda_i h}{1!}y'+\frac{(\lambda_i h)^2}{2!}y''+\ldots+\frac{(\lambda_i h)^m}{m!}+\ldots, \tag{6}$$

atunci funcţia de h

$$K(h)=\sum_{i=1}^{n} A_i f(x+\lambda_i h, y+k_i(h)), \tag{7}$$

dezvoltată în serie după puterile lui h, are primii $m+1$ termeni identici cu primii $m+1$ termeni ai dezvoltării (2).

D. V. I o n e s c u [30] a extins procedeul său la sisteme de ecuaţii diferenţiale şi la ecuaţii diferenţiale de ordin superior.

O. A r a m ă [1] a dat o delimitare a restului în formula de integrare numerică de tip Runge-Kutta, stabilită de D. V. Ionescu.

Notînd cu $K_m(h)$ funcţia de aproximaţie de ordinul m a integralei, se dă următoarea delimitare :

$$|K_m(x+h)-y(x+h)| \leqslant h^{m+1}[\alpha_0 N_m+\alpha_1 LN_{m-1}+\ldots+\alpha_{m-1}L^{m-1}N,] \tag{8}$$

unde

$$N_k=\sup_{(D)}\left|\frac{d^k}{dx^k}f[x, y(x)]\right|,$$

$$L=\sup_{(D)}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|. \tag{9}$$

D fiind un anumit domeniu care se precizează, iar $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ coeficienţi numerici, care de asemenea se precizează.

Metoda precedentă de delimitare a restului a fost extinsă de O. A r a m ă şi la ecuaţii diferenţiale de ordin superior.

23. Se ştie că L. B i e b e r b a c h [2], [3] a dat o delimitare a restului în formulele lui Runge-Kutta şi a arătat că restul este de ordinul lui h^5.

E. S c h e c h t e r [77], [78], [79] a arătat că pentru a calcula aproximativ integrala unei ecuaţii diferenţiale $y'=f(x, y)$ cu condiţia $y(x_0)=y_0$, pe n noduri ale unui interval, se aplică succesiv formulele lui Runge-Kutta şi atunci se pune problema unei noi delimitări şi a unui studiu al acumulării erorilor la aplicarea succesivă a formulelor de integrare. Cercetările lui E. Schechter s-au îndreptat în această direcţie.

24. A. Coţiu [13] în problema integrării numerice a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x,y)$, cu condiţia $y(x_0) = y_0$, a dat următoarele procedee de integrare numerică :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[f(x_i, y_i) + 4f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) + \right.$$

$$\left. + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))\right] \tag{10}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}\left[f(x_i, y_i) + 3f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i)\right) + \right.$$

$$\left. + 3f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3} f(x_j, y_i)\right) + f(x_j + h, y_i + hf(x_i, y_i))\right] \tag{11}$$

şi, evaluînd erorile, a dedus că procedeul dat de formulele (11) este preferabil celui dat de formulele (10).

În aceeaşi problemă, A. Coţiu [14] a dat delimitări pentru erorile care se fac în procedeele de tip Runge—Kutta, de ordinul al treilea şi al patrulea, aplicînd metoda lui L. Bieberbach, însă cu delimitări mai precise pentru funcţia $f(x, y)$ şi derivatele ei parţiale ; de asemenea, urmînd metoda lui L. Bieberbach, a arătat [15] că eroarea în procedeul lui Nyström de ordinul al cincilea de exactitate este de ordinul lui h^6.

A. Coţiu şi F. Coţiu [17], urmînd metoda lui L. Bieberbach, au arătat că eroarea în procedeul de ordinul al cincilea de exactitate al lui Kutta, este de ordinul lui h^6.

25. E. Fehlberg [18] a dat o transformare care permite obţinerea unor procedee de ordinul al şaselea de exactitate pe trei noduri, pentru ecuaţia diferenţială $y' = f(x,y)$ cu condiţia $y(x_0) = y_0$.

A. Coţiu [16] a dat două extinderi ale transformării lui E. Fehlberg, stabilind procedee de ordinul şapte de exactitate pe două sau pe trei noduri şi procedee de ordinul opt de exactitate, pe trei noduri.

26. Se ştie cît de mult este aplicată formula de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale a lui Adams. D. V. Ionescu a făcut cercetări în legătură cu această formulă, obţinînd formule generalizate de tip Adams şi studiind restul lor.

D. V. Ionescu [38] a procedat în modul următor :
Se consideră ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y) \tag{12}$$

şi fie $y(x)$ integrala ei care satisface la condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$. Presupunem că sînt îndeplinite condiţiile pe care trebuie să le satisfacă funcţia $f(x, y)$, într-un dreptunghiu D, astfel ca integrala ecuaţiei diferenţiale (12), care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, să existe şi să fie unică pe intervalul $[x_0, x_0 + a]$.

În intervalul $(x_0, x_0 + a)$, luăm nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, astfel ca $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ şi presupunem că integrala $y(x)$ este cunoscută pe aceste noduri. *Problema integrării numerice a ecuaţiei diferenţiale* (12) *constă în a da formula practică de calcul a integralei* $y(x)$ *într-un punct din intervalul* $(x_0, x_0 + a]$, *cu ajutorul valorilor lui* $y(x)$ *pe nodurile* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *şi de a studia restul formulei de integrare numerică.*

Dacă funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale în raport cu x şi y pînă la ordinul n, continue în domeniul D, atunci, aplicînd formula lui Taylor, vom avea

$$y(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - s)^n}{n!} y^{(n+1)}(s) ds. \tag{13}$$

Problema integrării numerice a ecuaţiei diferenţiale (12), aşa cum a fost pusă mai sus, se reduce prin formula (13) la problema derivării numerice a unei funcţii şi se formulează în modul următor : *fiind dată funcţia* $f(x)$, *continuă în intervalul* $[x_0, x_0 + a]$ *şi cu derivate continue în acest interval de toate ordinele care vor interveni în calcule, să se dea formule practice pentru calculul derivatelor* $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ *pe nodul* x_0, *cu ajutorul valorilor lui* $f(x)$ *pe nodurile* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *şi să se calculeze restul formulei de derivare numerică.*

D. V. Ionescu a studiat formule de derivare numerică ce provin din diferenţe divizate ale funcţiei $f(x)$ pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, nodul x_0 fiind multiplu, reprezentate prin integrale definite, adică formule de forma

$$[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{p+1}, x_1, x_2, \ldots, x_n ; f(x)] = \int_{x_0}^{x_n} \Phi_p(x) f^{(n+p)}(x) dx, \tag{14}$$

demonstrînd că funcţia $\Phi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_0, x_n) şi că

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi_p(x) dx = \frac{1}{(n + p)!}. \tag{15}$$

Din formula (14) se poate deduce $f^{(p)}(x_0)$ cu ajutorul lui $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(p-1)}(x_0)$ şi a lui $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Făcînd $p = 1, 2, \ldots, n$, se deduc derivatele $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ cu ajutorul lui $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Resturile acestor formule sînt combinaţii liniare cu coeficienţi constanţi de membrii ai doilea ai formulelor (14), $(p = 1, 2, \ldots)$. Inconvenientul formulelor obţinute este că în membrul al doilea figurează sub semnul integralei $f^{(n+1)}(x), f^{(n+2)}(x), \ldots$

Pentru a se evita aceasta, D. V. Ionescu, a generalizat formulele de derivare numerică ale lui A. A. Markov [55] pentru care a pus restul sub forma de integrală definită.

Formula de derivare numerică obţinută este

$$\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} =$$
$$= [x_0, x_1, \ldots, x_p; f(x)] - \mu_1(x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0)[x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}; f(x)] +$$
$$+ \ldots + (-1)^{n+p}\mu_{n-p}(x_1 - x_0, \ldots, x_{n-1} - x_0)[x_0, x_1, \ldots, x_n; f(x)] + \tag{16}$$
$$+ (-1)^{n+p+1}\mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0)\int_{x_0}^{x_n} \psi_p(x) f^{(n+1)}(x)dx,$$

unde s-a notat în general

$$\mu_k(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0) = \sum_{(1,2,\ldots,k)} (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \ldots (x_k - x_0) > 0. \tag{17}$$

S-a demonstrat că funcţia $\psi_p(x)$ din formula (16) este pozitivă şi că

$$\int_{x_0}^{x_n} \psi_p(x)dx = \frac{1}{(n+1)!} \tag{18}$$

Formulele (14) şi (16) au fost aplicate la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale. Ne mărginim să arătăm rezultatele care rezultă din aplicarea formulei (16).

Dacă în formula lui Taylor (13) se înlocuiesc derivatele $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, $\ldots, y^{(n)}(x_0)$ cu ajutorul formulelor de derivare numerică, se obţine *formula de interpolare a lui Lagrange*

$$y(x) = L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)] + R(x), \tag{19}$$

unde restul ei este dat de formula

$$R(x) = -\int_{x_0}^{x_n} \Psi(x, s)\, y^{(n+1)}(s)ds + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^n}{n!} y^{(n+1)}(s)ds, \tag{20}$$

sîmburele $\Psi(x, s)$ fiind dat de formula

$$\Psi(x, s) = \mu_1\, \psi_n(s)(x - x_0)^n - \mu_2 \psi_{n-1}(s)(x - x_0)^{n+1} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n+1}\mu_n\, \psi_1(s)(x - x_0). \tag{21}$$

Formula (20) permite să se evalueze restul $R(x)$ şi din formula găsită se demonstrează că *dacă nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt în progresie aritmetică cu raţia h, atunci $|R(x_0 + \lambda h)|$ este de ordinul lui h^{n+1}*.

Să considerăm acum ecuaţia diferenţială (12) şi să presupunem funcţia $f(x, y)$ este continuă împreună cu derivatele ei parţiale în raport cu x şi y pînă la ordinul n în dreptunghiul D. În acest caz, derivînd succesiv pe $y'(x)$, vom obţine

$$\begin{aligned} y''(x) &= f_1(x, y), \\ y'''(x) &= f_2(x, y), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n+1)}(x) &= f_n(x, y), \end{aligned} \tag{22}$$

funcţiile $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y)$ fiind continue în dreptunghiul D.

Fie $y(x)$ integrala ecuaţiei diferenţiale (12) care satisface la condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$ şi pe care o presupunem cunoscută pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Atunci, aplicînd formula de interpolare a lui Lagrange (19) la această integrală, obţinem *formula de integrare numerică*

$$y(x) = L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)] + R_1(x), \tag{23}$$

unde restul $R_1(x)$ este dat de formula

$$R_1(x) = -\int_{x_0}^{x_n} \Psi(x, s) f_n[s, y(s)]ds + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^n}{n!} f_n[s, y(s)]\, ds. \tag{24}$$

Se arată că dacă nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt în progresie aritmetică cu raţia h, atunci $|R_1(x + \lambda h)|$ este de ordinul lui h^{n+1}.

Ca aplicaţie a formulei de integrare numerică (23), *D. V. Ionescu* a studiat formule de integrare numerică de tip Adams, în care nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt oricum.

Notînd polinomul de interpolare al lui Lagrange din formula (23) cu $L_n(x)$ şi considerînd funcţia $g(x) = f[x, L_n(x)]$ pe noduri, formula generalizată de integrare numerică a lui Adams este

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + B_0[x_n; g(x)] + B_1[x_{n-1}, x_n; g(x)] + \ldots +$$
$$+ B_n[x_0, x_1, \ldots, x_n; g(x)] + R_2, \tag{25}$$

unde

$$B_0 = \int_{x_n}^{x_{n+1}} dx, \quad B_k = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n) \ldots (x - x_{n-k+1})dx,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

În particular, cînd nodurile sînt în progresie aritmetică cu raţia h, formula generalizată de integrare numerică este

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h[g(x_n) + J_1\Delta g(x_{n-1}) + \ldots + J_n\Delta^n g(x_0)] + R_3, \tag{26}$$

unde

$$J_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 u(u+1) \ldots (u+k-1)du.$$

D. V. Ionescu a dat expresia resturilor R_2 şi R_3 şi le-a evaluat. A demonstrat că *restul* R_3 *este de ordinul lui* h^{n+2}.

În cazul $n = 5$, care corespunde formulei de integrare numerică propriu-zisă a lui Adams, restul în nodul x_6 este de ordinul lui h^6 în formula de integrare numerică (19) şi este de ordinul lui h^7 în formula lui Adams.

Amintim că W. Tollmien [96] a stabilit că restul în formula de integrare numerică a lui Adams este de ordinul lui h^7.

D. V. I o n e s c u [43] a extins generalizarea de mai sus a formulei lui Adams la sisteme de ecuaţii diferenţiale şi la ecuaţii diferenţiale de ordin superior.

În [44] arătat că dacă funcţia $f(x,y)$ din ecuaţia diferenţială (42) are derivate parţiale în raport cu x şi cu y pînă la ordinul $n+k$, continue în dreptunghiul D, atunci în formulele (22) se poate înlocui n cu $n+k-1$ şi pornind de la ecuaţia $y^{(k)}(x) = f_{k-1}(x, y)$, se pot deduce formule de integrare numerică de tip Adams, împreună cu restul lor, procedînd ca în lucrarea [38].

În particular, cînd nodurile sînt în progresie aritmetică cu raţia h, restul este de ordinul lui h^{n+k+1}, de unde rezultă superioritatea acestor formule faţă de formulele lui Adams.

27. Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y), \tag{27}$$

unde funcţia $f(x, y)$ este definită şi are derivate parţiale de primul şi al doilea ordin în raport cu x şi y continue în dreptunghiul D definit de inegalităţile.

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \qquad |y| \leqslant b.$$

Fie $y(x)$ integrala acestei ecuaţii diferenţiale care verifică condiţia $y(x_0) = 0$ şi ε un număr pozitiv dat.

D. V. I o n e s c u [37] a arătat că, *aplicînd metoda aproximaţiilor succesive, se poate determina pe intervalul* $(x_0, x_0 + a]$ *o reţea* Γ *de noduri* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *în progresie aritmetică şi un algoritm pentru calculul numerelor* $y_i^{(s)}$, *unde* $s = 0, 1, \ldots, \nu$, *astfel ca să avem*

$$|y(x_i) - y_i^{(\nu)}| < 2\varepsilon \tag{28}$$

pe toate nodurile reţelei Γ.

Pentru a fixa numărul ν, s-a ţinut seamă de metoda aproximaţiilor succesive, iar pentru alegerea numărului n de noduri şi a algoritmului de calcul pentru numerele $y_i^{(s)}$, $s = 0, 1, \ldots, \nu$, s-a ţinut seama de formula de cvadratură a trapezului.

D. V. I o n e s c u [41] a arătat că dacă funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale în raport cu x şi y pînă la ordinul al patrulea continue în dreptunghiul D, atunci se poate folosi, în stabilirea algoritmului pentru obţinerea inegalităţilor (28), formula de cvadratură a lui K. P e t r [61].

D. V. I o n e s c u [42] a aplicat aceeaşi metodă la integrarea numerică a ecuaţiei integrale a lui Volterra.

4. Formule de cubatură

28. Să notăm cu T un triunghi oarecare din planul xoy, ale cărui vîrfuri A, B, C au coordonatele (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), (λ_3, μ_3). Se notează cu L, M, N baricentrele maselor $(\alpha, 1, 1)$, $(1, \alpha, 1)$, $(1, 1, \alpha)$ plasate în vîrfurile A, B, C ale triunghiului. Dînd lui α valorile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, vom obţine nodurile $L_1, L_2, \ldots, L_n$; $M_1, M_2, \ldots, M_n$; $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

D. V. I o n e s c u a studiat [25], [27] formule de cubatură pentru polinoame oarecare $\varphi(x,y)$ cu nodurile fixe L_i, M_i, N_i, unde $i = 1$ 2, $\ldots, n$, de forma

$$\iint_T \varphi(x, y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} P_i[\varphi(L_i) + \varphi(M_i) + \varphi(N_i)], \tag{1}$$

unde $\varphi(L_i)$, $\varphi(M_i)$, $\varphi(N_i)$ sînt valorile polinomului $\varphi(x, y)$ pe nodurile L_i, M_i, N_i. Problema constă în a determina constantele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ astfel ca formula să fie verificată de un polinom oarecare, $\varphi(x, y)$, de gradul n.

S-a demonstrat că problema astfel pusă este imposibilă pentru $n > 5$, însă pentru $n \leqslant 5$ ea este în general posibilă, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ fiind numere diferite între ele. Problema este cu siguranţă posibilă cînd $n \leqslant 5$ şi unul din numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este 1. Se dau şi formule particulare interesante.

1° Pentru $n = 2$, se dau formulele

$$\iint_T \varphi_2(x, y)dxdy = \frac{S}{12}[\varphi_2(A) + \varphi_2(B) + \varphi_2(C) + 9\varphi_2(G)], \tag{2}$$

$$\iint_T \varphi_2(x, y)dxdy = \frac{S}{3}[\varphi_2(A') + \varphi_2(B') + \varphi_2(C')], \tag{3}$$

$$\iint_T \varphi_2(x, y)dxdy = \frac{S}{3}[\varphi_2(L) + \varphi_2(M) + \varphi_2(\cdot)], \tag{4}$$

în care G este centrul de greutate al triunghiului ABC, A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului, iar L, M, N mijloacele lui GA, GB, GC.

2° Pentru $n = 3$, se dau formulele

$$\iint_T \varphi_3(x, y)dxdy = \frac{S}{60}\{3[\varphi_3(A) + \varphi_3(B) + \varphi_3(C)] + 8[\varphi_3(A') + \varphi_3(B') + \varphi_3(C')] + 27\varphi_3(G)]\} \tag{5}$$

$$\iint_T \varphi_3(x, y)dxdy = \frac{S}{48}\{25[\varphi_3(L) + \varphi_3(M) + \varphi_3(N)] - 27\varphi_3(G)\} \tag{6}$$

unde L, M, N, sînt noduri care corespund la $\alpha = 3$.

3° Pentru $n = 4$, se dau formulele

$$\iint_T \varphi_4(x, y)dxdy = \frac{S}{1680}\{243[\varphi_4(L_1) + \varphi_4(M_1) + \varphi_4(N_1)] + 128[\varphi_4(A') + \varphi_4(B') + \varphi_4(C')] + 567\varphi_4(G)\} \quad (7)$$

Nodurile L_1, M_1, N_1 corespund la $\alpha_1 = 7$.

$$\iint_T \varphi_4(x, y)dxdy = \frac{S}{6}\left\{\left(1 - \sqrt{\frac{1375 - 344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L_1) + \varphi_4(M_1) + \varphi_4(N_1)] + \left(1 + \sqrt{\frac{1375 - 344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L_2) + \varphi_4(M_2) + \varphi_4(N_2)]\right\} \quad (8)$$

Nodurile L_1, M_1, N_1 şi L_2, M_2, N_2 corespund la

$$\alpha_1 = \frac{6 + \sqrt{10} + \sqrt{50 + 8\sqrt{10}}}{2},$$

$$\alpha_2 = \frac{6 + \sqrt{10} - \sqrt{50 + 8\sqrt{10}}}{2},$$

$$\iint_T \varphi_4(x,y)dxdy = \frac{S}{6}\left\{\left(1 + \sqrt{\frac{1375 + 344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L_1') + \varphi_4(M_1') + \varphi_4(N_1')] + \left(1 - \sqrt{\frac{1375 + 344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L_2') + \varphi_4(M_2') + \varphi_4(N_2')]\right\}. \quad (9)$$

Nodurile L_1', M_1', N_1' şi L_2', M_2', N_2' corespund la

$$\alpha_1' = \frac{6 - \sqrt{10} + \sqrt{50 - 8\sqrt{10}}}{2},$$

$$\alpha_2' = \frac{6 - \sqrt{10} - \sqrt{50 - 8\sqrt{10}}}{2},$$

4° Pentru $n = 5$ se dau formulele

$$\iint_T \varphi_5(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{14400}\{2401[\varphi_5(L) + \varphi_5(M) + \varphi_5(N)] + 1024\,[\varphi_5(A') + \varphi_5(B') + \varphi_5(C')] + 160\,[\varphi_5(A) + \varphi_5(B) + \varphi_5(C)] + 3645\varphi_5(G)\}, \quad (10)$$

unde nodurile L, M, N corespund la $\alpha = 5$ şi

$$\iint_T \varphi_5(x, y)dxdy = \frac{S}{1200}\{(155 - \sqrt{15})[\varphi_5(L_1) + \varphi_5(M_1) + \varphi_5(N_1)] + (155 + \sqrt{15})[\varphi_5(L_2) + \varphi_5(M_2) + \varphi_5(N_2)] + 270\varphi_5(G)\}, \quad (11)$$

unde nodurile L_1, M_1, N_1 şi L_2, M_2, N_2 corespund la

$$\alpha_1 = 4 + \sqrt{15} \quad \text{şi} \quad \alpha_2 = 4 - \sqrt{15}.$$

D. V. Ionescu a determinat formulele de cubatură cu un număr minim de noduri. Acestea sînt formulele (3) şi (4) pentru $n = 2$, (6) pentru $n = 3$, (8) şi (9) pentru $n = 4$, (11) pentru $n = 5$.

D. V. Ionescu a dat şi evaluări pentru restul formulelor de cubatură de forma

$$\iint_T f(x, y)dxdy = \sum_{i=1}^{s} P_i[f(L_i) + f(M_i) + f(N_i)] + R, \quad (12)$$

presupunînd că funcţia $f(x, y)$ este continuă în triunghiul T, împreună cu derivatele ei succesive în raport cu x şi cu y pînă la ordinul 6.

Formula (11) a fost dată în cazul particular al triunghiului dreptunghi isoscel de J. Radon [72] în anul 1948 şi a fost apoi reprodusă de T. Albrecht şi L. Collatz [8] în anul 1958.

Formulele (2), (6) au fost date şi de Hammer P. C., Marlove O. J., Stroud A. N. [21] în 1956 şi reproduse de T. Albrecht şi L. Collatz [8] în 1958.

Formula (5) a fost dată de T. Albrecht şi L. Collatz [8] în 1958.

Lucrările lui D. V. Ionescu au fost publicate în 1953 şi 1955 şi tratează despre formule de cubatură de forma (1) în general.

H. Roşcău [74] a extins formulele de cubatură de forma (1) la funcţii de mai multe variabile, pentru $n = 2$, făcînd comunicări despre aceasta încă în 1955.

29. D. D. Stancu a construit formule de cubatură pornind de la formule de interpolare, aşa cum a procedat şi la obţinerea formulelor de cvadratură (v. punctul 16).

D. D. Stancu [81] a stabilit formule de interpolare pentru reţele de noduri de tip Marchaud formate din nodurile M_{ik} de coordonate (x_i, y_{ik}), unde $i = 1, 2, \ldots, n + 1$; $k = 1, 2, \ldots, m + 1$. El a arătat că polinomul de interpolare de gradul (n, m), corespunzător unei funcţii $f(x, y)$, este

$$L_{n,m}(x,y\,;\,f) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{u(x)}{(x - x_i)\,u'(x)}\,\frac{v_i(y)}{(y - y_{i,k})\,v_i'(y_{i,k})} f(x_i, y_{i,k}), \quad (13)$$

unde

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i), \quad v_i(y) = \prod_{k=1}^{m+1} (y - y_{i,k}). \tag{13'}$$

S-a extins cu această ocazie noțiunea de diferență divizată pentru rețele de tip Marchaud și s-au dat teoreme de medie, care extind la două sau mai multe variabile cîteva formule de medie binecunoscute în cazul funcțiilor de o variabilă ale lui T. Popoviciu [64].

În cazul unei rețele dreptunghiulare, avem formula de interpolare a lui Lagrange

$$f(x, y) = L_{n,m}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{m+1} \end{matrix} ; f \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.\right) + R_{n,m}[f], \tag{14}$$

în care restul se poate pune sub forma

$$\begin{aligned} R_{n,m}[f] = {} & \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y)}{\partial x^{n+1}} + \frac{v(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x, \eta)}{\partial y^{m+1}} - \\ & - \frac{u(x)\, v(y)}{(n+1)!(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi, \eta)}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}}, \end{aligned} \tag{15}$$

unde

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i), \quad v(y) = \prod_{k=1}^{m+1} (y - y_k).$$

D. D. Stancu [86] a generalizat formula de interpolare (13) prin formula

$$L(x, y; f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{u(x)}{(x - x_i)\, u'(x_i)} \frac{v_i(y)}{(y - y_{i,k})\, v'_i(y_{i,k})} f(x_i, y_{i,k}k), \tag{16}$$

unde

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \quad v_i(y) = \prod_{p=1}^{m_i} (y - y_{i,p})$$

și, cu titlul de exemplu, a construit formule de interpolare corespunzînd unei rețele hexagonale.

D. D. Stancu [87] a studiat și formule de interpolare de forma

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & \\ = {} & \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m_i+1} (x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(y - y_{i,1}) \ldots (y - y_{i,j-1}) \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_i \\ y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{i,j} \end{bmatrix} ; f \Bigg] + \\ & + R[f] \end{aligned}$$

pe care a găsit-o utilă în aplicații, alături de formulele de interpolare pentru funcțiile de două variabile ale lui Newton, Biermann și Steffensen.

Restul în formula (17) are expresia

$$\begin{aligned} R[f] = {} & (x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) [x, x_1, \ldots, x_{n+1}; f] + \\ & + \sum_{i=1}^{n+1} (x - x_1) \ldots (x - x_{i-1}) \ldots (y - y_{i,1}) \ldots (y - y_{i,m_i+1}) \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_i \\ y, y_{i,1}, \ldots, y_{i,m_i+1} \end{matrix} ; f \right] \end{aligned} \tag{18}$$

În [93] el a extins formula sa pentru polinomul de interpolare al lui Hermite din lucrarea [83], la polinoame de interpolare de două variabile.

30\. D. D. Stancu [85] a stabilit formule de cubatură pornind de la formulele de interpolare studiate în lucrarea [81]. Ca aplicație, a dat restul formulei lui Cavalieri-Simpson și a dat de asemenea *formula lui Cavalieri–Simpson pentru funcțiile de s variabile.*

În [86] a studiat formule de cubatură de tip Gauss de gradele de exactitate $(2n - 1, 2m - 1)$ și restul lor.

De exemplu, pentru patratul D, definit de

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1,$$

a dat formula

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)\, dx dy = {} & f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \\ & + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + R[f], \end{aligned} \tag{19}$$

unde restul are expresia

$$R[f] = \frac{2}{135} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial x^4} + \frac{2}{135} \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta)}{\partial y^4} - \frac{1}{18225} \frac{\partial^8 f(\xi, \eta)}{\partial x^4 \partial y^4}. \tag{20}$$

D. D. Stancu [93] a extins formulele sale de cvadratură din lucrarea [89] la formule de cubatură în care domeniul de integrare este un dreptunghi, construind formule de cubatură de tip Gauss-Christoffel.

Un exemplu este formula următoare:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y)\, dx dy = {} & \frac{1}{140625} \Bigg\{ 207936 f(0,0) + 67032 \left[f\left(0, -\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + \right. \\ & + f\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\right) + f\left(0, \sqrt{\frac{5}{7}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\right) \Bigg] + 21609 \left[f\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}, -\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + \right. \\ & + f\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt{\frac{5}{7}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{5}{7}}, -\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt{\frac{5}{7}}\right) \Bigg] + \end{aligned}$$

$$+9120\,[f''_{x^2}(0,0)+f''_{y^2}(0,0)]+2940\Big[f''_{x^2}\Big(0,-\sqrt{\tfrac{5}{7}}\Big)+f''_{y^2}\Big(0,\sqrt{\tfrac{5}{7}}\Big)+$$

$$+f''_{x^2}\Big(-\sqrt{\tfrac{5}{7}},0\Big)+f''_{y^2}\Big(\sqrt{\tfrac{5}{7}},0\Big)\Big]+400f^{(4)}_{x^2,y^2}\,(0,0)\Big\}+R[f], \tag{21}$$

unde

$$R[f]=\frac{1}{1111320}\left[\frac{\partial^8 f(\xi,\eta')}{\partial x^8}+\frac{\partial^8 f(\xi',\eta)}{\partial y^8}-\frac{1}{4445280}\frac{\partial^{16} f(\xi,\eta)}{\partial x^8\partial y^8}\right] \tag{22}$$

Formula (21) are gradele de exactitate (7,7) și un număr minim de termeni egal cu 16; ea reprezintă extinderea, la formule de cubatură, a unei formule de cvadratură dată de T. Popoviciu [68].

D. D. Stancu [94] a studiat formule de cubatură de forma

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i,k;\mu,\nu} C_{i\nu k\mu}\left[\frac{\partial^{\nu+\mu}f(x,y)}{\partial x^\nu\partial y^\mu}\right]_{\substack{x=x_i\\ y=y_k}}+R[f], \tag{23}$$

în care domeniul D este un dreptunghi definit de

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d$$

Restul acestei formule poate fi pus sub forma

$$R[f]=\iint_D\Big[U(t)\frac{\partial^M f(t,\tau)}{\partial t^M}+V(\tau)\frac{\partial^N f(t,\tau)}{\partial\tau^N}-$$

$$-U(t)V(\tau)\frac{\partial^{M+N}f(t,\tau)}{\partial t^M\partial\tau^N}\Big]\,dt\,d\tau, \tag{24}$$

unde $U(t)$ și $V(\tau)$ sînt anumite funcții ce au fost precizate.

În aceeași lucrare, s-a extins, la formulele de cubatură, formulele de cvadraturi ale lui P. Turan [19] și T. Popoviciu [68].

31. D. V. Ionescu [39] a extins la formule de cubatură metoda pe care a folosit-o pentru obținerea formulelor de cvadratură [33]. După cum la o integrală definită se atașează un sistem de ecuații diferențiale și condiții la limită care conduc la o formulă de cvadratură cu restul ei, tot așa D. V. Ionescu a arătat că la o integrală dublă, cu domeniul de integrare dreptunghi, se poate atașa un sistem de ecuații cu derivate parțiale și condiții la limită, care să conducă la o formulă de cubatură cu restul ei.

Ca exemple, el a obținut următoarele formule de cubatură cu restul lor pus sub formă de integrală dublă.

1°. D fiind dreptunghiul definit de $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, $y_1\leqslant y\leqslant y_2$, avem

$$\iint_D f\,dx\,dy=\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{2}\,[f(x_1,y_2)+f(x_2,y_1)]+$$

$$+\iint_D\Big(\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)\,dx\,dy, \tag{25}$$

unde

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}(x-x_1)(x-x_2),$$

$$\psi(x,y)=-\frac{1}{2}[(x-x_1)(y-y_2)+(x-x_2)(y-y_1)]$$

$$\theta(x,y)=\frac{1}{2}(y-y_1)(y-y_2). \tag{25'}$$

2°. Avem

$$\iint_D f\,dx\,dy=\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{2}\,[f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)]+$$

$$+\iint_D\Big(\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)\,dx\,dy, \tag{26}$$

unde

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}(x-x_1)(x-x_2),$$

$$\psi(x,y)=-\frac{1}{2}[(x-x_1)(y-y_2)(x-x_2)+(x-x_2)(y-y_1)+$$

$$+(x_2-x_1)(y_2-y_1)],$$

$$\theta(x,y)=\frac{1}{2}(y-y_1)(y-y_2). \tag{26}$$

3°. Avem

$$\iint_D f\,dx\,dy=\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{4}\,[f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)+f(x_1,y_2)+f(x_2,y_1)]+$$

$$+\iint_D\Big(\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big)\,dx\,dy, \tag{27}$$

unde

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2}\left[(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}\right], \tag{27'}$$

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_1)(y - y_2).$$

4°. Fie D dreptunghiul definit de inegalitățile

$$x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h, \qquad y_0 - k \leqslant y \leqslant y_0 + k$$

și D_1, D_2, D_3, D_4 dreptunghiurile definite de inegalitățile

$$\begin{array}{lll} (D_1) & x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h, & y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + k, \\ (D_2) & x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0, & y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + k, \\ (D_3) & x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0, & y_0 - k \leqslant y \leqslant y_0, \\ (D_4) & x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h, & y_0 - k \leqslant y \leqslant y_0. \end{array}$$

S-a stabilit formula de cubatură

$$\iint_D f(x, y)dxdy = 4hkf(x_0, y_0) + R[f], \tag{28}$$

unde restul $R[f]$ este dat de formula

$$R[f] = \iint_D \left(\varphi(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \psi(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \theta(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy, \tag{29}$$

funcțiile $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ coincizînd în dreptunghiurile D_i cu funcțiile $\varphi_i(x, y)$, $\psi_i(x, y)$, $\theta_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4$, date de formulele

$$\varphi_1(x, y = \frac{1}{2}(x - x_0 - h)^2, \qquad \theta_1(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_0 - k)^2,$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_0 + h)^2, \qquad \theta_2(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_0 - k)^2,$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_0 + h)^2, \qquad \theta_3(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_0 + k)^2,$$

$$\varphi_4(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_0 - h)^2, \qquad \theta_4(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_0 + k)^2, \tag{29'}$$

$$\psi_1(x, y) = -(x - x_0 - h)(y - y_0 - k),$$

$$\psi_2(x, y) = -(x - x_0 + h)(y - y_0 - k),$$

$$\psi_3(x, y) = -(x - x_0 + h)(y - y_0 + k),$$

$$\psi_4(x, y) = -(x - x_0 - h)(y - y_0 + k).$$

D. V. Ionescu [36] a făcut aplicații geometrice ale formulelor de cubatură (25), (26), (27), generalizînd formula lui Archimede [29] în spațiu și arătînd că formula (27) constituie o generalizare a teoremei lui Steiner relativă la momentul de inerție al unui dreptunghiu în raport cu o dreaptă care nu trece prin centrul dreptunghiului.

§ 5. Ecuații cu derivate parțiale și integrarea lor numerică

32. D. V. Ionescu [39] a aplicat formula de cubatură (26) din § 4 la integrarea numerică a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, p, q), \tag{1}$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, care admite o integrală unică $z(x, y)$ în dreptunghiul format de dreptele $x = 0$, $x = \lambda$, $y = 0$, $y = \mu$ și care este nulă pe laturile acestui dreptunghiu.

S-a determinat o rețea de noduri Γ dreptunghiulară, nodurile avînd coordonatele (x_i, y_k), unde punctele x_i și y_k împart intervalele $(0, \lambda)$ și $(0, \mu)$ în n și m părți egale, și s-a găsit un algoritm pentru calculul numerelor $z_{ik}^{(s)}$, $p_{ik}^{(s)}$, $q_{ik}^{(s)}$, unde $s = 0, 1, \ldots, \nu$, astfel ca ε fiind un număr pozitiv dat, valorile absolute ale diferențelor

$$z(x_i, y_k) - z_{ik}^{(\nu)}, \quad p(x_i, y_k) - p_{ik}^{(\nu)}, \quad q(x_i, y_k) - q_{ik}^{(\nu)} \tag{2}$$

pe nodurile rețelei Γ, să fie mai mici ca 2ε.

3. E. Schechter [80] a studiat problema lui Cauchy pentru ecuația cu derivate parțiale (1) cu datele pe o porțiune AB din a doua bisectoare a unghiului format de caracteristicile Ox și Oy.

Se calculează valorile aproximative pe o rețea patratică pe triunghiul dreptunghi avînd ipotenuza AB. Metoda dată nu necesită decît datele inițiale pe AB, iar valorile aproximative se calculează pas cu pas pe întreaga rețea. S-a dat o evaluare recurentă a erorilor comise și s-a arătat că ordinul metodei este $O(h^3)$.

E. Schechter a dat și o generalizare a acestei metode la sisteme de ecuații cu derivate parțiale de forma (1).

34. C. Kalik [46] a demonstrat că metoda alternată a lui H. A. Schwartz pentru rezolvarea problemei lui Dirichlet se poate aplica la problema lui Neumann și la probleme mixte, iar ecuația dată poate să fie chiar înlocuită cu un sistem tare eliptic.

C. Kalik [46], [49] a rezolvat problema lui Neumann în cazul domeniului multiplu conex de un număr finit de sfere, cu ajutorul metodei generalizate a lui A. H. Schwartz, cu condiția ca sferele să fie așezate la distanțe suficient de mari una de alta.

L. Nemeti [59] s-a ocupat de o problemă care se pune cînd se proiectează un cazan tubular cu aburi cu trecere forțată. Această problemă tehnică conduce la integrarea ecuației cu derivate parțiale

$$A(u) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{3}$$

cu condiția la limită

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \gamma u = \psi, \tag{4}$$

pe frontiera Γ a domeniului plan Ω, dat de inegalitățile

$$r_0 < r < r_0 + s, \qquad -L < z < +L,$$

unde s este grosimea tubului și L lungimea lui.

În legătură cu această problemă, au făcut mai multe lucrări G. Călugăreanu [5], D. V. Ionescu și L. Németi [45], C. Călugăreanu și F. Radó [6]. În aceste lucrări s-a căutat soluția problemei fie aplicînd metoda lui Fourier, fie aplicînd teoria funcțiilor de variabilă complexă. Rezultatele obținute n-au satisfăcut însă exigențele tehnicii. Prima metodă duce la un sistem infinit de ecuații liniare, care trebuie încă studiat, iar a doua metodă nu dă soluția problemei decît în cazul cînd grosimea tubului este mică, ceea ce nu corespunde condițiilor tehnice.

C. Kalik [48] a tratat problema la limită referitoare la ecuația cu derivate parțiale (3) cu condiția la limită (4), prin metoda variațională. El a dat și o soluție aproximativă a problemei cu ajutorul metodei lui Ritz.

C. Kalik [47] a mai tratat următoarea problemă la limită: să se determine funcția $u(x, y)$ în domeniul Ω mărginit de curba Γ, astfel ca în Ω să fie satisfăcută ecuația cu derivate parțiale

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \tag{5}$$

iar pe frontiera Γ să avem

$$u = f_1(s), \qquad -\Delta u + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2(s). \tag{6}$$

Se presupune că curba Γ poate fi împărțită într-un număr finit de porțiuni, în așa fel ca fiecare porțiune să se poată reprezenta în coordonate locale printr-o ecuație $y = \varphi(x)$, unde $\varphi(x)$ este o funcție continuă, iar derivata ei satisface la o condiție Lipschitz. El urmează în rezolvarea acestei probleme calea dată de G. Fichera [19], [20].

C. Kalik și P. Szilagyi [50] au considerat ecuația funcțională (7)

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(u, x_i) = f \tag{7}$$

în legătură cu rezolvarea problemei lui Neumann relativă la ecuația cu derivate parțiale

$$\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - cu = 0. \tag{8}$$

S-a demonstrat că operatorul $\mathcal{L}u$ este pozitiv definit pe o clasă de funcții bine determinată. S-a studiat și metoda lui Ritz la rezolvarea ecuației funcționale (7) și s-au indicat clase de funcții complete care servesc la rezolvarea ecuației funcționale.

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă O., *Despre restul unor formule de integrare numerică de tip Runge-Kutta a ecuațiilor diferențiale*. Studii și cercetări de matematică (Cluj), **XI**, fasc. anexă, 9–29 (1960).
2. Bieberbach L., *Theorie der Differential*. gl. Berlin, 1926, p. 50–51.
3. — *On the remainder of the Runge-Kutta formula in the theory of ordinary differential equations*. ZAMP **2**, 233–248 (1951).
4. Birkhoff G. D., *General mean value and remainder theorems*. Transact. Amer. Math. Soc., **7**, 107–130 (1906).
5. Călugăreanu G., *Asupra unei probleme de propagarea căldurii*. Studii și cercetări științifice Cluj, **IV**, 10–17 (1953).
6. Călugăreanu G., Radó F., *Asupra unei probleme de propagare a căldurii*. Bul. științ. Acad. R.P.R., **VI**, 17–30 (1954).
7. Ghristoffel E. B., *Uber die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben*. J.f.d. reine und angew. Math. **55**, 61–82 (1858).
8. Albrecht J., Collatz L., *Zur numerischen Auswertung mehr dimensionaler Integrale*. Zeitschrift für angewandte Mathematik unde Mechanik, **38**, 1–15 (1958).
9. Collatz L., *Numerische Behandlungen von Differentialgleichungen*. Berlin, 1951.
10. Coțiu A., *O observare asupra formulelor de cuadratură cu patru noduri*. Gaz. Mat. și Fiz. **VII**, (1956).
11. — *Asupra formulei de cuadratură a lui Hardy*. Gaz. Mat. și Fiz., **X**, 404–412 (1958).
12. — *Asupra unei formule de cuadratură cu două noduri duble*. Lucrările științifice ale Inst. politehnic Cluj, 41–48, (1959).
13. — *Formule pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi, deduse cu ajutorul diferențelor*. Lucrările științifice ale Inst. politehnic Cluj, 49–59, (1959).
14. — *Studiu comparativ al delimitărilor erorilor unor formule de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale*. Lucrările științifice ale Inst. politehnic Cluj, 31–42, (1960).
15. — *Delimitarea erorii în procedeul de ordinul cinci de exactitate a lui Nystrčm, de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi*. Studii și cercetări de matematică (Cluj) **XI**, 1, 21–27 (1960).
16. — *Stabilirea unor procedee de ordin înalt de exactitate de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale*. An. Șt. Univ. Iași, s.n., s. I, VI, 3 (Supliment), 585–598 (1960).
17. Coțiu A., Coțiu F., *Delimitarea erorii în procedeul de ordinul cinci al lui Kutta, de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale*. Studia Univ. Babeș-Bolyai Cluj, Ser. I, **1**, 193–198 (1960)

18. Fehlberg E., *Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge-Kutta Verfahren*. Z. angew. Math. Mech., **38**, 421–426 (1958).

19. Fichera G., *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio par taluni sistemi di funzioni*. Ann-Mat. pura e appl., **27**, 1–28 (1948).

20. — *Teoremi di completezza connessi all integrazione dell'equazione* $\Delta_4 u = f$. Giornale Mat. Battaglini, **77**, 184–199 (1948).

21. Hammer P. C., Marlov O. J., Stroud A. N., *Numerical integration over simplexes and cones*. Math. Tabl. A.C.X, 130–137, 137–139, (1956).

22. Ionescu D. V., *Despre o formulă de cuadratură mecanică*. Lucrările sesiunii generale ştiinţifice a Acad. R.P.R. din 2–12 iunie 1950, Ed. Acad. R.P R., Bucureşti, p. 238–243.

23. — *Câteva formule de cuadratură mecanică*. Studii şi cercetări ştiinţifice Cluj, **II**, 16–37 (1951).

24. — *Generalizarea formulei de cuadratură a lui N. Obreschkoff*. Studii şi cercetări ştiinţifice Cluj, **III**, 1–10 (1952).

25. — *Formule de cubatură în care domeniul de integrare este un triunghiu oarecare*. Bul. ştiinţ. al Acad. R.P.R. **5**, 423–430 (1953).

26. — *O generalizare a unei proprietăţi oare intervine în metoda lui Runge-Kutta pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale (I)*. Bul. Ştiinţ.-Acad. R.P.R., **VI**, 229–238 (1954).

27. — *Formule de cubatură în care domenul de integrare este un triunghiu oarecare* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **6**, 7–49 (1955).

28. — *Restul în formula de cuadratură „preferată„ a lui Newton*. Gaz. Mat. şi Fiz., **VII**, 298–302 (1955).

29. — *De la formula lui Archimede la o formulă de cubatură*. Gaz. Mat. şi Fiz., **7**, 3–10 (1956).

30. — *O generalizare a unei proprietăţi care intervine în metoda lui Runge-Kutta pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale (II)*. Bul. ştiinţ.-Acad. R.P.R., **8** 67–100 (1956).

31. — *O formulă a lui Abel şi o generalizare a ei*. Bull. ştiinţ. al Univ. „Babaş-Bolyai", Cluj, I, 13–22 (1957).

32. — *Formule de cuadratură cu noduri exterioare*. Mathematica, **XXIV**, (1959).

33. — *Cuadraturi numerice*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.

34. — *Formula lui Boole*. Studia Univ. Babeş-Bolyai Cluj, **III**, 39–49 (1958).

35. — *Formule de cuadratură cu noduri exterioare*. Studii şi cercetări de matematică Cluj, **IX**, 45–135 (1958).

36. — *Aplicaţii geometrice a două formule de cubatură*. Comunicare la colocviul de mecanică, ţinut în Bucureşti, 26–29 oct. 1959.

37. — *Integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. Comunicare la colocviul de mecanică, Bucureşti, 25–29 oct. 1959.

38. — *Aplicarea formulelor de derivare numerică la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. Studii şi cercetări de matematică, **X**, 259–315 (1959).

39. — *Formules de cubature; application à l'intégration numérique des équations aux dérivées partielles du second ordre de type hyperbolique*. Mathematica, **1** (**24**), 239–280 (1959); Studii şi cercetări de matematică, Cluj, **XI**, 35–78 (1960).

40. — *Formules de quadrature à noedeus extérieurs*. Mathematica, **2** (**25**), 1, 55–142. (1960).

41. — *Aplicarea metodei aproximaţiilor succesive în integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XI**, 273–286 (1960).

42. — *Integrarea numerică a ecuaţiei integrale a lui Volterra*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XII**, **1**, 175–183 (1961).

43. — *Formula de integrare numerică de tip Adams şi restul ei pentru ecuaţii diferenţiale de ordin superior*. Lucrările sesiunii ştiinţifice a Univ. Babeş, 23 apr. 1960.

44. — *Noi formule de tip Adams pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întîi*. Studii şi cercetări de matematică, (Cluj), Anexă, **XI**, 101–116 1960.

45. Ionescu D. V., Németi L., *Integrarea unei ecuaţii cu derivate parţiale care intervine în problema calculului tensiunilor termice în tuburile fierbătoare ale cazanelor cu trecere forţată şi ale cazanelor cu radiaţii*. Studii şi cercetări ştiinţifice, Cluj IV, 73–78 (1953).

46. Kalik C., *Rezolvarea problemei lui Neumann în cazul domeniului multiplu conex mărginit de un număr finit de sfere*. Comunicările Acad. R.P.R., **8**, 745–753 (1958).

47. — *Rezolvarea unei probleme la limită pentru ecuaţia biarmonică*. Studii şi cercetări de matematică, Cluj, **IX**, 135–148 (1958).

48. — *Sur un problème aux limites qui intervient dans le projet d'une chaudière à vapeur*. Mathematica, **1** (**24**), 27–34 (1959)

49. Калик К., *К вопросу о сходимости алгорифмов типа Шварца*. Известия высших учебных заведений, **1**, 75—90 (1959).

50. Kalik C., Szilagyi P., *Despre rezolvarea problemei lui Neumann*. Studia Univ Babeş-Bolyai, Series I, **1**, 133–142 (1960).

51. Канторович Л. В., Крылов В. И., *Приближённые методы высшего анализа*. Москва, Ленинград, 1950.

52. Kowalewski G., *Interpolation und genäherte Quadratur*. 1932.

53. Крылов В. И. *Увеличение точности механических квадратур. Формулы эйлерова вида*. Докл. Акад Наук СССР, **XCVI**, 429—432 (1954).

54. Kutta W., *Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen*. Zeitschr. f. Math. u. Phys., **46**, 435–452 (1901).

55. Markov A. A., *Differenzenrechung*. B. G. Teubner, Leipzig, 1896.

56. Микеладзе Ш. Е., *Численные методы математического анализа*. Г.И.Т.Л., Москва, 1953.

57. Mises R. von *Über allgemeine Quadraturformeln*. J. f. die reine u. andgew. Math., **174**, 56-67 (1936).

58. Munteanu Paraschiva, *O formulă de cuadratură cu noduri exterioare şi interioare în progresie aritmetică*. Comunicare prezentată la Sesiunea ştiinţifică a Univ-Babeş-Bolyai, Cluj, mai 1958.

59. Németi L., *Tensiuni termice în tuburi cu pereţi subţiri în cazul unui cîmp termic simetric faţă de o axă*. Studii şi cercetări ştiinţifice, Cluj, **IV**, 64–72 (1953).

60. Obreschoff N., *Neue Quadraturformeln*. Abh. Preuss. Akad. Wiss., 6–26 (1940).

61. Petr K., *Über eine Formel für numerische Berechnungen der bestimmten Integrale*. Casopis propestovani Matematiky a Fyziky, **44**, 454–455 (1915).

62. Popoviciu T., *Sur quelques proprietes des fonctions d'une ou de deux variables réelles*. Mathematica, **8**, 1–85, (1934).

63. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (I)*. Mathematica **12**, 81–92 (1936).

64. — *Introduction à la théorie des différences divisées*. Bull. Math. Soc. Roum. Sci., **42**, 65–78 (1940).

65. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre superieur (IX)*. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **43**, 85–141 (1942).

66. — *Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei*. Lucrările sesiunii generale ştiinţifice ale Acad. R.P.R., 1950, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 183–185.

67. — *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*. Studii şi cercetări ştiinţifice (Iaşi), **3**, 53–122 (1952).

68. — *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. Studii şi cercetări ştiinţifice, Iaşi, **6**, 29–57, (1955).

69. — *Sur le reste dans certaines formules lineaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica **1** (**24**), 1, 95–142, (1959).

70. — *Sur la delimitation du reste dans certaines formules d'approximation lineaires de l'analyse*. Mathematica, **2** (**25**), 1, 159–162 (1960).

71. Radon J., *Restausdrücke bei Interpolations und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale*. Monatshefte f. Math. u. Phys., **42**, 389–396 (1935).

72. — *Zur Mechanischen Kubatur*. Monatschefte für Mathem., **52**, 286–300 (1948).

73. Remez E. Ya., *Sur certaines classes de fonctionnelles lineaires dans les espaces* C^p *et sur les termes complementaires des formules d'analyse approximative (I)*. Rec. trav. Math. Acad. Ukraine, **3**, 21–62 (1940).

74. Roşcău H., *Asupra cîtorva formule de cubatură*. Lucrările celui de al IV-lea Congres al matematicienilor romîni din 26 mai – 2 iunie 1956. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, p. 193

75. Runge C., *Uber die numerische Auflösung totaler Differential-gleichungen*. Gött. Nachr., 252–257 (1905).

76. Sard A., *Integral representation of remainders*. Duke Math. J. **15**, 333–345 (1948).

77. Schechter E., *Asupra erorii în procedeul de integrare numerică al lui Runge-Kutta*. Studii şi cercetări de matematică, **8**, 115–124 (1957).

78. — *Asupra delimitării erorilor în unele procedee de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. Studii şi cercetări de matematică, **IX**, 343–350 (1958).

79. — *Studiul erorilor în procedeele de tip Runge-Kutta pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale ordinare*. Dizertaţie, Univ. V. Babeş, Cluj, 1958.

80. — *O metodă de integrare numerică a ecuaţiei* $u_{xy} = F(x, y, u, p, q)$. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XII**, 155–169 (1961).

81. Stancu D. D., *Consideraţii asupra interpolării polinominale a funcţiilor de mai multe variabile*. Bul. Univ. Babeş-Bolyai, **I**, 43–82 (1957).

82. — *Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss-Christofel*. Studii şi cercetări de matematică, Iaşi, **8**, 1–18 (1957).

83. — *Asupra formulei de interpolare a lui Hermite şi a unor aplicaţii ale acesteia*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **8**, 339–355 (1957).

84. — *Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcţiile de mai multe variabile şi unele consideraţii asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss*. Bul. ştiinţ Acad. R.P.R., **9**, 287–313 (1957).

85. — *Contribuţii la integrarea numerică a funcţiilor de mai multe variabile*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj) **8**, 75–101 (1957).

86. — *Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcţiile de mai multe variabile şi unele consideraţii asupra formulei de integrare a lui Gauss*. Bul. Stiint. Acad. R.P.R., **IX**, 287–313 (1957).

87. — *Generalizarea unor polinoame de interpolare pentru funcţiile de mai multe variabile*. Bul. Inst. politehnic, Iaşi, **3**, 31–38, (1957).

88. — *Sur une classe de polynomes orthogonaux et sur les formules générales de quadrature à nombre minimum de termes*. Bull. Math. Soc. Sci. Mat. Fiz. R.P.R., **I**, 479–498 (1957).

89. — *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate*. Comunicările Acad. R.P.R., **8**, 349–358 (1958).

90. — *Sur quelques formules générales de quadrature*. Mathematica, **1** (**24**), 167–182 (1959).

91. — *Asupra unor formule generale de integrare numerică*. Studii şi cercetări de matematică, **IX**, 209–216, (1958).

92. — *Asupra formulelor de cuadratură de tip Gauss*. Studia Univ. Victor Babeş et Bolyai, **III**, 71–84 (1958).

93. — *O metodă pentru construirea de formule de cubatură pentru funcţiile de două variabile*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **IX**, 351–369 (1958).

94. — *Asupra integrări numerice a funcţiilor de două variabile*. Studii şi cercetări ştiinţifice, Iaşi, **IX**, 5–21, (1958).

95. — *Asupra calculului coeficienţi or unei formule generale de cuadratură*. Studia Univ. Babeş et Bolyai, **IV**, (1959).

96. Tollmien W., *Uber die Fehlerabschätzung bei Adamschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Zeitscher. für ang. Mach. und Mech., **18**, 83–90 (1938).

97. Turan P., *On the theory of the mechanical quadrature*. Acta Sci. Mathem., **XII**, 30–37 (1950).