CERCETĂRI CU ASPECTE GEOMETRICE EFECTUATE LA INSTITUTUL DE CALCUL DIN CLUJ

DE

E. GERGELY

(Cluj)

În teoria spaţiilor abstracte există numeroase probleme avînd un aspect geometric — care sînt aplicate în practică — în special în domeniul fizicii teoretice, al teoriei atomice şi nucleare, iar pe de altă parte probleme — tot în spaţiile abstracte — legate de rezolvarea ecuaţiilor funcţionale şi de operatori. Este cunoscut şi faptul că şi geometria diferenţială, în diferitele ei trepte de dezvoltare, este aplicată la construcţiile de maşini. În toate aceste aplicaţii, un rol important îl au cercetările privind metodele de calcul cele mai potrivite. În cadrul Institutului de calcul din Cluj, s-au elaborat o serie de lucrări privind astfel de probleme cu aspect geometric, rezultatele obţinute prezentînd o importanţă atît în teorie cît şi în aplicaţiile practice amintite mai sus.

a) B. Jankó a elaborat mai multe categorii de metode generale pentru rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare finite şi infinite, tratînd şi condiţiile lor de convergenţă [4], [5]. Particularizînd aceste metode, regăsim metoda cunoscută a lui Pollaczek-Geiringer şi metoda lui Seidel. Ideia de bază în construirea acestor metode este de a transforma sistemul liniar dat într-un sistem neliniar echivalent de formă particulară şi de aşa natură încît să avem îndeplinită următoarea condiţie: dacă se aplică la acest sistem neliniar metoda lui Newton generalizată de L. V. Kantorovici, atunci derivata lui Fréchet a operaţiei neliniare să fie o matrice de formă simplă, de exemplu de formă diagonală, triunghiulară etc.

Condiţiile de convergenţă ale metodei Pollaczek-Geiringer şi ale metodei lui Seidel menţionate mai sus, au fost studiate şi în spaţiul n-dimensional semiordonat [6].

b) În altă ordine de idei privind rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare definite în spaţiul lui Banach, s-a elaborat o teorie unitară a metodelor de iteraţie [7]. Astfel s-a construit o formulă generală de iteraţie

$x_{n-1} = \Phi(x_n)$ în mod convenabil, în aşa fel că, particularizînd operaţia neliniară $\Phi(x)$, s-au dedus pe rînd o serie de metode binecunoscute, cum sînt metoda lui Newton-Kantorovici, a lui Cebîşev, apoi metodele iperbolelor tangente şi metoda lui L. K. Võhandu. Pe lîngă cele menţionate, s-au elaborat noi clase de metode iterative care conţin — ca anumite cazuri particulare — metodele înşirate mai înainte. Aceste metode au fost clasificate pe baza noţiunii ordinului de convergenţă. S-au tratat totodată condiţiile de convergenţă comune pentru toate metodele prezentate.

c) Este cunoscut faptul că, la metodele de iteraţie menţionate mai sus, se cere calcularea anumitor operatori inverşi. Verificarea dacă aceste inverse există, precum şi delimitarea normei lor, reprezintă dificultăţi considerabile. Pe lîngă acestea, calcularea efectivă a inverselor — la fiecare pas de iteraţie — reprezintă dificultăţi, calcularea unei inverse fiind echivalentă cu rezolvarea unei ecuaţii operaţionale liniare. De altfel, de foarte multe ori aceste inverse nici nu pot fi calculate exact. În acest sens s-a dat o extindere a metodei iperbolelor tangente pentru rezolvarea ecuaţiilor funcţionale neliniare [8]. S-au stabilit condiţiile pentru existenţa şi unicitatea soluţiei, precum şi condiţiile de convergenţă, generalizînd astfel teoremele lui M. A. Mertveţova şi ale lui V. E. Mirakov. Menţionăm că rapiditatea convergenţei a rămas exact aceeaşi ca şi în cazul cînd există inversele respective.

d) În ce priveşte metoda lui Cevîşev, ea a fost de asemenea extinsă în sensul de mai sus. Continuînd cercetările referitoare la metodele de acest gen, B. J a n k ó a elaborat o teorie unitară a acestor metode la fel ca şi în cazul cînd inversele menţionate existau (vezi punctul *b*). Aici metodele generalizate în sensul de mai înainte pot fi generate dintr-o metodă de iteraţie generală. Pe lîngă cele amintite, s-au elaborat noi clase de metode iterative, care conţin şi metodele generalizate de mai înainte. Aceste metode au fost de asemenea clasificate pe baza ordinului de convergenţă. S-au dat totodată condiţii de convergenţă comune pentru aceste clase de metode [9]. S-a generalizat apoi o teoremă a lui Collatz pentru cazul cînd nu se presupune existenţa inverselor [10].

e) În legătură cu rezolvarea ecuaţiilor funcţionale neliniare, B. J a n k ó a elaborat metode la care derivatele lui Fréchet s-au înlocuit cu anumite diferenţe divizate. În acest sens s-au construit analoagele metodei lui Newton-Kantorovici [11], a lui Cebîşev şi a metodei iperbolelor tangente [12]. Aici derivatele respective s-au înlocuit cu diferenţe divizate de acelaşi ordin, alese în mod convenabil. Astfel s-a construit o formulă generală de iteraţie

$$x_{n+1} = \psi_n(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}),$$

unde aproximaţia x_{n+1} nu depinde — ca de obicei în procedeele iterative — numai de aproximaţia x_n, ci şi de aproximaţiile precedente x_{n-1}, x_{n-2}. Extinzînd noţiunea ordinului de convergenţă cu ajutorul acestei noţiuni şi prin particularizarea operaţiei $\psi_n(x, x_{n-1}, x_{n-2})$ s-au obţinut pe rînd metodele de mai sus. S-au studiat şi condiţiile de convergenţă în sensul convergenţei introduse în spaţiile semiordonate. Aceste metode reprezintă avantaje mai ales în calculele numerice.

În afară de activitatea de cercetare menţionată mai sus, B. J a n k ó a scris o monografie [13] care serveşte ca introducere în rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii cu un număr mare de ecuaţii şi necunoscute, probleme prezentînd interes atît pentru ingineri sau tehnicieni şi experimentatori cît şi pentru matematicieni.

*

E. G e r g e l y [1], [2] a studiat varietăţile n-dimensionale din spaţiile separabile ale lui Hilbert. Considerăm un element oarecare

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$$

din spaţiul separabil hilbertian $\mathcal{H}$, unde $\{e_i\}$ formează un sistem complet ortonormat în $\mathcal{H}$, iar

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty.$$

Fie mai departe coeficientul a_i de forma

$$a_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

unde $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sînt funcţii reale definite într-un domeniu D al spaţiului n-dimensional E_n, satisfăcînd condiţia $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 < \infty$ pentru orice $x \in D$.

Mulţimea V_n a elementelor de forma

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) e_i$$

o numim varietate n-dimensională în spaţiul $\mathcal{H}$. Presupunem că în şirul de funcţii $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ există un număr infinit de funcţii care nu se anulează pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$.

Considerăm funcţiile $x_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ definite pe segmentul $[a, b]$ care vor fi precizate ulterior. Vom presupune numai că

$$(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in D.$$

Mulţimea elementelor în $\mathcal{H}$ de forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i[x_1(t), \ldots, x_n(t)] e_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{C}$$

o numim „curbă în V_n".

Construim pentru o curbă C numerele

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} \rho(P_{i-1}, P_i),$$

unde P_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) reprezintă „punctele" curbei C, iar P_{i-1} precedă P_i; notația $\rho(P, Q)$ indică distanța punctelor P și Q în spațiul $\mathcal{H}$, în sensul normei. Supremul mulțimii de numere σ_k pentru toate diviziunile posibile relative la punctele P îl vom nota $S(C)$, respectiv $S(C; a, b)$.

Dacă $S(C) < \infty$, atunci curba o numim rectificabilă.

Introducem notația

$$f_i(x_1(t), \ldots x_n(t)) = F_i(t).$$

Curba C este rectificabilă atunci și numai atunci cînd toate funcțiile $F_i(t)$, definite pe segmentul $[a, b]$, sînt funcții cu variație mărginită. În acest caz există derivatele $F'(t)$ și $S'(t)$ aproape peste tot în $[a, b]$, apoi relația

$$S'^2(t) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} F'^2(t)$$

pentru valorile lui t în care există derivatele. Egalitatea este atinsă atunci și numai atunci cînd toate funcțiile $F_i(t)$ sînt absolut continue în $[a, b]$. Aici s-a notat $S(t) = S(C; a, t)$.

În cele ce urmează presupunem că funcțiile $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ admit derivate continue de ordinul 3. Avînd în vedere faptul că noi ne folosim de metoda variațională, mai presupunem că funcțiile $x_i(t)$, ($i = 1, 2, \ldots, n$), care determină curbele variaționale, sînt de două ori derivabile. Astfel continuitatea absolută a funcțiilor $F_i(t)$ va fi asigurată.

Introducînd notația

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} F_i'^2} = \Phi[x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t)],$$

determinarea curbei celei mai scurte între două puncte P și Q ale varietății V_n este identică cu rezolvarea problemei variaționale

$$\mathcal{J} = \int_P^Q \Phi(x(t), x'(t))\, dt.$$

Pentru a trata „problema curbei" presupunem că funcțiile sînt pozitiv-omogene de gradul întîi în raport cu x_i'.

Este clar că pentru $n \geqslant 2$ oarecare, există astfel de varietăți V_n în care pentru fiecare pereche de puncte din domeniul D — sau pentru fie care pereche de puncte ale unui subdomeniu — unicitatea soluției problemei noastre variaționale este asigurată. În aceste varietăți, după rezultatele lui A. D. Alexandrov și ale școlii sale, poate fi construită o geometrie intrinsecă care se poate numi „geometria de tip A. D. Alexandrov".

Pentru lungimea de arc a curbelor rectificabile C, în cazul cînd funcțiile f_i satisfac condiția lui Lipschitz cu constanta K_i, iar mulțimea constantelor K_i ($i = 1, 2, \ldots$) este mărginită, $K_i < K'$, atunci este valabilă relația $S_C(a, b) \leqslant K \cdot \mathcal{J}(t_1, t_2)$, unde $\mathcal{J}(t_1, t_2)$ înseamnă lungimea de

arc a mulțimii de definiție a curbei C în E_n, adică $J(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\vec{e}_i$, în care $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Dacă în problema curbelor celor mai scurte pentru curbele variaționale sînt valabile inegalitățile

$$m_k \leqslant \mathcal{J}_k(t_1, t_2) \leqslant M_k,$$

atunci pentru lungimea de curbă în V_n sînt satisfăcute inegalitățile

$$m_k K \leqslant S_k[a, b] \leqslant M_k K.$$

În cazul cînd în V_n numerele M_k au o margine superioară M, pentru oricare pereche de elemente, atunci lungimea tuturor curbelor celor mai scurte este mai mică decît MK.

Fie funcțiile f_i, forme algebrice în raport cu variabilele omogene $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Examinăm trei cazuri: *a*) toate formele f_i au același grad k; *b*) formele f_i sînt cel mult de gradul k; *c*) gradul formelor f_i nu este mărginit.

În cazul *a*), V_n este formată din elementele spațiului $\mathcal{H}$, avînd forma

$$y = \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k} E_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_2^{\alpha_n},$$

unde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sînt numere întregi nenegative, $E_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n} \in \mathcal{H}$, iar domeniul de definiție al varietății este spațiul întreg E_n, astfel ca varietatea să fie mulțimea de elemente „generate" de $E_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n}$.

În cazul *b*) $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant k$, adică elementele varietății V_n sînt de forma

$$y = \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqq k} E_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0}, x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

În sfîrșit, în cazul *c*), $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ nu este mărginită,

$$y = \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n} E_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Domeniul de definiție este aici un „domeniu stea„ cu centrul în punctul $(1, 0, 0, \ldots, 0)$.

Domeniul de valori al varietăților în $\mathcal{H}$, în cazurile *a*) și *b*) sînt „poliedre complete", definite de mulțimile de elemente $\{E_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\}$ în sensul de mai sus. Notînd numărul elementelor $\{E_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\}$ cu s, în cazul că $s < n$, aceste „poliedre" sînt acoperite de o infinitate de ori. În cazul $s = n$, ele sînt acoperite de un număr finit de ori dacă $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ parcurge tot spațiul E_n. În cazul că $s > n$, atunci domeniul de valori este numai o parte a mulțimii de elemente de formă

$$y = E_1 l_1 + \ldots + E_s l_s,$$

unde l_i sînt numere reale. Situația este asemănătoare și în cazul *c*).

Acele cazuri pentru V_n, în care funcțiile f_i pot fi dezvoltate în serii de forme sau sînt aproximabile cu funcții de acest fel, pot fi tratate în mod analog. Domeniile lor de definiție sînt în general ,,domenii stea".

Toate acestea se referă la f_i care sînt date și fixate.

Prin transformări topologice în E_n și cu transformarea corespunzătoare a funcțiilor f_i, sîntem în stare să transformăm acele domenii de stea mărginite, pentru care suprafața de mărginire este omeomorfă cu suprafața sferei n-dimensionale, în sfera unitate a spațiului E_n cu centrul în O. Astfel această sferă unitate poate fi privită ca un domeniu de definiție normat pentru varietățile amintite.

Spunem că varietățile $V_n^{(1)}$ și $V_n^{(2)}$ (pentru n dat) aparțin aceleași clase C_{V_n} dacă între punctele varietăților $V_n^{(1)}$ și $V_n^{(2)}$, $(P \in V_n^{(1)}, Q \in V_n^{(2)})$, există o relație biunivocă, astfel ca pentru punctele corespunzătoare P și Q să corespundă domeniile $D(P)$ și $D(Q)$ omeomorfe din E_n (pentru toate perechile de puncte P și Q).

În fiecare V_n se poate realiza o geometrie de distanță. Fie elementele $a, b \in V_n$; distanța în V_n a elementelor a și b o numim infimul lungimii de arc al tuturor curbelor rectificabile care unesc în V_n elementele a, b. Această definiție este valabilă și în acel caz cînd nu există o curbă rectificabilă care realizează acest infimum. Definiția aceasta are toate proprietățile cerute pentru noțiunea ,,distanță" din geometria de distanță.

Geometria în V_n astfel obținută o numim *geometria intrinsecă generalizată*. Dacă în V_n există curbele cele mai scurte între fiecare pereche de elemente a, b, atunci V_n are *o geometrie intrinsecă propriu-zisă* și dacă curba aceasta este unică, tot pentru fiecare pereche de elemente, atunci în varietatea respectivă există o geometrie de tip A. D. Alexandrov.

În cazul c) amintit mai sus, dacă seria de forme este uniform convergentă pentru curbele respective, atunci aceste curbe sînt rectificabile, și deci există curbe care realizează infimul amintit. Prin urmare aceste varietăți V_n posedă geometria intrinsecă propriu-zisă.

Două varietăți V_n le numim *izometrice* dacă între elementele sale există o relație biunivocă astfel ca distanțele dintre perechile de elemente corespunzătoare să fie egale. Dacă V_m este izometrică cu o parte a unei varietăți V_n, atunci spunem că V_m este izometric scufundabilă în V_n. Pentru acele $V_n^{(1)}$ și $V_n^{(2)}$, în care componentele $f_i^{(1)}$ și $f_i^{(2)}$ îndeplinesc condiția lui Lipschitz cu constantele lui Lipschitz $K_i^{(1)}$, respectiv $K_i^{(2)}$, este valabilă teorema următoare:

Varietățile $V_n^{(1)}$ și $V_n^{(2)}$ sînt izometrice dacă

$$\sum_i K_i^{(1)} = \sum_i K_i^{(2)}.$$

Este evident că la problema de scufundare a varietății V_m în V_n $(m < n)$ trebuie să luăm constantele $K_i^{(s)}$ relativ la domeniile corespunzătoare de scufundare.

Fie funcțiile f_i continue în D. Să notăm maximul funcției f_i în D cu M_i, iar minimul ei cu m_i, apoi acele mulțimi de puncte (de dimensiuni

$n-1$) în care funcțiile f_i ating valorile M_i, respectiv m_i, cu D_{M_i}, respectiv D_{m_i}. Intersecțiile lor $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_{M_i} = M(V_n)$, respectiv $m(V_n)$ pentru minim, le numim varietăți maximale, respectiv minimale, cu $n-1$ dimensiuni referitoare la varietatea V_n. Introducem notațiile $M^2 = \sum_i M_i^2$ și $m^2 = \sum_i m_i^2$. Aici M și m sînt normele comune ale elementelor varietăților maximale și minimale. Astfel aceste varietăți sînt situate pe două sfere, anume pe sfera maximală și pe cea minimală a varietății V_n. Razele sferelor sînt funcții ale domeniului de definiție D.

Varietatea maximală, respectiv minimală, nu ocupă suprafața întreagă a sferei. Varietatea V_n privită ca mulțime a lui $\mathcal{H}$ nu are puncte interioare. În ceea ce privește varietățile V_n privite ca mulțimi de elemente ale spațiului $\mathcal{H}$, ele sînt varietăți în sensul definiției obișnuite a ,,varietății".

Este importantă și următoarea teoremă:

O mulțime oarecare de elemente ale spațiului $\mathcal{H}$, în cazul că nu mărginim clasa funcțiilor f_i, poate fi concepută ca o varietate de orice dimensiune.

Determinarea clasei de funcții este o problemă deschisă, care caracterizează componentele f_i ale elementelor dintr-o mulțime a lui $\mathcal{H}$.

În general este vorba despre funcționale de mulțimi de elemente și despre inversele acestor funcționale.

În cazul varietăților algebrice, unde funcțiile f_i sînt algebrice, clasificarea lor poate fi realizată prin transformări biraționale.

Cercetările privitoare la acest domeniu sînt în curs.

Este clar că în acest domeniu există probleme dificile, dar rezultatele scontate vor da răspunsuri în multe chestiuni legate de structura spațiului Hibert și totodată în multe probleme din domeniul aplicațiilor acestor spații.

*

Colectivul format din E. Gergely și D. Maros [3] cercetează problema îmbunătățirii geometriei angrenajelor melc — roată melcată, în vederea măririi randamentului lor.

S-au stabilit [14] ecuațiile suprafețelor elicoidale riglate, clasificîndu-le după forma secțiunii lor transversale și determinînd condițiile de desfășurabilitate. S-au scos apoi în evidență cele două cazuri caracteristice din punct de vedere tehnologic pentru melcii convoluți, cînd evolventa buclantă este tangentă interior, respectiv exterior, la cilindrul director.

În baza relațiilor geometrice analizate s-a ajuns la concluzia că, la prelucrarea melcilor convoluți, cuțitul nu poate ocupa decît o poziție bine determinată pentru ca la funcționare să se obțină suprafețe conjugate.

După deducerea ecuațiilor pentru flancurile generate de suprafețele de revoluție — în special de suprafețele conice drepte — s-au stabilit erorile ce apar în secțiunea axială a melcilor, în diferite cazuri de prelucrare, în ipoteza că în secțiunea normală profilele generatoare sînt drepte și coincid.

Abaterile obţinute la prelucrarea cu cuţitul, freza conică, freza deget şi piatra abrazivă plană au reieşit destul de mari. Prin aceasta s-a justificat pe deplin importanţa verificării problemei şi sub acest aspect în fabricaţie, pentru a nu fi înşelaţi de rutină şi a crede, de exemplu, că un melc convolut se poate rectifica cu o piatră abrazivă conică şi se poate apoi împerechea cu o roată melcată generată cu un şeter melcat riglat convolut, fără ca prin aceasta randamentul la funcţionare să scadă.

Pentru a se obţine profile corespunzătoare, s-a cercetat apoi problema interferenţei la prelucrarea flancurilor. S-au stabilit ecuaţiile muchiilor de înapoiere ale flancurilor prelucrate de suprafeţe cilindrice plane şi de revoluţie în general. Pentru flancurile prelucrate cu freze conice drepte, s-a dat un algoritm de calcul pentru determinarea muchiei de înapoiere cu o precizie prescrisă. Cu ajutorul acesteia, problema, care necesită un mare volum de calcule şi depinde de o serie de parametri liber aleşi, ca de exemplu de unghiul la vîrf al conului, de parametrul mişcării elicoidale, de lungimea normalei comune dintre axa cercului şi a cilindrului etc., s-a programat pentru maşina electronică de calcul CIFA-1. Muchia de înapiere limitînd domeniul de interferenţă a permis determinarea în continuare a ecuaţiei profilului de racord.

Pentru a putea interpreta mai bine fizic rezultatele analitice obţinute s-au prelucrat în modele de gips o serie de flancuri la diferiţi parametri.

S-a cercetat apoi cazul cînd profilul de racord dispare, problemă importantă în special în construcţia şi prelucrarea pompelor elicoidale.

Analizînd variaţia formei profilului de racord în funcţie de înclinarea elicei divizoare, s-au tras concluzii importante şi în privinţa posibilităţii standardizării melcilor cu mai [3] multe începuturi. Cercetările legate de tema propusă continuă.

L. N é m e t i a făcut cercetări asupra domeniului de aplicabilitate a corijării roţilor dinţate cilindrice cu dinţi drepţi. A stabilit limitele acestui domeniu, găsind expresiile analitice în vederea calculelor numerice corespunzătoare. În continuare, a obţinut ecuaţiile familiilor de curbe de-a lungul cărora alunecarea specifică, presiunea specifică şi factorul de formă au valori constante date.

S-au întocmit apoi programele corespunzătoare pentru ca toate calculele să fie efectuate cu ajutorul maşinii electronice de calcul CIFA-1. Ca rezultat final se vor obţine o serie de diagrame care se vor putea utiliza la proiectarea optimă a angrenajelor cilindrice. Este de remarcat că în decursul cercetărilor s-a stabilit posibilitatea ivirii unor noi cazuri de interferenţă nedescrise pînă în prezent în literatura de specialitate.

Colectivul format din L. N é m e t i şi A. C s u l a k a mai cercetat şi problema limitelor de utilizare la prelucrarea roţilor dinţate a cuţitelor roată [15], astfel ca diferitele feluri de interferenţă să fie evitate.

În afară de problemele înşirate mai sus, sînt în curs de studiu — în colaborare cu Institutul politehnic din Cluj — încă două probleme cu caracter geometric puse de Uzinele „Steagul Roşu" din Braşov. Prima este problema reprofilării camelor de comandă de la motorul SR 211 fabricat de uzină, astfel ca să se ajungă la o cronosecţiune maximă şi prin

aceasta la mărirea puterii. A doua se referă la elaborarea unei teorii şi a unui calcul corespunzător pentru broşarea circulară a sateliţilor conici de la diferenţialul autocamionului Steagul Roşu. Prin această nouă metodă se va ajunge la mărirea considerabilă a productivităţii pentru aceşti sateliţi.

BIBLIOGRAFIE

1. G e r g e l y E., *Probleme din geometria varietăţilor n-dimensionale în spaţiile separabile ale lui Hilbert*. Studii şi cerc. de matem. (Cluj), **XI**, *1*, 15—21, (1960).
2. — *Despre unele clase de varietăţi n-dimensionale în spaţiile separabile ale lui Hilbert*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), **XI**, *2*, 267—271 (1960).
3. G e r g e l y E., M a r o s D., *Asupra abaterilor dintre flancurile melcilor prelucrate de scule cu profile rectilinii*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XI**, fasc. anexă, 81—100 (1960).
4. J a n k ó B., *Metoda lui Newton şi rezolvarea aproximativă a sistemelor de ecuaţii algebrice liniare*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), **VIII**, 103—114 (1957).
5. — *Despre rezolvarea aproximativă a sistemelor de ecuaţii liniare infinite*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), **X**, *2*, 317—327 (1959).
6. — *Despre rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), **XI**, *1*, 79—83 (1960).
7. — *Sur la théorie unitaire des méthodes d'itération pour la résolution des équations opérationnelles non-lineaires* (*I*) (Magy. Tud. Akad. Int. Közleményei, **IV**, *3*, 301—311 (1961).
8. — *Despre o nouă generalizare a metodei iperbolelor tangente pentru rezolvarea ecuaţiilor funcţionale neliniare definite în spaţii Banach*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), **XI**, *2*, 307—317 (1960).
9. — *Sur la théorie unitaire des méthodes d'iteration nonlineaires* (*II*) (sub tipar la *Magy. Tud. Akad. Int. Kozleményei*).
10. — *Despre metodele de iteraţie aplicate în spaţiul lui Banach pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare*. (sub tipar la *Mathematica*).
11. — *Aplicaţii la rezolvarea ecuaţiilor funcţionale neliniare considerate în spaţii semiordonate*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), **X**, *1*, 51—57 (1959).
12. — *Sur l'analogie de la méthode de Tchebyscheff et de la méthode des hyperboles tangentes*. Mathematica, **2** (**25**), *2*, 269—275 (1960).
13. — *Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare*, Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti 1961.
14. M a r o s D., C s u l a k A., *Bazele teoretice ale prelucrării corecte a melcilor şi a roţilor melcate*. Studii şi cercet. de mecanică aplicată, nr. 1, 1960.
15. N é m e t i L., C s u l a k A., *Folosirea sculelor roată la prelucrarea roţilor dinţate*. Metalurgia şi construcţia de maşini, nr. 6 1959.
16. — *Protocol privind stabilirea grosimii vîrfului dintelui la cuţitul roată şi stabilirea numărului minim de dinţi ce se poate prelucra fără interferenţă cu cuţit roată*. Academia R.P.R.—Filiala Cluj, Institutul de calcul.